This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

L Soc 1726.9 Bd. July, 1893.

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters
shall be spent for books and one quarter
be added to the principal.

21 June, 1892 - 24 Apr. 1893.

HARVARD COLLEGE
APR 24 1893
LIBRARY.

?? - 7

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERUNDVIERZIGSTER BAND.

1892.

MIT ACHT FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

~~[illegible]~~

LSoc 1726.9

1892, June 21 - 1893, Apr. 24

So[illegible]

INHALT.

	Seite
Robert Behrend, Über die Löslichkeit von Doppelverbindungen I.	1
M. Krause, Über die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind. I. . .	15
Friedrich Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie	43
A. Mayer, Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von n Variabeln.	54
C. Neumann, Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik	86
Sophus Lie, Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie	106
E. Drechsel, Über die Spaltungsproducte des Caseïns.	115
E. Study, Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen. Vorgelegt von Herrn Engel . . .	122
G. Scheffers, Verzerrung bei perspectiver Abbildung ebener Figuren. Vorgelegt von Herrn A. Mayer. Mit 5 Figuren . . .	162
F. Schur, Über die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Vorgelegt von Herrn A. Mayer.	177
C. Neumann, Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes. . .	184
Robert Behrend, Über die Löslichkeit von Doppelverbindungeu. II.	188
W. Ostwald, Studien zur Energetik. II. Grundlinien der allgemeinen Energetik	211
M. Krause, Über die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind. II.	238
G. Scheffers, Curvenschaaren, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen. Vorgelegt von Herrn Engel.	269
Friedrich Engel, Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Erste Mittheilung	279
Derselbe, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. VII	292
Sophus Lie, Über einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen	297

Seite

Max Siegfried, Über die chemischen Eigenschaften des reticulirten Gewebes. Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig. Vorgelegt von Herrn Ludwig 306

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Achtundzwanzigste Abhandlung 307

Gottl. Friedr. Lipps, Über Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. Vorgelegt von Herrn Scheibner 340

Hermann Credner, Über die geologische Stellung der Klinger Schichten. Mit 2 Figuren 385

Ernst von Meyer, Vergleichende Charakteristik der dimolekularen Nitrile. (Nach eignen Untersuchungen und Versuchen von Dr. P. S. Burns.) 403

Otto Staude, Über die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen. Vorgelegt von Herrn Ad. Mayer 429

Sophus Lie, Untersuchungen über Translationsflächen. (Abhandlung I) 447

G. F. Lipps, Über Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. (Fortsetzung zu S. 384). Vorgelegt von Herrn Scheibner 473

W. Ostwald, Über die Leitung der Elektricität durch Metalle . . 534

Pfeffer, Über Anwendung des Gipsverbandes für pflanzen-physiologische Studien 538

J. Thomae. Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Mit einer Figur 543

Leuckart, Über die Speicheldrüsen der Hirudineen 556

Sophus Lie, Untersuchungen über Translationsflächen (Abhandlung II) 559

HARVARD COLLEGE
JUN 21 1892
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1892.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD COLLEGE
JUN 21 1892
LIBRARY.

SITZUNG AM 11. JANUAR 1892.

Robert Behrend, *Ueber die Löslichkeit von Doppelverbindungen.* I.

Wenn eine chemische Verbindung in zwei Bestandtheile zerfällt und bei derselben Temperatur aus diesen wieder entsteht, so findet Gleichgewicht zwischen den beiden Reactionen statt, wenn die Bedingung $Cu = C_1 u_1 u_2$ erfüllt ist, wo u die wirksame Menge der Verbindung, u_1 und u_2 die wirksamen Mengen der Bestandtheile, C und C_1 die Geschwindigkeiten des Zerfalls und der Wiederbildung der Verbindung aus den Bestandtheilen bedeuten. Wenn ein fester Körper in zwei gleichvolumige gasförmige zerfällt, so wird u constant und wir erhalten für den Gleichgewichtszustand die Beziehung $\frac{Cu}{C_1} = u_1 u_2 = \text{const.}$ Die Gültigkeit des Gesetzes ist für diesen Fall an mehreren Beispielen nachgewiesen. Ganz dasselbe Gesetz muss aber auch bestehen, wenn sich ein fester Körper bei der Lösung in zwei Moleküle seiner Bestandtheile dissociirt. Das Product der in der Lösung befindlichen wirksamen Mengen der Bestandtheile muss bei derselben Temperatur constant sein, gleichviel welcher der Bestandtheile im Ueberschuss vorhanden ist. Vorausgesetzt, dass die von van't Hoff entdeckte Anwendbarkeit der Gasgesetze auf Lösungen statthaft ist, müssen die wirksamen Mengen den in der Volumeinheit der Lösung befindlichen molekularen Mengen der Bestandtheile proportional sein. Eine experimentelle Untersuchung dieser Beziehungen würde demnach gleichzeitig einen weiteren Prüfstein für die Gültigkeit des van't Hoff-schen Gesetzes liefern.

Für eine solche Untersuchung fand ich gelegentlich einer gemeinschaftlich mit E. König durchgeführten Arbeit über die Alkylderivate des Hydroxylamins [1]) ein bequemes Material.

Der bei 118° schmelzende Benzyläther des Isoparanitrobenzaldoxims und der isomere bei 106° schmelzende Paranitrobenzyläther des Isobenzaldoxims vereinigen sich im Verhältniss ihrer Molekulargewichte zu einer bei 93—94° schmelzenden Doppelverbindung.

Die Molekulargewichtsbestimmung der Doppelverbindung ergab [1]), dass dieselbe in Eisessiglösung bei 16° ganz oder nahezu vollständig dissociirt ist.

Molekulargewicht berechnet	Gefunden	
512	268.7	282.

Die zu beschreibenden Versuche sind mit Lösungen in neunzigprocentigem Alkohol angestellt. Eine directe Bestimmung des Dissociationsgrades der alkoholischen Lösung bei den Versuchstemperaturen liess sich nicht durchführen, da die für ähnliche Fälle geeignete Methode von Will und Bredig bei dem hohen Molekulargewicht und der geringen Löslichkeit der Verbindung nicht hinreichend genaue Resultate liefern dürfte. Da jedoch nach Beckmann's Versuchen Alkohol in derselben Weise dissociirend zu wirken pflegt wie Eisessig, und sich auch aus den Löslichkeitsbestimmungen selbst, wie weiter unten gezeigt werden wird, dasselbe schliessen lässt, so darf man mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass die Verbindung auch unter den eingehaltenen Versuchsbedingungen nahezu vollständig dissociirt war. Für die Temperatur des siedenden Alkohols wurde dies noch mit Hülfe des Beckmann'schen Apparates nachgewiesen.

Constante des absoluten Alkohols 11.5.

Alkohol	Substanz	gel. in 100 Alkohol	Erhöhung	Mol. gew. gef.	Mol. gew. ber.
11.5	0.2521	2.19	0.094	268	512
11.5	0.4991	4.34	0.183	273	
11.5	0.9082	7.90	0.303	299	

Für die ersten Versuchsreihen (bei 0°) bin ich meinem frü-

1) Annalen der Chemie **263**, 175 ff.

2) a. a. O. S. 204.

heren Schüler, Herrn Dr. E. KÖNIG, zu Dank verpflichtet; dieselben haben leider keine brauchbaren Resultate geliefert, aber wenigstens gezeigt, dass man die Lösungen lange Zeit, mindestens etwa acht Tage, bei möglichst constanter Temperatur erhalten muss, um den endgültigen Gleichgewichtszustand abzuwarten. Ich habe die Versuche neuerdings wieder aufgenommen und in folgender Weise durchgeführt.

Die zu untersuchenden Substanzen wurden in gut verschliessbaren Flaschen in warmem neunzigprocentigem Alkohol gelöst und zwar in solchen Mengen, dass sich beim Abkühlen der Lösungen sehr bedeutende Mengen der Körper, mit denen die Lösung gesättigt werden sollte, abschieden. Die Flaschen wurden nebst einem Thermometer, das $\frac{1}{5}$° zu schätzen erlaubte, in einer Holzkiste in Heu und Flanell verpackt unter zeitweiligem Umschütteln in einem Raume von möglichst gleichmässiger Temperatur aufbewahrt. Nach Ablauf einer geeigneten Zeit wurden gleichzeitig je ca. 15 ccm der einzelnen Lösungen entnommen, in tarirte Kölbchen filtrirt und gewogen. Alle Gefässe waren durch längeres Verweilen in demselben Raume auf die Versuchstemperaturen gebracht.

Die Lösungen wurden dann bei etwa 60° im Luftstrome verdunstet und im gewogenen Rückstande das Nitrobenzylisobenzaldoxim im wesentlichen nach der in den Annalen der Chemie 263, 205 angegebenen, weiter unten näher zu beschreibenden Methode, das Benzylisonitrobenzaldoxim aus der Differenz bestimmt.

Um den häufigen Gebrauch der langen Namen zu vermeiden, soll im Folgenden das Benzylisonitrobenzaldoxim mit α, das Nitrobenzylisobenzaldoxim mit β, das Nitrobenzylisonitrobenzaldoxim mit N bezeichnet werden.

Versuchsreihe A. $t = 9.4°$.

In je 70 cbcm 90 % Alkohol wurden am 4. Nov. gelöst:

I. 2.1 g α.
II. 4 g β.
III. Je 2.1250 g α und β.
IV. 2.9 g α und 1.7 g β.
V. 1.5 g α und 4.0 g β.

Die Lösungen wurden in einem Keller aufbewahrt, über dessen Temperatur die folgende Tabelle Auskunft giebt.

6.	Nov.	früh	9.8°	12.	Nov.	früh	9.4°
6.	»	abds.	9.8°	13.	»	»	9.6°
7.	»	früh	9.8°	14.	»	»	9.6°
7.	»	abds.	9.8°	15.	»	»	9.8°
9.	»	früh	9.4°	17.	»	»	10.0°
10.	»	»	9.4°	17.	»	abds.	10.4°
10.	»	abds.	9.8°	18.	»	früh	10.4°
11.	»	früh	9.4°	19.	»	»	10.4°.

Am 11. November wurden in je 15 ccm der fünf Lösungen der Gesammtgehalt an gelöster Substanz bestimmt. Die Rückstände der Proben III, IV und V wurden mit je 20 ccm neunzigprocentigem Alkohol, der zuvor mit Nitrobenzylisonitrobenzaldoxim gesättigt war, übergossen, zu III und IV je 0.1 g, zu V 0.21 g Paranitrobenzaldehyd gefügt, die Lösungen nahezu zum Sieden gebracht und mit je 4 Tropfen concentrirter Salzsäure versetzt.

Das Nitrobenzylisobenzaldoxim setzt sich unter diesen Umständen mit dem Nitrobenzaldehyd zu Benzaldehyd und Nitrobenzylisonitrobenzaldoxim um.

$$C_6H_4NO_2 \cdot CH_2 - \underset{\diagdown\!\diagup \atop O}{N - CH} - C_6H_5 + C_6H_4NO_2COH =$$

$$C_6H_4NO_2CH_2 - \underset{\diagdown\!\diagup \atop O}{N - CH} \cdot C_6H_4NO_2 + C_6H_5COH \,.$$

Letzterer Körper ist in Alkohol fast unlöslich und scheidet sich bereits in der Hitze zum grössten Theile aus.

Nach dem Erkalten (ca. $^1/_2$—$^3/_4$ Stunde) wurde das Nitrobenzylisonitrobenzaldoxim auf einem Witt'schen Filter abgesaugt, mit ca. 20 ccm neunzigprocentigem Alkohol (ebenfalls mit Nitrobenzylisonitrobenzaldoxim gesättigt) und dann mit etwas Aether gewaschen, bei 100° getrocknet und gewogen. Die Verbindung zieht sich beim Absaugen zu einem äusserst leichten Filz zusammen, der sich nach dem Trocknen völlig zusammenhängend vom Filter abheben lässt, so dass man letzteres nicht mit zu wägen braucht. Aus der Menge des Niederschlages erhält man die Menge des Nitrobenzylisobenzaldoxims durch Multiplication mit 0.8505.

Die Begründung einer an den gefundenen Werthen ange-

brachten unwesentlichen Correctur folgt nach Mittheilung der Analysen.

Da es sich im vorliegenden Falle um Massenwirkungen handelt, so hätten eigentlich die in gleichen Volumen der Lösung enthaltenen Mengen der gelösten Stoffe berechnet werden müssen; da aber bei den geringen in Frage kommenden Concentrationsunterschieden die specifischen Gewichte der Lösungen sehr wenig verschieden sein werden, so habe ich mich damit begnügt, den Gehalt in 100 Gewichtstheilen der Lösung zu berechnen.

Lösung I. 12.75 g hinterliessen 0.1479 g α.
100 Theile enthalten 1.16 Theile α.

Lösung II. 11.73 g hinterliessen 0.2538 g.
100 Theile enthalten 2.16 Theile β.

Lösung III. 12.67 g hinterliessen 0.3150 g
und gaben 0.1888 g N entsprechend 0.1606 β
anstatt 0.1575 β
100 Theile enthalten 2.49 Theile
100 » » 1.25 α
100 » » 1.25 β $\alpha \cdot \beta = 1.56$.

Lösung IV. 10.595 g hinterliessen 0.2616 g
und gaben 0.1585 N
entsprechend 0.1348 β corrigirt 0.1318.
100 Theile enthalten 2.47 Theile
100 » » 1.20 α corr. 1.23 $\alpha \cdot \beta = 1.52$
100 » » 1.27 β » 1.24 corr. 1.52.

Lösung V. 11.885 g hinterliessen 0.3538 g
und gaben 0.3133 N entsprechend 0.2665 β
corr. 0.2645 β.
100 Theile enthalten 2.98 Theile
100 » » 0.74 Th. α; corr. 0.75 $\alpha \cdot \beta = 1.65$
100 » » 2.24 » β; » 2.23 corr. $= 1.67$.

Versuchsreihe B. $t = 10.4^{\circ}$.

Am 18. November wurden von den Lösungen wieder je 15 ccm entnommen und analysirt. β wurde dieses Mal auch in Lösung II bestimmt unter Zusatz von 0.25 g Nitrobenzaldehyd.

Lösung I. 12.33 g hinterliessen 0.1458 g.
100 Theile enthalten 1.18 α.

Lösung II. 12.30 g hinterliessen 0.2692 g
und gaben 0.3102 N entsprechend 0.2638 β
anstatt 0.2692 β.
100 Theile enthalten 2.19 β.

Lösung III. 11.82 g hinterliessen 0.3004 g
und gaben 0.1790 N entsprechend 0.1522 β
berechnet 0.1502 β.
100 Theile enthalten 2.54
100 » » 1.27 α
100 » » 1.27 β $\alpha \cdot \beta = 1.61$.

Lösung IV. 11.38 g hinterliessen 0.3004 g
und gaben 0.1717 N entsprechend 0.1460 β
corr. 0.1430 β.
100 Theile enthalten 2.64 Theile
100 » » 1.38 Th. α
100 » » 1.26 » β $\alpha \cdot \beta = 1.74$.

Lösung V. 12.34 g hinterliessen 0.3754 g
und gaben 0.3348 N entsprechend 0.2847 β
corr. 0.2827 β.
100 Theile enthalten 3.04 Theile
100 » » 0.75 Th. α
100 » » 2.29 » β $\alpha \cdot \beta = 1.72$.

Am 21. November wurden den Lösungen noch je 20 ccm neunzigprocentiger Alkohol zugesetzt. Nachdem bis zur völligen Lösung erwärmt war, wurden die Flaschen in einen Raum von etwas höherer Temperatur gebracht, die allerdings nicht so constant erhalten werden konnte.

21.	Nov.	früh	16.8°	28.	Nov.	früh	15.2°
23.	»	»	15.8°	30.	»	»	13.8°
23.	»	abds.	15.8°	1.	Dec.	»	13.6°
24.	»	früh	15.8°	1.	»	abds.	13.4°
24.	»	abds.	15.8°	2.	»	früh	14.2°
25.	»	früh	16.0°	2.	»	abds.	13.6°
26.	»	»	15.8°	3.	»	früh	14.6°
27.	»	»	13.8°	3.	»	abds.	14.0°
27.	»	abds.	14.2°	4.	»	früh	13.6°

Am 25. November wurden wieder Proben analysirt. Die Verdampfungsrückstände wurden diesmal in je 25 ccm Alkohol (mit N gesättigt) gelöst, zu II und V je 0.3 g, zu III und IV je 0.15 g Nitrobenzaldehyd gesetzt.

Es zeigte sich, dass nach viertägigem Stehen der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht war, trotzdem gerade in diesen Tagen die Temperatur sehr gleichmässig gewesen war. Namentlich machte sich dies bei Lösung V bemerkbar, welche auch bei 0°, den Versuchen von König zufolge, stark abweichende Resultate ergeben hatte, während die Lösungen III und IV, entsprechend ihrer nahezu identischen Zusammensetzung, hier wie bei 0° bereits ziemlich befriedigende Resultate gaben.

Versuchsreihe C. $t = 16°$.

Lösung I. 11.79 g hinterliessen 0.1789 g.
100 Theile enthalten 1.52 g α.

Lösung II. 11.845 g hinterliessen 0.3271 g
und gaben 0.3784 N entsprechend 0.3218 β
anstatt 0.3271 β.
100 Theile enthalten 2.76 β.

Lösung III. 12.355 g hinterliessen 0.4035 g
und gaben 0.2433 N entsprechend 0.2069 β
anstatt 0.2018 β.

100	Theile	enthalten	3.27	
100	»	»	1.64 α	
100	»	»	1.64 β.	$\alpha \cdot \beta = 2.69$.

Lösung IV. 11.905 g hinterliessen 0.3999 g
und gaben 0.2317 N entsprechend 0.1971 β
corr. 0.1941 β.

100	Theile	enthalten	3.36 Theile	
100	»	»	1.73 α	
100	»	»	1.63 β.	$\alpha \cdot \beta = 2.82$.

Lösung V. 12.29 g hinterliessen 0.4988 g
und gaben 0.4243 N entsprechend 0.3609 β
corr. 0.3589 β.

100	Theile	enthalten	4.06 Theile	
100	»	»	1.14 α	
100	»	»	2.92 β.	$\alpha \cdot \beta = 3.33$.

Am 4. December wurde wieder analysirt. Die Temperatur hatte während der letzten 7 Tage mit einer kleinen Ausnahme zwischen 13.6° und 14.6° geschwankt.

Versuchsreihe D. $t = 14^{0}$. (13.6 bis 14.6°).

Lösung I. 11.20 g hinterliessen 0.1584 g
100 Theile enthalten 1.41 α.

Lösung II. 11.71 g hinterliessen 0.3042 g
und gaben 0.3479 N entsprechend 0.2959 β
anstatt 0.3042 β.
100 Theile enthalten 2.60 β.

Lösung III. 11.78 g hinterliessen 0.3561 g
und gaben 0.2083 N entsprechend 0.1772 β
anstatt 0.1781 β.

100 Theile enthalten 3.02
100 » » 1.51 α
100 » » 1.51 β $\alpha \cdot \beta = 2.28$.

Lösung IV. 11.54 g hinterliessen 0.3569 g
und gaben 0.2036 N entsprechend 0.1732 β
corr. 0.1702 β.

100 Theile enthalten 3.09
100 » » 1.62 α
100 » » 1.47 β $\alpha \cdot \beta = 2.38$.

Lösung V. 12.11 g hinterliessen 0.4400 g
und gaben 0.3866 N entsprechend 0.3288 β
corr. 0.3268 β.

100 Theile enthalten 3.63
100 » » 0.93 α
100 » » 2.70 β $\alpha \cdot \beta = 2.51$.

Bevor aus den Versuchen weitere Schlüsse gezogen werden können, muss die Genauigkeit der Analysen kurz erörtert werden.

Die Bestimmung der Gesammtlöslichkeit dürfte auf ein bis zwei Einheiten in der zweiten Decimale genau sein, da die Wägefehler wohl 1—2 mg sicher nicht übersteigen.

Die Genauigkeit der Bestimmung von β ergiebt sich aus den mitgetheilten Analysen der Rückstände der Lösungen II

und III. Dieselben zeigen, dass unter den eingehaltenen Bedingungen die Bestimmungen in II stets etwas zu niedrig, in III etwas zu hoch ausfallen. Auf die Ursachen dieser Erscheinung, welche sich aus den der Bestimmung zu Grunde liegenden Reactionen leicht erklären lassen, soll hier nicht näher eingegangen werden, da es sich zunächst nur darum handelt, den wahrscheinlichen Fehler in jedem Falle festzustellen.

Zu diesem Zwecke und um zugleich zu erfahren, ob die aus Lösung II und III auskrystallisirten Körper dieselbe Zusammensetzung, wie die in Lösung befindlichen besässen, wurden die aus diesen Lösungen abgeschiedenen Krystalle analysirt.

1) Krystalle aus Lösung II (β).
0.2923 g in 25 ccm Alkohol gelöst, mit 0.3 g Nitrobenzaldehyd versetzt und mit 4 Tropfen Salzsäure gefällt, gaben 0.3394 N entsprechend 0.2887 β.

---

2) Doppelverbindung aus Lösung III abgeschieden. F. P. 93—94°. Analysirt wie unter 1), nur 0.15 g Nitrobenzaldehyd zugesetzt.
0.3798 g gaben 0.2282 N entsprechend 0.1941 β
anstatt 0.1899 β.

Die Abweichungen von den berechneten Werthen stimmen mit den gelegentlich der Löslichkeitsbestimmungen gefundenen überein, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht.

Lösung II.	Differenz:	
Reihe B.	— 5.4 mg	Mittel — 6.4 mg; nach Ausmerzung des Werthes D — 4.8 mg.
» C.	— 5.3 »	
» D.	— 8.3 »	
Versuch 1)	— 3.7 »	

Lösung III.	Differenz:	
Reihe A.	+ 3.1 mg	Mittel + 2.8 mg. Nach Ausmerzung von D + 3.6 mg.
» B.	+ 2.0 »	
» C.	+ 5.1 »	
» D.	— 0.9 »	
Versuch 2)	+ 4.2 »	

Abweichung vom Mittel im extremen Fall 4.5 mg, in den übrigen höchstens 1.6 mg.

Um auch über den wahrscheinlichen Fehler bei der Analyse der Rückstände der Lösungen V ein Urtheil zu gewinnen, wurden zwei Gemische von deren Zusammensetzung analysirt.

3) 0.3043 g β und 0.1 g α in 25 ccm Alkohol gelöst. Nitrobenzaldehyd 0.3 g.
Gefunden 0.3594 N
entspr. 0.3056 β Diff. + 1.3 mg.

---

4) 0.2904 g β und 0.1 g α.
Gefunden 0.3456 N
entspr. 0.2939 β Diff. + 3.5 mg.

Auf Grund dieser Resultate sind von den gefundenen Werthen von β in den Lösungen V 2 mg in Abzug gebracht, in den Lösungen IV, die in ihrer Zusammensetzung von den Lösungen III kaum abweichen, 3 mg.

Die corrigirten Werthe, die bei der Berechnung von $\alpha \cdot \beta$ benutzt sind, dürften nur ausnahmsweise um mehr als 2 mg falsch sein, die Löslichkeit von β demnach bis auf zwei Einheiten der zweiten Decimale richtig bestimmt sein. Die Werthe für die Löslichkeit von α sind aus der Differenz bestimmt. Da sich die Fehler hier summiren können, so sind in ungünstigen Fällen Fehler von 3—4 Einheiten der zweiten Decimale zu erwarten.

Die Werthe von $\alpha \cdot \beta$ dürften sonach, soweit analytische Fehler in Frage kommen, bis auf höchstens etwa fünf Einheiten der zweiten Decimale genau sein.

Wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, übersteigt die Abweichung der Producte $\alpha \cdot \beta$ von einander diese Werthe wesentlich; doch kommt hier, abgesehen von den analytischen Fehlern in Betracht, dass der Eintritt des Gleichgewichtes sehr lange Zeit in Anspruch nimmt, theoretisch sogar unendlich lange Zeit, und dass es nicht möglich war, die Temperatur auf längere Zeit völlig constant zu erhalten. Eine Schwankung der Temperatur von 1° aber bedingt eine Aenderung des Productes $\alpha \cdot \beta$ von etwa $1\frac{1}{2}$ Einheiten in der ersten Decimale. Man darf daher wohl annehmen, dass das Gesetz $\alpha \cdot \beta =$ const. in erster Annäherung als gültig erwiesen ist.

Nr.	Reihe A. $t = 9.4^{\circ}$			Reihe B. $t = 10.4^{\circ}$			Reihe D. $t = 14^{\circ}$		
	α	β	$\alpha \cdot \beta$	α	β	$\alpha \cdot \beta$	α	β	$\alpha \cdot \beta$
III.	1.25	1.25	1.56	1.27	1.27	1.61	1.51	1.51	2.28
IV.	1.23	1.24	1.52	1.38	1.26	1.74	1.62	1.47	2.38
V.	0.75	2.23	1.67	0.75	2.29	1.72	0.93	2.70	2.51

Die erhaltenen Zahlen bieten aber in anderer Beziehung etwas Auffälliges. Alle Versuchsreihen zeigen nämlich übereinstimmend, dass das Benzylisonitrobenzaldoxim (α) in reinem Alkohol schwerer löslich als in Gestalt der Doppelverbindung, während bei allen bisher bekannten Doppelverbindungen die Löslichkeit des am schwersten löslichen Bestandtheiles geringer ist, als dessen Löslichkeit für sich allein. Diese Erscheinung würde sich durch die Annahme erklären lassen, dass die Doppelverbindung in der Lösung nicht vollständig dissociirt ist. Vorausgesetzt, dass die Dissociationstendenz der Doppelverbindung gross genug ist, um dies zu gestatten, würde sich die Lösung mit freiem Benzylnitrobenzaldoxim sättigen und es würde dann noch diejenige Menge hinzukommen, welche in Form der nichtdissociirten Doppelverbindung löslich ist. Die directen Molekulargewichtsbestimmungen gestatten nicht, diese Frage zu entscheiden. Wenn auch die etwas zu hoch gefundenen Zahlen für die Annahme grösserer Molekularcomplexe sprechen, so liegen die Abweichungen doch innerhalb der Versuchsfehler. Doch dürften sich aus den Löslichkeitsbestimmungen selbst Schlüsse in dieser Richtung ziehen lassen. Wäre die Doppelverbindung in der Lösung vollständig dissociirt, so sollte man annehmen, dass wenn einer der Bestandtheile im Ueberschusse vorhanden ist, sich dieser in der Lösung in derselben Menge befände, wie in reinem Alkohol. Ist aber ein Theil der Doppelverbindung in nichtdissociirtem Zustande in der Lösung vorhanden, so sollte die Lösung erstens die Menge des betreffenden Bestandtheiles enthalten, welche der nichtdissociirten Doppelverbindung entspricht und zweitens diejenige Menge, welche in reinem Alkohol löslich ist. Man würde also die in ersterer Form vorhandene Menge eines jeden Bestandtheiles finden, wenn man die in reinem Alkohol lösliche Menge desselben von der Menge, welche

sich in der Lösung der Doppelverbindung befindet, abzieht, vorausgesetzt, dass der betreffende Bestandtheil im Ueberschuss vorhanden ist. Hierfür bietet jede Versuchsreihe zwei Paare von Daten.

Die in Gestalt der nichtdissociirten Doppelverbindung gelöste Menge von α findet man aus $\alpha_{IV} - \alpha_{I}$[1]), die entsprechende Menge von β aus $\beta_{V} - \beta_{II}$.

Die gefundenen Mengen von α und β müssen, da die Doppelverbindung gleiche Mengen der isomeren Bestandtheile enthält, natürlich gleich sein, und ihre Summe stellt die Löslichkeit der nichtdissociirten Doppelverbindung in Alkohol dar.

Im vorliegenden Falle erhält man auch aus $\alpha_{III} - \alpha_{I}$ dasselbe Resultat, d. h. es ist in der Lösung der reinen Doppelverbindung neben der als Doppelverbindung gelösten Menge von α ebenso viel davon enthalten, wie in der Lösung in reinem Alkohol. Es ist das der Maximalwerth, welcher nur dann erreicht werden kann, wenn die Dissociationstendenz der Doppelverbindung gross genug ist, um dies zu gestatten.

Die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe stimmen in Anbetracht, dass sich hier alle Versuchsfehler summiren, so gut überein, dass man der gemachten Annahme einige Wahrscheinlichkeit zuerkennen möchte.

Versuchsreihe A.

			Mittel	Löslichkeit der Doppelverbindung $= \delta$.
$\alpha_{III} = 1.25$	$\alpha_{IV} = 1.23$	$\beta_{V} = 2.24$		
$\alpha_{I} = 1.16$	$\alpha_{I} = 1.16$	$\beta_{II} = 2.16$		
Diff. 0.09	0.07	0.08	0.08	0.16

Reihe B.

$\alpha_{III} = 1.27$	$\alpha_{IV} = 1.38$	$\beta_{V} = 2.29$		
$\alpha_{I} = 1.18$	$\alpha_{I} = 1.18$	$\beta_{II} = 2.19$		
0.09	0.20	0.10	0.13	0.26

Reihe D.

$\alpha_{III} = 1.51$	$\alpha_{IV} = 1.62$	$\beta_{V} = 2.70$		
$\alpha_{I} = 1.41$	$\alpha_{I} = 1.41$	$\beta_{II} = 2.60$		
0.10	0.21	0.10	0.13	0.26

1) Die Zahlen bedeuten die Nummern der Lösungen.

Die entsprechenden Werthe der Reihe C, bei der der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht war, sind:

0.12 0.21 0.16 0.16 0.32

Hieraus würde sich ergeben, dass die Doppelverbindung in der alkoholischen Lösung nur zu 90—93% dissociirt ist.

In diesem Falle kann man aber in der Gleichung $\frac{Cu}{C_1} = u_1 \cdot u_2$ für u_1 und u_2 nicht die direct gefundenen Mengen von α und β einsetzen und ferner nicht ohne weiteres u, die Menge der nichtdissociirten Doppelverbindung, als constant in Rechnung bringen. Im vorliegenden Falle aber ist die gelöste Doppelverbindung stets in Berührung mit der im festen Zustande abgeschiedenen; ihre Menge muss also, wie die einer jeden Substanz in ihrer gesättigten Lösung, bei constanter Temperatur constant sein. Um die Mengen von u_1 und u_2, deren Product constant sein soll, zu finden, muss man von den für α und β gefundenen Mengen die nichtdissociirten Antheile $\frac{\delta}{2}$, die sich aus vorstehender Tabelle ergeben, abziehen.

Reihe A, $t = 9.4^\circ$.

Nr.	δ	$\alpha - \frac{\delta}{2}$	$\beta - \frac{\delta}{2}$	$\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right)$
III.	0.16	1.17	1.17	1.37
IV.	1.16	1.15	1.16	1.33
V.	1.16	0.67	2.15	1.44

Reihe B. $t = 10.4^\circ$.

III.	0.26	1.14	1.14	1.30
IV.	0.26	1.25	1.13	1.41
V.	0.26	0.65	2.19	1.34

Reihe D. $t = 14^\circ$.

III.	0.26	1.38	1.38	1.90
IV.	0.26	1.49	1.34	1.90
V.	0.26	0.80	2.57	2.06

Die so erhaltenen Resultate sind in der Tabelle Seite 13 zusammengestellt. Die Uebereinstimmung der Producte ist etwas besser, als ohne diese letzte Correctur. Vor Allem aber unterscheiden sich die Zahlen dadurch vortheilhaft von den in der uncorrigirten Tabelle gegebenen, dass sich die Abweichungen vom Mittel unregelmässiger auf die einzelnen Versuche vertheilen, und demnach wahrscheinlich auf Versuchsfehler zurückzuführen sind.

Ich bin damit beschäftigt, die Pikrate des Naphtalins und des Phenantrens unter denselben Gesichtspunkten zu untersuchen.

Leipzig, I. chemisches Laboratorium der Universität.
11. Januar 1892.

M. Krause, *Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind.* **I.**

In einer Reihe von Arbeiten[1]) sind diejenigen Differentialgleichungen untersucht worden, deren Integrale beide doppeltperiodische Functionen sind. Insbesondere hat sich die Untersuchung auf die Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung bezogen. Diese Gleichungen stellen den allgemeinen Fall derjenigen Gleichungen dar, deren Coefficienten eindeutige doppeltperiodische Functionen, deren Integrale uniforme Functionen sind. Es möge in Bezug hierauf auf einige Arbeiten der Herren Picard[2]) und Floquet[3]) verwiesen werden. Daneben aber giebt es Fälle, in denen nicht sämmtliche Integrale doppeltperiodische Functionen sind. Zu der Betrachtung derselben wenden wir uns jetzt und zwar beschränken wir uns zunächst auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es sollen damit die Lücken ausgefüllt werden, die in den früheren Arbeiten, wie schon daselbst bemerkt, geblieben sind. Es sollen nun zunächst eine Reihe nothwendiger Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung eine uniforme Function sei. Die Betrachtungen sollen nicht in der allgemeinsten Form angestellt werden, jedoch so, dass die allgemeinsten Resultate unmittelbar in derselben Weise entwickelt werden können. Soweit dem Verfasser bekannt, sind diese Resultate in der vorliegenden Form neu.

---

1) Siehe diese Berichte, Sitzung vom 3. März 1890, 7. Juli 1890, 1. December 1890, 2. Februar 1891, 8. Juni 1891, 7. December 1891.

2) Kronecker's Journal, Band 90.

3) Annales de l'école normale, 1883. 1884.

Dann wird dazu übergegangen, für einzelne Gleichungen die Ausnahmefälle zu untersuchen. Den ersten und wichtigsten Platz nimmt hierbei die Lamé'sche Differentialgleichung ein. Dieselbe ist nach der angegebenen Richtung hin im einfachsten Falle von Herrn Fuchs[1]), im allgemeinen Falle von Herrn Hermite[2]) untersucht worden, abgesehen von der älteren Literatur über diesen Gegenstand. Hier soll nun der Gang der Untersuchung ein anderer wie bei Herrn Hermite sein. Es liegt das an dem Ausgangspunkt. Bei den sämmtlichen bisherigen Betrachtungen ist die Productform der Integrale zu Grunde gelegt worden. Dies wird hier beibehalten, während Herr Hermite von der Summendarstellung ausgeht. Daneben finden sich einige Untersuchungen vor, auf die Herr Hermite überhaupt nicht eingegangen ist. Als zweites Beispiel wird die Picard'sche Gleichung gewählt, die nach der angegebenen Richtung hin noch nicht untersucht worden ist.

§ 1.

Einfache Ableitung einiger bekannter Formeln.

Bei einer anderen Gelegenheit[3]) ist von dem Verfasser eine einfache Methode angegeben worden, wie doppeltperiodische Functionen dritter Art durch Primfunctionen dargestellt werden können. Als specieller Fall ergiebt sich die Hermite'sche Darstellung der Functionen zweiter Art und zwar können wir hierbei in folgender Weise schliessen.

Die Function:

$$(1)\qquad f(v) = \vartheta_1(v-\nu_1)\cdot\vartheta_1(v-\nu_2)\cdots\vartheta_1(v-\nu_n)\,e^{\lambda w}$$

ist eine ganze transcendente doppeltperiodische Function dritter Art von der Ordnungszahl n. Die Functionen:

$$f_r(v) = \vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(\nu-a_n)\cdot\frac{\vartheta_1(v-\nu-a_r)}{\vartheta_1(v-a_r)}\,e^{\lambda w}$$

sind von derselben Art und leisten überdies denselben Bedingungsgleichungen Genüge, wenn

$$\nu = \nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n-a_1-a_2-\cdots-a_n$$

1) Comptes rendus, tome 85, pag. 947.

2) Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885.

3) Math. Annalen, Band 30.

gesetzt wird. Hierher sind die Grössen $a_1 \cdots a_n$ von einander nach dem Modul $m + m_1 \tau$ verschieden, im Uebrigen aber willkürlich. Nehmen wir die Annahme hinzu, dass ν verschieden ist von $m + m_1 \tau$, so folgt, dass die n neuen Functionen von einander verschieden und linear unabhängig sind. Unter solchen Umständen erhalten wir die Darstellung:

$$(2) \qquad f(v) = \sum_1^n c_r f_r(v) \, .$$

In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn mehrere der Grössen a einander gleich sind.

Werden s der Grössen gleich a_1, so haben wir zu dieser Stelle die s Grössen in Betracht zu ziehen:

$$\vartheta_1(v - a_1)^s \cdot \vartheta_1(v - a_2) \cdots \frac{d^\sigma f_1(v)}{dv^\sigma}, \qquad \sigma = 0, 1, \cdots s - 1 \, .$$

Führen wir noch an Stelle der Argumente der Thetafunctionen die Argumente der elliptischen Functionen ein, so erhalten wir das bekannte Hermite'sche Resultat:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(w) = \\ \sum^r \left[A_0 \cdot \varphi_r(w) + A_1 \cdot \dfrac{d\varphi_r(w)}{dw} + \cdots + A_{s-1} \cdot \dfrac{d^{s-1}\varphi_r(w)}{dw^{s-1}} \right], \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi(w) = \dfrac{\vartheta_1(v - \nu_1) \cdots \vartheta_1(v - \nu_n)}{\vartheta_1(v - a_1) \cdot \vartheta_1(v - a_2) \cdots \vartheta_1(v - a_n)} \, e^{\lambda w}, \\ \varphi_r(w) = \dfrac{\vartheta_1(v - \nu - a_r)}{\vartheta_1(v - a_r)} \, e^{\lambda w}, \end{cases}$$

wo die Summe nach r über alle von einander verschiedene Wurzeln des Nenners zu erstrecken ist und s angiebt, wievielfach die Wurzel a_r ist. Die Coefficienten A_0, A_1, $\cdots A_{s-1}$ sind in der bekannten Weise zu berechnen.

Die Resultate werden falsch, wenn:

$$\nu \equiv 0 \mod m + m_1 \tau$$

ist.

Nehmen wir jetzt diesen Specialfall und machen zunächst die Annahme, dass die Grössen a_1, a_2, $\cdots a_n$ alle von einander verschieden sind, so wollen wir die Grössen in Betracht ziehen:

$$\vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(v-a_n)\frac{\vartheta_1'(v-a_r)}{\vartheta_1(v-a_r)}e^{\lambda w}.$$

Die Anzahl dieser Functionen, die auch ihrerseits ganze transcendente Functionen sind, ist dann gleich n. Einzeln leisten dieselben nicht den nämlichen Gleichungen Genüge, wie die ursprünglich zu Grunde gelegte Function, wohl aber thut es die Summe:

$$\vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(v-a_n)\sum^r c_r\cdot\frac{\vartheta_1'(v-a_r)}{\vartheta_1(v-a_r)}\cdot e^{\lambda w},$$

vorausgesetzt, dass die Grössen c_r der Bedingungsgleichung Genüge leisten:

$$\sum^r c_r = 0 .$$

Es bleiben also $n-1$ der Grössen c_r willkürlich, so dass wir eine Function mit $n-1$ willkürlichen Constanten erhalten, die denselben Gleichungen wie die ursprüngliche Genüge leistet. Zu ihnen kommt noch die Function:

$$\vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(v-a_n)e^{\lambda w}$$

hinzu, so dass wir die Darstellung erhalten:

$$(5)\quad \begin{cases} f(v) = \\ \vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(v-a_n)e^{\lambda w}\left(c_0+\sum_1^{n} {}^r c_r\cdot\frac{\vartheta_1'(v-a_r)}{\vartheta_1(v-a_r)}\right). \end{cases}$$

Aehnlich ist der Fall der gleichen Wurzeln zu behandeln. Wir erhalten das Resultat von Mittag-Leffler[1]:

$$(6)\quad \varphi(w) = c_0\cdot e^{\lambda w}+\sum\left(A_0\cdot\varphi_r(w)+\cdots+A_{s-1}\frac{d^{s-1}\varphi_r(w)}{dw^{s-1}}\right),$$

wobei jetzt gesetzt ist:

$$(7)\qquad \varphi_r(w) = \frac{\vartheta_1'(v-a_r)}{\vartheta_1(v-a_r)}e^{\lambda w},$$

und die Grössen $A_0\cdots A_{s-1}$ der Gleichung Genüge leisten:

$$\sum(A_0+A_1\cdot\lambda+\cdots+A_{s-1}\cdot\lambda^{s-1})e^{-\lambda s} = 0 .$$

Für manche Betrachtungen empfiehlt es sich, die Weierstrass-schen Functionen $Al_\alpha(w)$ einzuführen.

1) Comptes rendus, 26 Janvier 1880, siehe auch Steenberg: Sur un cas spécial de l'équation de Lamé, Acta mathematica Band 10.

Wir setzen:

(8) $$Al_1(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \cdot w^2},$$

(9) $$Al_\alpha(w) = \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_0} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \cdot w^2}, \quad \alpha = 0, 2, 3.$$

Wir können mit den Functionen $Al(w)$ dann ähnlich wie mit den Thetafunctionen operiren und erhalten die Darstellung:

(10) $$\varphi(w) = c_0 \cdot e^{\lambda w} + \sum \left[A_0 \cdot \varphi_r(w) + \cdots + A_{s-1} \frac{d^{s-1} \varphi_r(w)}{dw^{s-1}}\right],$$

wobei die Grössen A einer ähnlichen Bedingung wie vorhin Genüge leisten und $\varphi_r(w)$ gesetzt ist gleich:

(11) $$\varphi_r(w) = \frac{d \log Al_1(w - \alpha_r)}{dw} \cdot e^{\lambda w}.$$

Hierbei ist bekanntlich:

$$\frac{d^2 \log Al_1(w)}{dw^2} = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2 w}.$$

Setzt man in diesen Formeln $\lambda = 0$, so ergiebt sich die bekannte Summendarstellung der gewöhnlichen doppeltperiodischen Functionen.

§ 2.

Ableitung von Bedingungen, denen die doppeltperiodischen Coefficienten einer Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leisten müssen, damit das Integral eine uniforme Function sei.

In früheren Arbeiten sind in einer Reihe von Fällen die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen für die doppeltperiodischen Coefficienten einer Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt worden, damit beide Integrale doppeltperiodische Functionen sind.

Es soll nun versucht werden, unter der Annahme eines uniformen allgemeinen Integrales analoge Bedingungen abzuleiten. Es hat gar keine Schwierigkeit, das Problem in seiner allgemeinsten Form zu lösen. Um aber möglichst einfache Betrachtungen zu erhalten, wollen wir specialisiren. Die Diffe-

rentialgleichungen können nach der Ordnung und der Zahl der Unendlichkeitspunkte ihrer Integrale eingetheilt werdén, ferner nach der Zahl der sonstigen Unendlichkeitspunkte, die in den Coefficienten auftreten. Wir wollen nun, wie schon bemerkt, bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung bleiben und ferner annehmen, dass das allgemeine Integral nur zwei Unendlichkeitspunkte besitze und zwar die beiden Punkte

$$w = iK' \quad \text{und} \quad w = -a + iK' ,$$

wobei der erstere von der Ordnungszahl n_1, der zweite von der Ordnungszahl n_2 sein möge. Die Zahl der übrigen Unendlichkeitspunkte in den Coefficienten möge einstweilen beliebig und zwar gleich m sein. Dann folgt, dass ein Integral sicher die Form haben muss:

$$(1) \qquad \varphi(w) = \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_n)}{\vartheta_0(v)^{n_1}\cdot\vartheta_0(v+a)^{n_2}} e^{\lambda w} ;$$

es folgt ferner, dass in dem Coefficienten von $\frac{d\varphi(w)}{dw}$ nur Unendlichkeitspunkte erster Ordnung, in dem Coefficienten von $\varphi(w)$ nur Unendlichkeitspunkte zweiter Ordnung vorkommen können. Hieraus ergiebt sich leicht als allgemeinste Form der möglichen Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + f_1(w)\frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w)\cdot f_2(w) ,$$

wobei gesetzt ist:

$$(3) \qquad f_1(w) = c_1 + c_2\cdot k^2\cdot \operatorname{sn} w\cdot\operatorname{sn}(w+a) + \\ + \sum_1^m {}^{\mu} c_{\mu+2}\cdot k^2\cdot\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{sn}(w+\beta_\mu) ,$$

$$(4) \qquad f_2(w) = c_1' + c_2'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{sn}(w+a) + \\ + c_3'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2 w + c_4'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2(w+a) + \\ + \sum_1^m {}^{\mu} c_{\mu+4}\cdot k^2\cdot\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{sn}(w+\beta_\mu) .$$

Es folgt dann leicht, *dass die sämmtlichen Grössen*:

$$\frac{c_2}{\operatorname{sn} a}, \quad \frac{c_3}{\operatorname{sn}\beta_1}, \quad \cdots \quad \frac{c_{m+2}}{\operatorname{sn}\beta_m}$$

ganze Zahlen sein müssen und zwar mit Ausnahme der ersten ganze positive Zahlen.

Wir wollen den Beweis, der auf mehrfachem Wege gegeben werden kann, nur für die Grössen $c_{\mu+2}$ geben. Der Punkt:

$$w = -\beta_\mu + iK'$$

ist kein Unendlichkeitspunkt der Integrale, folglich müssen die letzteren, von einem constanten Factor abgesehen, um diesen Punkt herum sich darstellen lassen:

$$1 + B_1 \cdot \varepsilon + B_2 \cdot \varepsilon^2 + \cdots .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir eine Reihe von Gleichungen, die der Reihe nach die Bestimmung der Grössen B_1, B_2, $\cdots$ liefern. Diese Bestimmung darf keine eindeutige sein. Hieraus folgt ähnlich, wie in früheren Arbeiten, dass $\frac{c_{\mu+2}}{\operatorname{sn}\beta_\mu}$ eine positive ganze Zahl sein muss. Wir wollen uns der einfacheren Bezeichnung wegen an Stelle von c_2, c_3 etc. gesetzt denken: $c_2 \cdot \operatorname{sn}\alpha$, $c_3 \cdot \operatorname{sn}\beta$, etc.

Ferner kann gezeigt werden, dass die Zahl der Punkte β_μ eine gewisse Grenze nicht überschreiten kann. Wir wollen dazu das zweite Integral bilden. Nennen wir das erste y_1, so ist das zweite:

$$(5) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int f_1(w)\,dw} \cdot dw .$$

Zur Bildung von:

$$-\int f_1(w) \cdot dw$$

beschränken wir uns zunächst auf ein Glied von $f_1(w)$, nämlich:

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}w \cdot \operatorname{sn}(w + \alpha) ,$$

dann wird der entsprechende Theil des Integrales gleich:

$$-k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_2 \int \frac{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + \operatorname{sn}w \cdot \operatorname{cn}w \cdot \operatorname{dn}w \cdot \operatorname{sn}\alpha}{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 w}\,dw =$$

$$-k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_2 \int \frac{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot dw}{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 w} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} c_2 \cdot \log(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 w) .$$

Das erste Integral ist aber das dritte Normalintegral, also erhalten wir:

$$-c_2\cdot w\cdot\frac{d\log\vartheta_0(a)}{da}-\frac{c_2}{2}\log\frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v+a)}+$$
$$+\tfrac{1}{2}c_2\cdot\log(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)$$

oder also:

$$-c_2\cdot w\cdot\frac{d\log\vartheta_0(a)}{da}+c_2\log\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(a)},$$

da die Formel besteht:

$$\vartheta_0^2\cdot\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v-a)=\vartheta_0(v)^2\cdot\vartheta_0(a)^2-\vartheta_1(v)^2\cdot\vartheta_1(a)^2 .$$

Unter solchen Umständen erhalten wir als Werth von

$$e^{-\int f_1(w)\,dw}$$

den Ausdruck:

$$(6)\qquad e^{-\left(c_1+c_2\frac{d\log\vartheta_0(a)}{da}+\sum c_{\mu+2}\cdot\frac{d\log\vartheta_0(b_\mu)}{d\beta_\mu}\right)w}\cdot F,$$

$$F=\left[\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(a)}\right]^{c_2}\prod\left[\frac{\vartheta_0(v+b_\mu)}{\vartheta_0(v)}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(b_\mu)}\right]^{c_{\mu+2}}.$$

Hieraus folgt, dass

$$e^{-\int f_1(w)\,dw}$$

eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist, wie es auch die allgemeine Theorie lehrt.

Ferner folgt, dass die Function als einzige Unendlichkeitspunkte die beiden Punkte:

$$w=iK' \qquad \text{und} \qquad w=-\alpha+iK'$$

besitzen kann und zwar diese höchstens von den resp. Ordnungen $2n_1$ und $2n_2$.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung nun, deren Integrale y_1 und y_2 sind lautet:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=0$$

oder

$$P\cdot y''+Q\cdot y'+R\cdot y=0,$$

wobei gesetzt ist:

$$P = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1',$$
$$Q = y_2 \cdot y_1'' - y_1 \cdot y_2'',$$
$$R = y_1' \cdot y_2'' - y_2' \cdot y_1'',$$

Eine leichte Rechnung zeigt die Richtigkeit der Relationen:

$$P = e^{-\int f_1(w)\,dw},$$

$$Q = \frac{dP}{dw}.$$

Aus den vorhin gemachten Bemerkungen folgt dann, dass die Nullpunkte von P die einzigen Unendlichkeitspunkte sind, die

$$\frac{Q}{P}$$

ausser den Punkten $w = iK'$ und $w = iK' - \alpha$ noch besitzen kann. Die Anzahl derselben ist aber höchstens

$$2n_1 + 2n_2 = 2n .$$

Wir finden somit das Resultat, dass ausser den Unendlichkeitspunkten der Integrale in den Coefficienten *höchstens* $2n$ *andere Unendlichkeitspunkte vorkommen können.*

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass nur *ein* weiterer Unendlichkeitspunkt vorkomme, nämlich $w = -\beta + iK'$, bemerken aber nochmals, dass im allgemeinen Falle die Betrachtungen ganz analog angestellt werden können.

Die Differentialgleichung wollen wir in diesem Falle schreiben:

$$(7)\qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + f_1(w)\,\frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w)\,f_2(w),$$

$$(8)\qquad \begin{cases} f_1(w) = c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + \\ \qquad + c_3 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\beta), \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} f_2(w) = \\ c_4 + c_5 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + c_6 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\beta) + \\ \qquad + c_7 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w + c_8 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2(w+\alpha) . \end{cases}$$

Das zweite Integral nimmt die Form an:

$$(10)\quad y_2 = y_1 \int e^{-\left(c_1 + c_2 \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d\alpha} + c_3 \frac{d \log \vartheta_0(b)}{d\beta}\right) w} \cdot \frac{dw}{y_1^2} \cdot F,$$

$$F = \left[\frac{\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0}{\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_0(a)}\right]^{c_2}\left[\frac{\vartheta_0(v+b)\cdot\vartheta_0}{\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_0(b)}\right]^{c_3}.$$

Da nun das zweite Integral dieselben Unendlichkeitspunkte wie das erste besitzen soll, so folgt:

1) c_3 *muss positiv sein, was schon auf anderem Wege bewiesen war*;

2) c_2 *muss die Werthe annehmen* $-2n_2, -2n_2+1, \cdots 0, 1, \cdots$;

3) $c_2 + c_3$ *muss kleiner oder gleich* $2n_1$ *sein.*

Die Function innerhalb des Integralzeichens können wir schreiben:

$$\chi(w) = e^{\lambda_1 w} \cdot F \cdot \frac{\vartheta_0(v)^{2n_1} \cdot \vartheta_0(v+a)^{2n_2}}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2 \cdots \vartheta_1(v+\nu_n)^2},$$

wobei der Werth von λ_1 nicht näher hingeschrieben zu werden braucht. Die noch fehlenden Bedingungen dafür, dass das zweite Integral eine uniforme Function sei, können dann leicht dahin aufgestellt werden, dass die Coefficienten von:

$$(v+\nu_r)^{-1}$$

in der Entwickelung von $\chi(w)$ nach Potenzen von $(v+\nu_r)$ sämmtlich verschwinden, oder also, dass die Gleichungen bestehen:

$$(11)\quad \frac{d}{dw}\left(\chi(w)\cdot\frac{\vartheta_1(v+\nu_r)^2}{\vartheta_0(v)^2}\cdot e^{-2\frac{\vartheta_0'(\nu_r)}{\vartheta_0(\nu_r)}v}\right)_{v=-\nu_r} = 0.$$

Hier treten nun die Entwickelungen des ersten Paragraphen ein, so weit sie sich auf die Summendarstellung doppeltperiodischer Functionen beziehen. Im Allgemeinen wird die Function unter dem Integralzeichen eine doppeltperiodische Function zweiter Art von der gewöhnlichen Form sein. Sie nimmt die Mittag-Leffler'sche Form an, wenn die Gleichung besteht:

$$(12a)\quad a\cdot c_2 + b\cdot c_3 = 2(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n - a),$$

sie wird zu einer doppeltperiodischen Function erster Art, wenn überdies:

$$(12b)\quad \lambda_1 = 0.$$

ist. Herr PICARD zeigt, dass in den beiden ersten Fällen das zweite Integral wiederum eine doppeltperiodische Function ist, im dritten dagegen nicht. Die hierbei auftretenden Formeln folgen unmittelbar aus den Resultaten des ersten Paragraphen und brauchen daher nicht aufgestellt zu werden.

§ 3.

Die Lamé'sche Differentialgleichung. Discussion der Ausnahmefälle für $n = 1$ und $n = 2$.

Die LAMÉ'sche Differentialgleichung entsteht, wenn wir die Bedingung festsetzen, dass das Integral den Punkt $w = iK'$ als alleinigen Unendlichkeitspunkt n^{ter} Ordnung besitzt, während die Coefficienten keinen weiteren Unendlichkeitspunkt besitzen. Als Form derselben ergiebt sich:

$$(1)\qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)\,(c_0 + c_1 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w)\ .$$

Nun lehrt die allgemeine Theorie, dass das allgemeine Integral dieser Gleichung die Form hat:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(w) &= c_1 \frac{\vartheta_1(v-\nu_1)\cdots\vartheta_1(v-\nu_n)}{\vartheta_0(v)^n}\, e^{\lambda w} + \\ &+ c_2 \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_n)}{\vartheta_0(v)^n}\, e^{-\lambda w}\,, \end{aligned}\right.$$

wobei die Grössen ν und λ in gewisser Weise zu bestimmen sind.

Hieraus folgt dann ohne jede Schwierigkeit, dass der Ausnahmefall dann und nur dann eintreten kann, wenn die beiden particulären Integrale zusammenfallen, oder also wenn die Ausdrücke

$$\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_n) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v-\nu_1)\cdots\vartheta_1(v-\nu_n)$$

dieselben Nullstellen besitzen, wenn überdies

$$\lambda = 0$$

ist.

Hierbei folgt zunächst leicht, dass die Grössen $\nu_1 \cdots \nu_n$ von einander verschieden sein müssen. In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, so möge sich $\varphi(w)$ in die Form bringen lassen:

$$\varphi(w) = \frac{\vartheta_1(v+\nu)^l}{\vartheta_0(v)^l} \cdot \varphi_1(w) .$$

Differentiiren wir dann die Differentialgleichung links und rechts $l-2$ mal, so wird die rechte Seite für $v = -\nu$ der Null gleich, die linke also auch d. h. es müsste die Gleichung bestehen:

$$\vartheta_1'(v+\nu)^l = 0 , \qquad v = -\nu ,$$

was nicht möglich ist.

Ehe wir nun zu dem allgemeinen Falle übergehen, wollen wir die einfachsten Fälle für sich betrachten und zwar zunächst den Fall $n = 1$. In ihm kommt das Problem darauf hinaus zu untersuchen, wann

$$\vartheta_1(v+\nu_1) = c\vartheta_1(v-\nu_1) , \qquad \lambda = 0$$

ist. Offenbar sind drei Fälle möglich,

I) $\omega_1 = 0$,

II) $\omega_1 = K$,

III) $\omega_1 = K + iK'$.

Im ersten Falle wird das erste Integral:

(3) $$y_1 = \operatorname{sn} w ,$$

das zweite also:

$$y_2 = \operatorname{sn} w \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w} = \operatorname{sn} w \frac{Al_1'(w)}{Al_1(w)} .$$

Im zweiten Falle wird:

(4) $$y_1 = \operatorname{cn} w ,$$

$$y_2 = \operatorname{cn} w \int \frac{dw}{\operatorname{cn}^2 w}$$

oder also

$$y_2 = \operatorname{cn} w \left(k^2 \cdot w + \frac{Al_2'(w)}{Al_2(w)}\right) .$$

Im dritten Falle wird:

(5) $$y_1 = \operatorname{dn} w ,$$

$$y_2 = \operatorname{dn} w \int \frac{dw}{\operatorname{dn}^2 w}$$

oder also

$$y_2 = \operatorname{dn} w \left(1 + \frac{Al_3'(w)}{Al_3(w)}\right) .$$

Damit ist in diesem speciellen Falle die Integration vollführt. Die Werthe der Constanten c_0 und c_1 brauchen nicht hingeschrieben zu werden. Es sind dieses die Resultate der Herren FUCHS und HERMITE.

Wir nehmen zweitens $n = 2$.

Dann fragt es sich, wann die Gleichung bestehen kann:

$$\vartheta_1(v+\nu_1)\cdot\vartheta_1(v+\nu_2) = c\cdot\vartheta_1(v-\nu_1)\cdot\vartheta_1(v-\nu_2)\,.$$

Berücksichtigen wir, dass ν_1 verschieden von ν_2 sein muss, so bleiben vier Möglichkeiten übrig:

I) $\quad \omega_1 = -\omega_2 = \omega\,,$

II) $\quad \omega_1 = K\,,\quad \omega_2 = 0\,,$

III) $\quad \omega_1 = K\,,\quad \omega_2 = K + iK'$

IV) $\quad \omega_1 = 0\,,\quad \omega_2 = K + iK'\,.$

Im ersten Falle wird das erste Integral:

$$y_1 = \mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega\,, \tag{6}$$

Der Werth von ω ist auf mehrfache Weise zu bestimmen. Ganz allgemein ergiebt sich im Falle $n = 2$, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise aufnehmen, die Gleichung:

$$\frac{u_1 + u_2}{x_1 - x_2} = 0\,.$$

Wird nun $x_1 = x_2$, $u_1 = -u_2$, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$1 - 2(1+k^2)\mathrm{sn}^2\omega + 3k^2\mathrm{sn}^4\omega = 0\,. \tag{7}$$

Es ist das dieselbe Gleichung, die auch Herr HERMITE aufstellt. Sie zeigt, dass es *zwei* Integrale der vorhin charakterisirten Art giebt.

Das zweite Integral wird nun:

$$y_2 = y_1\int\frac{dw}{(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2\omega)^2}\,.$$

Wenn aber $\mathrm{sn}^2 w$ in der vorhin angegebenen Art bestimmt wird, so ist der Ansatz erlaubt:

$$\frac{1}{(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2\omega)^2} = e_0 + e_1\frac{d^2\log Al_1(w-\omega)}{dw^2} + e_2\frac{d^2\log Al_1(w+\omega)}{dw^2}\,.$$

Die Constanten e_0, e_1, e_2 bestimmen sich leicht. In der That, für den Punkt $w = \omega$ ergiebt sich:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega} = \frac{1}{2(w - \omega)\operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega} + \text{steigend. Pot.}$$

Unter solchen Umständen wird:

$$e_1 = -\frac{1}{4\operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{cn}^2\omega \cdot \operatorname{dn}^2\omega}.$$

Ebenso folgt:

$$e_2 = -\frac{1}{4\operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{cn}^2\omega \cdot \operatorname{dn}^2\omega}.$$

Setzen wir schliesslich links und rechts $w = 0$, so ergiebt sich für e_0 die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^4\omega} = e_0 + \frac{1}{2\operatorname{sn}^4\omega \cdot \operatorname{cn}^2\omega \cdot \operatorname{dn}^2\omega}.$$

Damit ist die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung im ersten Falle vollkommen zu Ende geführt. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(8) \qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)\left(-\frac{2}{\operatorname{sn}^2\omega} + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w\right).$$

Wir nehmen den zweiten Fall. In ihm ist:

$$(9) \qquad y_1 = \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w,$$

also

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{cn}^2 w}.$$

Der Factor von y_1 kann sofort bestimmt werden. In der That, es ist:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{cn}^2 w} = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} + \frac{1}{\operatorname{cn}^2 w},$$

also:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w} + y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{cn}^2 w}.$$

Damit haben wir die früheren Integrale und die Integration auch in diesem Falle vollführt. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(10) \qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)(-1 - k^2 + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w).$$

Drittens wird:

(11) $$y_1 = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w\ ,$$

also:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{cn}^2 w \cdot \operatorname{dn}^2 w}\ .$$

Da aber:

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 w \cdot \operatorname{dn}^2 w} = \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{\operatorname{cn}^2 w} - \frac{k^2}{k_1^2} \frac{1}{\operatorname{dn}^2 w}$$

ist, so folgt:

$$y_2 = \frac{y_1}{k_1^2} \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w} - \frac{k^2}{k_1^2} y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{dn}^2 w}\ .$$

Hiermit sind wir wieder am Ziel. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

(12) $$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)(-1 - k^2 + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w)\ .$$

Endlich letztens kann sein:

(13) $$y_1 = \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{dn} w,$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{dn}^2 w}\ .$$

Da aber die Gleichung besteht:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w \cdot \operatorname{dn}^2 w} = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} + \frac{k^2}{\operatorname{dn}^2 w}\ ,$$

so folgt:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w} + k^2 \cdot y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{dn}^2 w}\ .$$

Die entsprechende Differentialgleichuung lautet:

(14) $$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)(-1 - 4k^2 + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w)\ .$$

Damit ist der Fall $n = 2$ vollkommen erledigt.

In Bezug auf die hier behandelten Integrale möge u. A. auf die Arbeiten von Herrn SCHEIBNER verwiesen werden, die sich in diesen Berichten finden, überdies auf eine Arbeit von CRAIG im fünften Bande des American Journal of Mathematics, wobei zu bemerken ist, dass die letztere nicht fehlerfrei ist.

§ 4.

Die Lamé'sche Differentialgleichung. Allgemeine Discussion des Ausnahmefalles.

Um den allgemeinen Fall zu untersuchen, müssen wir unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

(A.) $$n = 2m\,.$$

Die Frage lautet, wann die beiden Ausdrücke:

$\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_{2m})$ und $\vartheta_1(v-\nu_1)\cdots\vartheta_1(v-\nu_{2m})$ dieselben Nullpunkte besitzen.

Unter Berücksichtigung der früheren Bemerkungen folgt dann leicht, dass vier und nur vier Fälle möglich sind:

I) $\omega_1 = -\omega_{2m}\,,\quad \omega_1 = -\omega_{2m-1}\,,\cdots\quad \omega_m = -\omega_{m+1}\,,$

II) $\omega_1 = K,\quad \omega_2 = 0\,,\quad \omega_3 = -\omega_{2m},\cdots\quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2}\,,$

III) $\omega_1 = K+iK',\quad \omega_2 = K,\quad \omega_3 = -\omega_{2m},\cdots\quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2}\,,$

IV) $\omega_1 = 0,\quad \omega_2 = K+iK',\quad \omega_3 = -\omega_{2m},\cdots\quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2}\,.$

Zu gleicher Zeit folgt, dass in allen vier Fällen $\lambda = 0$ ist, so dass sich die Discussion lediglich auf dieses Gleichungssystem beschränken kann. Diese Discussion kann ähnlich geführt werden, wie diejenige der Picard'schen Differentialgleichung in einer früheren Arbeit[1]).

Das allgemeine Gleichungssystem lautet:

$$(1)\qquad 0 = {\sum_l}' \frac{u_r + u_l}{x_r - x_l}\,.$$

Wenden wir uns nun zu der Betrachtung des ersten Falles, so wird ein Glied existiren, bei welchem

$$u_r = -u_l\,,\qquad x_r = x_l$$

ist. An Stelle desselben tritt das Glied:

$$\frac{1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2\cdot x_r^2}{2u_r}\,.$$

Das ganze System von Gleichungen nimmt die Form an:

$$(2)\qquad 0 = \frac{1-2(1+k^2)\,x_r + 3k^2\cdot x_r^2}{2} + 2{\sum_l}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}\,.$$

---

1) Diese Berichte, 3. März 1890.

Der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe nach l über $1, 2, \cdots m$ zu nehmen ist und zwar mit Ausnahme von $l = r$. An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \cdots m$.

Wir erhalten also ein System von m Gleichungen, welches die Werthe x_r in der folgenden Weise liefert. Dieselben mögen der Gleichung Genüge leisten:

$$(3) \qquad f(x) = x^m + p_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + p_m = 0 .$$

Unter dieser Voraussetzung kann das obige Gleichungssystem geschrieben werden:

$$(4) \qquad \begin{cases} f'(x_r)(1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2) + \\ + 2f''(x_r)\, x_r (1 - (1 + k^2)x_r + k^2 \cdot x_r^2) = 0 , \end{cases}$$

wobei dann ist:

$$f'(x_r) = m \cdot x_r^{m-1} + (m - 1)p_1\, x_r^{m-2} + \cdots + p_{m-1} \cdot$$
$$f''(x_r) = m \cdot m - 1 \cdot x_r^{m-2} + \cdots \qquad + 2p_{m-2} \cdot$$

Wir erhalten also eine Gleichung vom Grade $m + 1$ mit der Unbekannten x_r, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Grössen x_r sind. Der Factor von x_r^{m+1} lautet:

$$k^2 \cdot m(2m + 1) ,$$

der Factor von x_r^l allgemein:

$$A \cdot p_{m-l+1} + B \cdot p_{m-l} + C \cdot p_{m-l-1} ,$$

wobei gesetzt ist:

$$A = k^2(l - 1)(2l - 1) ,$$
$$B = - 2(1 + k^2)l^2 ,$$
$$C = (l + 1)(2l + 1) .$$

Nun ist aber:

$$k^2 \cdot m(2m + 1)x_r^{m+1} =$$
$$= - k^2 \cdot m(2m + 1)(p_1 \cdot x_r^m + p_2 \cdot x_r^{m-1} + \cdots + p_m \cdot x_r) .$$

Denken wir uns diesen Ausdruck eingesetzt, so nimmt der Factor von x_r^l die Form an:

$$A_1 \cdot p_{m-l+1} + B \cdot p_{m-l} + C \cdot p_{m-l-1} ,$$

wobei gesetzt ist:

$$A_1 = A - k^2 m(2m + 1) .$$

Der Factor von x_r^m insbesondere nimmt die Form an:

$$k^2 \cdot p_1((2m-1)(m-1) - m(2m+1)) - 2(1+k^2)m^2 \cdot$$

Denken wir uns durch diesen Factor die Gleichung dividirt, so erhalten wir eine Gleichung, deren Coefficienten mit denen der Gleichung:

$$x^m + p_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + p_m = 0$$

zusammenfallen müssen.

Die Vergleichung ergiebt die Formeln:

$$(5)\quad p_{m-l} = \frac{A_1 \cdot p_{m-l+1} + B \cdot p_{m-l} + C \cdot p_{m-l-1}}{k^2 p_1((2m-1)(m-1) - m(2m+1)) - 2(1+k^2)m^2} .$$

Aus diesen Gleichungen sind der Reihe nach die Grössen p_2, p_3, $\cdots p_m$ bestimmt und zwar als ganze Functionen von p_1 von den resp. Graden $2, 3, \cdots m$. Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein:

$$p_m = \frac{p_{m-1}}{k^2 p_1((2m-1)(m-1) - m(2m+1)) - 2(1+k^2)m^2},$$

so ergiebt sich eine Gleichung vom Grade $m+1$ mit der Unbekannten p_1. Wir finden also den

Lehrsatz. *Das Gleichungssystem* (4) *ist auflösbar, und zwar leisten die Grössen x_r einer Gleichung m^{ten} Grades Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich ganz und rational durch eine Lösung einer Gleichung vom Grade $m+1$ darstellen lassen.*

Damit sind die Grössen x_r bestimmt. Es hat nun keine Schwierigkeit das zweite Integral aufzustellen. Dasselbe lautet:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_m)^2} .$$

Entwickeln wir den Ausdruck

$$\frac{1}{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_m)^2} = \frac{1}{f(x)^2}$$

nach Potenzen von $w - \omega_r$, so fällt vermöge unserer Bedingungsgleichungen der Factor von

$$\frac{1}{w - \omega_r}$$

fort und umgekehrt zieht das Fortfallen des Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich. In der That, es ist:

$$f(x) = (w - \omega_r)\left(\frac{df(x)}{dw}\right)_{\omega_r} + \frac{(w-\omega_r)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2f(x)}{dw^2}\right)_{\omega_r} + \cdots .$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{df(x)}{dw}\right)_{\omega_r} = 2f'(x_r)\,\mathrm{sn}\,\omega_r\cdot\mathrm{cn}\,\omega_r\cdot\mathrm{dn}\,\omega_r$$

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dw^2}\right)_{\omega_r} = 4f''(x_r)\,\mathrm{sn}^2\omega_r\cdot\mathrm{cn}^2\omega_r\cdot\mathrm{dn}^2\omega_r + $$

$$+ 2f'(x_r)(1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2\cdot x_r^2) .$$

Als hinreichende und nothwendige Bedingung für das Verschwinden des genannten Factors ergiebt sich aber die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dw^2}\right)_{\omega_r} = 0$$

und das ist genau die früher gefundene.

Unter solchen Umständen können wir den Ansatz machen:

$$\frac{1}{f(x)^2} = e_0 + \sum e_r\cdot\frac{d^2\log Al_1(w-\omega_r)}{dw^2} + \sum e_r'\cdot\frac{d^2\log Al_1(w+\omega_r)}{dw^2} .$$

Dabei ist:

$$e_r = e_r' = -\frac{1}{4f'(x_r)^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega_r\cdot\mathrm{cn}^2\omega_r\cdot\mathrm{dn}^2\omega_r},$$

und ebenso einfach ist e_0 bestimmt.

In ähnlicher Weise sind die drei anderen Fälle zu betrachten. Da principiell nichts Neues auftritt, so wollen wir uns bei ihnen kürzer fassen.

Im zweiten Fall hat das erste Integral die Form:

(6) $y_1 = \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2\omega_3)\cdots(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2\omega_{m+1})$.

Dann fallen von den allgemeinen Gleichungen:

$$0 = \sum\frac{u_r + u_l}{x_r - x_l}$$

zwei fort, nämlich diejenigen, die sich auf $\omega = 0$ und $\omega = K$ beziehen. Es bleiben nur $m - 1$ Gleichungen, die die Form haben:

$$0 = \frac{1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} +$$

$$+ 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r} + \frac{u_r^2}{x_{r-1}},$$

wobei für r zu setzen ist $3, 4, \cdots m+1$, die Summe nach l über dieselben Zahlen mit Ausschluss von $l = r$ zu erstrecken ist.

Das Gleichungssystem kann geschrieben werden:

$$0 = \frac{1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} +$$

$$+ 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + 1 - (1+k^2)x_r + k^2 \cdot x_r^2 - x_r(1 + k^2 x_r),$$

oder auch

$$(7) \quad 0 = \frac{3 - 2(3 + 2k^2)x_r + 7k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit haben wir ein ähnliches Gleichungssystem wie vorhin erhalten, welches genau so wie das vorige behandelt werden kann. Wir sehen hiervon ab.

Im dritten Falle hat das erste Integral die Form:

(8) $y_1 = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_3) \cdots (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_{m+1})$.

Dann fallen von den allgemeinen Gleichungen wiederum zwei fort, nämlich diejenigen, welche sich auf $\omega = K$ und $\omega = iK' + K$ beziehen und es bleibt das System übrig:

$$0 = \frac{1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} +$$

$$+ 2\sum\nolimits' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r - 1} + \frac{u_r^2}{x_r - \frac{1}{k^2}}$$

oder also;

$$(9) \quad 0 = \frac{1 - 4(1+k^2)x_r + 7k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum\nolimits' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wieder am Ziele.

Viertens endlich kann das erste Integral die Form haben:

(10) $y_1 = \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{dn} w (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_3) \cdots (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_{m+1})$.

Von dem allgemeinen Gleichungssystem fallen zwei Gleichungen

fort, nämlich diejenigen, die sich auf $\omega = 0$ und $\omega = iK' + K$ beziehen.

Das übrig bleibende System lautet:

$$0 = \frac{1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r} + \frac{u_r^2}{x_r - \frac{1}{k^2}},$$

oder also:

$$(11) \quad 0 = \frac{3 - 2(2 + 3k^2)x_r + 7k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wieder am Ziele. In allen drei Fällen ergiebt sich das Resultat, dass *die Grössen $x_2, x_4 \cdots x_{m+1}$ Wurzeln einer Gleichung vom Grade $m - 1$ sind, deren Coefficienten sich ganz und rational durch eine Wurzel einer Gleichung vom Grade m darstellen lassen.*

Auf die Bestimmung des zweiten Integrals braucht der Einfachheit wegen gar nicht eingegangen zu werden, ferner ist der Werth von c_1 in allen vier Fällen gleich $n \cdot n + 1$, während der Werth von c_0 sich in der bekannten Weise ergiebt.

Wir nehmen jetzt den Fall:

$$\text{(B)} \qquad n = 2m + 1.$$

Es fragt sich, wann die beiden Ausdrücke:

$$\vartheta_1(v + \nu_1) \cdots \vartheta_1(v + \nu_{2m+1}) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v - \nu_1) \cdots \vartheta_1(v - \nu_{2m+1})$$

dieselben Nullpunkte haben, wobei die Grössen ν alle von einander verschieden sind.

Es folgt leicht, dass auch hier vier Fälle möglich sind und zwar die folgenden:

I) $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\omega_{2m+1}, \cdots \quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2},$

II) $\omega_1 = K, \quad \omega_2 = -\omega_{2m+1}, \cdots \quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2},$

III) $\omega_1 = K + iK', \quad \omega_2 = -\omega_{2m+1}, \quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2},$

IV) $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = K, \quad \omega_3 = K + iK',$

$\qquad \omega_4 = -\omega_{2m+1}, \cdots \quad \omega_{m+1} = -\omega_{m+2}.$

Im Princip bleiben die Betrachtungen genau so wie vorhin.

Im ersten Falle hat das erste Integral die Form:

$$(12) \quad y_1 = \operatorname{sn} w(\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_2) \cdots (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_{m+1}).$$

Eine Gleichung fällt von den allgemeinen fort, die übrigen haben die Form:

$$\frac{1-2(1+k^2)x_r+3k^2\cdot x_r^2}{2}+2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r-x_l}+$$
$$+1-(1+k^2)\cdot x_r+k^2\cdot x_r^2=0$$

oder also

$$\frac{3-4(1+k^2)x_r+5k^2\cdot x_r^2}{2}+2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r-x_l}=0\,. \tag{13}$$

Dieses Gleichungssystem kann genau so wie das erste behandelt werden. Es ist auflösbar und zwar *leisten die Grössen* x_2, $x_3 \cdots x_{m+1}$ *einer Gleichung vom Grade m Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich ganz und rational durch eine Lösung einer Gleichung vom Grade m + 1 darstellen lassen.*

Das zweite Integral hat die Form:

$$y_2=y_1\int\frac{dw}{\mathrm{sn}^2 w\,(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\omega_2)^2\cdots(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\omega_{m+1})^2}\,.$$

Entwickeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 w\,(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\omega_2)^2\cdots(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\omega_{m+1})}=\frac{1}{x\cdot f(x)^2}$$

nach Potenzen von $w-\omega_r$, so fällt vermöge unserer Bedingungsgleichungen der Factor von

$$\frac{1}{w-\omega_r}$$

fort und umgekehrt zieht das Fortfallen des Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich. In der That, es ist:

$$\mathrm{sn}\,w\cdot f(x)=$$
$$(w-\omega_r)\left(\frac{d\,\mathrm{sn}\,w\cdot f(x)}{dw}\right)_{\omega_r}+\frac{(w-\omega_r)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{sn}\,w\cdot f(x)}{dw^2}\right)_{\omega_r}+\cdots$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{d\,\mathrm{sn}\,w\cdot f(x)}{dw}\right)_{\omega_r}=2f'(x_r)\,\mathrm{sn}^2\omega_r\cdot\mathrm{cn}\,\omega_r\cdot\mathrm{dn}\,\omega_r\,,$$

$$\left(\frac{d^2\,\mathrm{sn}\,w\cdot f(x)}{dw^2}\right)_{\omega_r}=2\,\mathrm{sn}\,\omega_r(2f''(x_r)\,\mathrm{sn}^2\omega_r\cdot\mathrm{cn}^2\omega_r\cdot\mathrm{dn}^2\omega_r+$$
$$+f'(x_r)\,(3-4\,(1+k^2)\,x_r+5k^2\cdot x_r^2)\,.$$

Die Bedingungsgleichungen für das Verschwinden des genannten Factors lauten demgemäss:

$$f'(x_r)(3 - 4(1 + k^2)x_r + 5k^2 \cdot x_r^2) \\ + 2x_r \cdot f''(x_r)(1 - (1 + k^2)x_r + k^2 \cdot x_r^2) = 0\,,$$

und das sind genau die früheren Gleichungen.

Unter solchen Umständen können wir schreiben:

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 w \cdot f(x)^2} = e_0 + e_1 \frac{d^2 \log Al_1(w)}{dw^2} + \sum_2^{m+1} e_r \cdot \frac{d^2 \log Al_1(w - \omega_r)}{dw^2} \\ + \sum_2^{m+1} e_r' \cdot \frac{d^2 \log Al_1(w + \omega_r)}{dw^2}$$

Dabei ist:

$$e_1 = -\frac{1}{f(0)^2}\,,$$

$$e_r = e_r' = -\frac{1}{4x_r^2 \cdot f'(x_r)^2 \cdot \mathrm{cn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^2 \omega_r)}\,,$$

und ebenso einfach kann e_0 berechnet werden.

Im zweiten Falle wird:

(14) $$y_1 = \mathrm{cn}\, w\, (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_2) \cdots (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_{m+1})\,.$$

Eine Gleichung fällt fort und es bleibt das System:

$$0 = \frac{1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} - x_r(1 - k^2 x_r)$$

oder also:

(15) $$0 = \frac{1 - 2(2 + k^2)x_r + 5k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}\,.$$

Drittens wird:

(16) $$y_1 = \mathrm{dn}\, w (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_2) \cdots (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_{m+1})\,.$$

Das übrigbleibende Gleichungssystem lautet:

$$0 = \frac{1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} - k^2(x_r - x_r^2)$$

oder also:

(17) $$\frac{1 - 2(1 + 2k^2)x_r + 5k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} = 0\,.$$

Viertens endlich kann sein:

(18) $y_1 = \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_3) \cdots (\operatorname{sn}^2 \omega - \operatorname{sn}^2 \omega_{m+1})$,

Hier fallen drei Gleichungen fort. Das übrigbleibende Gleichungssystem lautet:

$$0 = \frac{1 - 2(1 + k^2) x_r + 3k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} +$$
$$+ 1 - 2(1 + k^2) x_r + 3k^2 \cdot x_r^2)$$

oder also:

(19) $$0 = \frac{3 - 6(1 + k^2) x_r + 9k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Weiter braucht auf diese Fälle nicht eingegangen zu werden, so dass der Fall des ungeraden n jetzt auch als erledigt angesehen werden kann.

§ 5.

Discussion des Ausnahmefalles für die Picard'sche Differentialgleichung.

Die Picard'sche Differentialgleichung lautet:

(1) $$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} + (n + 1) k^2 \frac{\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w} \frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w) \cdot c_0 .$$

Bei derselben sind die Fälle zu unterscheiden, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Beide Fälle sind in der Arbeit des Verfassers, welche sich in diesen Berichten vom 3. März 1890 findet, behandelt worden. Aus den dortigen Untersuchungen geht hervor, dass nur der Fall des ungeraden n zu Ausnahmebetrachtungen Anlass geben kann.

In diesem Falle, indem wir uns $n = 2m + 1$ gesetzt denken, hat ein Integral die Form:

$$\frac{\vartheta_1(v + \nu_1) \cdots \vartheta_1(v + \nu_n)}{\vartheta_0(v)^n} e^{\lambda w},$$

während das andere durch Verwandlung von v in $-v$ entsteht. Zunächst folgt, dass auch hier die Grössen $\omega_1 \cdots \omega_n$ von einander verschieden sein müssen. Eines besonderen Beweises

bedarf diese Eigenschaft nur für $\omega = K + iK'$. Wir beweisen, dass das Integral nicht die Form haben kann:

$$\varphi(w) = \mathrm{dn}^r w \cdot \varphi_1(w) \ .$$

In der That, wäre dasselbe der Fall, so müsste die Gleichung stattfinden:

$$\mathrm{dn}\,w \cdot \frac{d^2 \mathrm{dn}^r w \cdot \varphi_1(w)}{dw^2} + 2(m+1)k^2 \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w \cdot \frac{d\,\mathrm{dn}^r w \cdot \varphi_1(w)}{dw} =$$
$$= \mathrm{dn}^{r+1} w \cdot \varphi_1(w)\, c_0 \ .$$

Differentiiren wir rechts und links $r - 1$ mal und setzen nach der Differentiation

$$w = K + iK' \ ,$$

so ergiebt sich die Beziehung:

$$r - 1 = 2(m+1) \quad \text{d. h.} \quad r = n + 3 \ .$$

Das aber geht nicht, da r ja kleiner als n sein muss. Der Satz bleibt auch richtig für $r = 1$, so dass sich also hier ein Unterschied zur Lamé'schen Gleichung zeigt. Das Integral kann keinen Factor $\mathrm{dn}\,w$ besitzen. Im Uebrigen bleiben die Betrachtungen ähnlich wie früher. Wir nehmen zunächst den Fall $n = 1$. Dann fragt sich wann

$$\vartheta_1(v + \nu_1) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v - \nu_1)$$

unter den angegebenen Bedingungen zu gleicher Zeit der Null gleich werden können. Es geschieht das, wenn

1) $$\omega = 0$$

oder also:

(2) $$y_1 = \mathrm{sn}\,w$$

ist. Die Differentialgleichung nimmt die Form an:

(3) $$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + 2k^2 \cdot \frac{\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w} \frac{d\varphi(w)}{dw} = -k_1^2 \cdot \varphi(w) \ .$$

Das zweite Integral hat die Form:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-2k^2\int \frac{\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w} dw} \cdot dw}{\mathrm{sn}^2 w}$$

oder also, da:

$$-2k^2\int\frac{\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}\,dw=\log\operatorname{dn}^2 w$$

ist,

$$(4)\qquad y_2=y_1\int\frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w}\,dw=y_1\int\frac{dw}{\operatorname{sn}^2 w}-k^2\cdot w\cdot y_1\,.$$

Damit ist dieser Fall erledigt. Es kann

$$(\text{II})\qquad \omega=K\quad\text{d. h.}\quad y_1=\operatorname{cn} w$$

sein. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(5)\qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}+2k^2\frac{\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}\frac{d\varphi(w)}{dw}=-\varphi(w)\,.$$

Das zweite Integral nimmt die Form an:

$$(6)\quad y_2=y_1\int\frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w}\,dw=y_1(1-k^2)\int\frac{dw}{\operatorname{cn}^2 w}+k^2\cdot y_1\cdot w\,.$$

Im allgemeinen Falle sind nun auch zwei Möglichkeiten vorhanden:

$$\text{I)}\qquad \omega_1=0\,,\quad \omega_2=-\omega_n\cdots\quad \omega_{m+1}=-\omega_{m+2}\,,$$

$$\text{II)}\qquad \omega_1=K,\quad \omega_2=-\omega_n\cdots\quad \omega_{m+1}=-\omega_{m+2}\,,$$

Im ersten Falle wird:

$$(7)\quad y_1=\operatorname{sn} w(\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2\omega_2)\cdots(\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2\omega_{m+1})\,.$$

Im allgemeinen Falle lauten die Bestimmungsgleichungen für die Grössen x_r:

$$(8)\qquad \frac{(m+1)u_r\cdot k^2}{1-k^2x_r}=\sum\nolimits_l'\frac{u_r+u_l}{x_l-x_r}\,.$$

In unserem Falle fällt eine der Gleichungen fort, die übrigen nehmen die Form an:

$$-\frac{(m+1)u_r^2\cdot k^2}{1-k^2\cdot x_r}=$$

$$=\frac{1-2(1+k^2)x_r+3k^2\cdot x_r^2}{2}+2\sum\nolimits_l'\frac{u_r^2}{x_r-x_l}+\frac{u_r^2}{x_r}$$

oder:

$$0=\frac{1-2x_r(1+k^2m)-k^2\cdot x_r^2(2m-1)}{2}+2\sum\nolimits'\frac{u_r^2}{x_r-x_l}+$$

$$+1-(1+k^2)x_r+k^2\cdot x_r^2$$

oder:

$$(9)\quad 0=\frac{3-2x_r(2-(m-1)k^2)-k^2\cdot x_r^2(2m-3)}{2}+2\sum{}'\frac{u_r^2}{x_r-x_l}\,.$$

Damit sind wir wieder zu einem Gleichungssystem von bekannter Form gelangt und können die Untersuchung abbrechen.

Das zweite Integral wird:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-(n+1)k^2\int\frac{\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}w}dw}\,dw}{y_1^2}\,.$$

Nun ist:

$$-(n+1)k^2\int\frac{\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}w}dw=\log\operatorname{dn}^{n+1}w\,,$$

also folgt:

$$(10)\quad y_2=y_1\int\frac{\operatorname{dn}^{n+1}w\cdot dw}{\operatorname{sn}^2w\cdot(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\omega_2)^2\cdots(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\omega_{m+1})^2}\,.$$

Entwickeln wir den Ausdruck:

$$\frac{\operatorname{dn}^{n+1}w}{\operatorname{sn}^2w\,(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\omega_2)^2\cdots(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\omega_{m+1})^2}=\frac{\operatorname{dn}^{n+1}w}{\operatorname{sn}^2w\cdot f(x)^2}$$

nach Potenzen von $w-\omega_r$, so fällt vermöge unserer Bedingungsgleichungen der Factor von:

$$\frac{1}{w-\omega_r}$$

fort, und umgekehrt zieht das Fortfallen des Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich. In der That, wir können setzen:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2w\cdot f(x)^2}=\frac{A_{-2}}{(w-\omega_r)^2}+\frac{A_{-1}}{w-\omega_r}+\cdots,$$

$$\operatorname{dn}^{n+1}w=$$

$$=\operatorname{dn}^{n+1}\omega_r-(w-\omega_r)(n+1)k^2\cdot\operatorname{sn}\omega_r\cdot\operatorname{cn}\omega_r\cdot\operatorname{dn}^n\omega_r+\cdots.$$

Also folgt als Bedingung für das Verschwinden des Coefficienten von $(w-\omega_r)^{-1}$:

$$-\frac{A_{-2}(n+1)k^2\cdot\operatorname{sn}\omega_r\cdot\operatorname{cn}\omega_r}{\operatorname{dn}\omega_r}+A_{-1}=0\,,$$

oder wenn wir erwägen, dass A_{-2} und A_{-1} die Werthe besitzen:

$$A_{-2} = \frac{1}{4 f'(x_r)^2 \cdot x_r^2 \cdot \mathrm{cn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^2 \omega_r},$$

$$A_{-1} = -\frac{2 f''(x_r) x_r \cdot \mathrm{cn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^2 \omega_r + f'(x_r)(3 - 4(1+k^2) x_r + 5 k^2 \cdot x_r^2)}{4 f'(x_r)^3 \mathrm{sn}^5 \omega_r \cdot \mathrm{cn}^3 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^3 \omega_r},$$

die Gleichung:

$$\frac{f'(x_r) k^2 \cdot (n+1) u_r^2}{\mathrm{dn}^2 \omega_r} + 2 f''(x_r) \mathrm{sn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{cn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^2 \omega_r + $$
$$+ f'(x_r)(3 - 4(1+k)^2 x_r + 5 k^2 \cdot x_r^2).$$

Das ist aber genau unsere frühere Gleichung, so dass der Beweis geliefert ist.

Unter solchen Umständen können wir den Ansatz machen:

$$\frac{\mathrm{dn}^{n+1} w}{x \cdot f(x)^2} = e_0 + e_1 \frac{d^2 \log Al_1(w)}{dw^2} + \sum_2^{m+1} {}^r e_r \frac{d^2 \log Al_1(w + \omega_r)}{dw^2} +$$
$$+ \sum_2^{m+1} {}^r e_r' \frac{d^2 \log Al_1(w - \omega_r)}{dw^2}.$$

Dabei ist dann:

$$e_1 = -\frac{1}{f(0)^2},$$

$$e_r = e_r' = -\frac{\mathrm{dn}^{n+1} \omega_r}{4 x_r^2 \cdot f'(x_r)^2 \cdot \mathrm{cn}^2 \omega_r \cdot \mathrm{dn}^2 \omega_r}$$

und ebenso einfach kann e_0 berechnet werden.

Damit sind wir am Ziele.

Im zweiten und letzten Falle nun wird:

(11) $\quad y_1 = \mathrm{cn}\, w (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_2) \cdots (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega_{m+1}).$

Die Grössen x_r sind aus dem Gleichungssysteme bestimmt:

$$-\frac{k^2(m+1) u_r^2}{1 - k^2 \cdot x_r} =$$

$$= \frac{1 - 2(1+k^2) x_r + 3 k^2 \cdot x_r^2}{2} + 2 \sum\nolimits^l \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r - 1}$$

oder also:

(12) $$0 = \frac{1 - 2 x_r (2 - k^2 m) - x_r^2 \cdot k^2 (2m - 3)}{2} + 2 \sum\nolimits' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wiederum zu einem bekannten Gleichungssysteme gekommen und können abbrechen.

Friedrich Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie.*

VI. Nochmals die kanonische Form der Parametergruppe.

In meiner früheren Mittheilung über diesen Gegenstand (diese Berichte 1891, S. 308 ff.) kam es mir darauf an, die Schursche Darstellung für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe in möglichst einfacher Weise abzuleiten, und zugleich nachzuweisen, dass sie mit der Darstellung übereinstimmt, die Lie gegeben hat. Die Aufgabe, die ich gegenwärtig erledigen will, ist etwas specieller.

Nach Schur sind die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Da die betreffenden Quotienten alle denselben Nenner haben, so ist es offenbar wünschenswerth, die Nullstellen ihres gemeinsamen Nenners angeben zu können. Ich werde diese Nullstellen dadurch bestimmen, dass ich den bewussten Nenner in ein beständig convergentes unendliches Product entwickle, dessen Factoren lauter ganze rationale Functionen sind. Die Methode, deren ich mich dabei bediene, besteht in der Verbindung gewisser Schurscher Betrachtungen mit dem Multiplicationssatze der Determinanten.

Zuvörderst stelle ich die Formeln zusammen, die für das Folgende nöthig sind.

Ist $c_{i\varkappa s}$ die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe, so findet man die infinitesimalen Transformationen der zugehörigen kanonischen Parametergruppe folgendermassen: Man bestimmt

1) V in diesen Berichten 1891, S. 585 ff.

r^2 Functionen $\Psi_{s\varkappa}$ von $u_1 \cdots u_r$ und t, die den Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial \Psi_{s\varkappa}}{\partial t} = \varepsilon_{s\varkappa} + \sum_{\tau j}^{1\dots r} c_{j\tau s} u_\tau \Psi_{j\varkappa} \qquad (s, \varkappa = 1 \cdots r)$$

und den Anfangsbedingungen:

$$(2) \qquad [\Psi_{s\varkappa}]_{t=0} = 0 \quad (s, \varkappa = 1 \cdots r)$$

genügen; setzt man dann:

$$(3) \qquad [\Psi_{s\varkappa}]_{t=1} = \psi_{s\varkappa}(u_1 \cdots u_r) \quad (s, \varkappa = 1 \cdots r)$$

und berechnet man die r^2 Functionen $\alpha_{sj}(u_1 \cdots u_r)$ aus den Gleichungen:

$$(4) \qquad \sum_{1}^{r} {}_s \psi_{s\varkappa} \alpha_{sj} = \varepsilon_{\varkappa j} \quad (\varkappa, j = 1 \cdots r),$$

so stehen die r Ausdrücke:

$$A_\varkappa f = \sum_{1}^{r} {}_j \alpha_{\varkappa j}(u_1 \cdots u_r) \frac{\partial f}{\partial u_j} \quad (\varkappa = 1 \cdots r)$$

in den Beziehungen:

$$(A_i A_\varkappa) = \sum_{1}^{r} {}_s c_{i\varkappa s} A_s f \quad (i, \varkappa = 1 \cdots r)$$

und sind r unabhängige infinitesimale Transformationen der kanonischen Parametergruppe von der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$[1]).

Die Functionen $\psi_{s\varkappa}$ haben, wie man sich leicht überzeugen kann, die schon früher[2]) von Schur angegebene Form:

$$(5) \qquad \psi_{s\varkappa} = \sum_{0}^{\infty} {}_\nu \frac{1}{(\nu + 1)!} U_{s\varkappa}^{(\nu)} \quad (s, \varkappa = 1 \cdots r),$$

wo die $U_{s\varkappa}^{(\nu)}$ ganze homogene Functionen von $u_1 \cdots u_r$ sind, die aus den Gleichungen:

---

1) s. Lie, diese Berichte 1890, S. 478 ff. und Engel, ebenda 1891, S. 308 ff.

2) s. Schur, ebd. 1890, S. 1 ff. u. Math. Ann. Bd. 38, S. 263 ff. (1891).

$$(6)\quad \begin{cases} U_{s\varkappa}^{(0)} = \varepsilon_{s\varkappa} \\ U_{s\varkappa}^{(1)} = \sum_{\tau}^{1\ldots r} c_{\varkappa\tau s} u_\tau \\ U_{s\varkappa}^{(n+1)} = \sum_{\tau_1\cdots\tau_n}^{1\ldots r} U_{s\tau_1}^{(1)} U_{\tau_1\tau_2}^{(1)} \cdots U_{\tau_{n-1}\tau_n}^{(1)} U_{\tau_n\varkappa}^{(1)} \\ (s, \varkappa = 1 \cdots r) \end{cases}$$

berechnet werden können. Demnach sind die $\psi_{s\varkappa}$ beständig convergente Potenzreihen und die $A_\varkappa f$ werden Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Der gemeinsame Nenner der betreffenden Quotienten ist die Determinante:

$$(7)\qquad \Delta = |\ \psi_{s\varkappa}\ | = \left| \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)!} U_{s\varkappa}^{(\nu)} \right| .$$

Diese Determinante wollen wir jetzt in ein beständig convergentes unendliches Product von lauter ganzen rationalen Functionen der u entwickeln.

Aus den Definitionsgleichungen (6) der $U_{s\varkappa}^{(\nu)}$ folgt, wie Schur bemerkt hat:

$$(8)\qquad \sum_1^r{}_j U_{sj}^{(\mu)} U_{j\varkappa}^{(\nu)} = U_{s\varkappa}^{(\mu+\nu)} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

ferner stimmt augenscheinlich der Coefficient von $U_{s\varkappa}^{(\nu)}$ in der Reihenentwickelung von $\psi_{s\varkappa}$ mit dem Coefficienten von x^ν in der Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{(\nu+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

überein. Diese beiden Umstände hat bereits Schur mit Erfolg verwerthet; in Verbindung mit dem Multiplicationssatze der Determinanten werden sie uns auch zu der Productzerlegung der Determinante Δ führen.

Bevor wir die Determinante Δ selbst behandeln, schalten wir einige allgemeine Bemerkungen über das Rechnen mit derartigen Determinanten ein.

Wenn die Reihe: $a_0 + a_1 x + \cdots$ beständig convergent ist, so gilt dasselbe offenbar zugleich von der Reihe:

$$a_0 U_{s\varkappa}^{(0)} + a_1 U_{s\varkappa}^{(1)} + \cdots$$

und also auch von der Determinante:

$$\left| \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu U_{s\varkappa}^{(\nu)} \right| .$$

Es sei nun $b_0 + b_1 x + \cdots$ eine zweite beständig convergente Potenzreihe und es gelte die Gleichung:

$$(9) \qquad \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu x^\mu \cdot \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}^\varrho c_\varrho x^\varrho ,$$

wo die Potenzreihe rechts natürlich auch beständig convergirt. Unter diesen Voraussetzungen bekommen wir nach dem Multiplicationssatze der Determinanten und mit Berücksichtigung von (8):

$$(10) \qquad \begin{cases} \left| \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu U_{s\varkappa}^{(\mu)} \right| \cdot \left| \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu U_{s\varkappa}^{(\nu)} \right| = \\ = \left| \sum_{\mu\nu}^{0\ldots\infty} a_\mu b_\nu \sum_1^r {}^j U_{sj}^{(\mu)} U_{j\varkappa}^{(\nu)} \right| = \\ = \left| \sum_{\mu\nu}^{0\ldots\infty} a_\mu b_\nu U_{s\varkappa}^{(\mu+\nu)} \right| = \\ = \left| \sum_0^\infty {}^\varrho c_\varrho U_{s\varkappa}^{(\varrho)} \right| . \end{cases}$$

Das ist die erste Bemerkung, die wir machen wollten.

Wenn die Reihe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots$ unbedingt convergirt, so ist bekanntlich das unendliche Product:

$$(1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x) \cdots$$

unbeschränkt convergent und in eine beständig convergente Potenzreihe entwickelbar:

$$(11) \qquad \prod_1^\infty {}^\nu (1 + \alpha_\nu x) = 1 + \sum_1^\infty {}^\nu \beta_\nu x^\nu .$$

Zu gleicher Zeit ist aber auch das unendliche Determinantenproduct:

$$(12) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}^{\mu} \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \alpha_\mu U_{s\varkappa}^{(\tau)} \right|$$

unbeschränkt convergent und gleich der Determinante:

$$(13) \qquad \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \beta_\nu U_{s\varkappa}^{(\tau\nu)} \right| ,$$

die ihrerseits in eine beständig convergente Potenzreihe entwickelbar ist. Unter τ wird dabei eine beliebige endliche positive ganze Zahl > 0 verstanden.

In der That, die Determinante:

$$\left| \varepsilon_{s\varkappa} + \alpha_\mu U_{s\varkappa}^{(\tau)} \right|$$

hat die Form:

$$1 + \alpha_\mu g_\tau(u) + \alpha_\mu^2 g_{2\tau}(u) + \cdots + \alpha_\mu^r g_{r\tau}(u) ,$$

wo $g_\tau, g_{2\tau} \cdots g_{r\tau}$ ganze homogene Functionen von $u_1 \cdots u_r$ sind, deren Grade bezüglich die Werthe $\tau, 2\tau, \cdots, r\tau$ haben. Das unendliche Product (12) convergirt daher für alle Werthe von $u_1 \cdots u_r$, für die die Reihe:

$$(14) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} (\alpha_\mu g_\tau + \alpha_\mu^2 g_{2\tau} + \cdots + \alpha_\mu^r g_{r\tau})$$

unbedingt convergirt. Nun aber convergiren die Reihen

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \alpha_\mu , \quad \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \alpha_\mu^2 , \quad \cdots \quad \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \alpha_\mu^r$$

unter den gemachten Voraussetzungen sämmtlich unbedingt, folglich ist der Ausdruck (14) eine ganze rationale Function τr^{ten} Grades von $u_1 \cdots u_r$ mit lauter endlichen Zahlencoefficienten, unser Product (12) ist daher unbeschränkt convergent. Dass andrerseits das Product (12) gleich der Determinante (13) ist, erkennt man sofort, wenn man die Determinante betrachtet, durch die das Determinantenproduct:

$$(15) \qquad \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \alpha_\mu U_{s\varkappa}^{(\tau)} \right| \cdot \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \alpha_\nu U_{s\varkappa}^{(\tau)} \right|$$

darstellbar ist. Dieses Product ist nämlich gleich der Determinante:

$$\left| \sum_{1}^{r}{}^{j} (\varepsilon_{sj} + \alpha_\mu U_{sj}^{(\tau)}) (\varepsilon_{j\varkappa} + \alpha_\nu U_{j\varkappa}^{(\tau)}) \right| ,$$

die wegen der Eigenschaften der $\varepsilon_{s\varkappa}$ und wegen der Gleichungen (8) die einfachere Form:

$$(16)\qquad \left| \varepsilon_{s\varkappa} + (\alpha_\mu + \alpha_\nu) U_{s\varkappa}^{(\tau)} + \alpha_\mu \alpha_\nu U_{s\varkappa}^{(2\tau)} \right|$$

annimmt. Da nun unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\lim_{m=\infty} \prod_1^m {}^{\mu} (1 + \alpha_\mu x) = 1 + \sum_1^\infty {}^{\nu} \beta_\nu x^\nu$$

ist, so ist der Gränzwerth des Productes:

$$\prod_1^m {}^{\mu} \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \alpha_\mu U_{s\varkappa}^{(\tau)} \right|$$

für $m = \infty$ kein anderer als die Determinante (13).

Dies die zweite der angekündigten allgemeinen Bemerkungen.

Nunmehr wenden wir uns zur Untersuchung der Determinante:

$$\varDelta = \left| \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{(\nu + 1)!} U_{sx}^{(\nu)} \right|.$$

Es ist augenscheinlich:

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{2 \cdot \frac{x}{2}}$$

also:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{x^\nu}{(\nu + 1)!} = \sum_0^\infty {}^{\mu} \frac{x^\mu}{2^\mu \mu!} \cdot \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{2 \cdot x^{2\nu}}{2^{2\nu+1}(2\nu + 1)!},$$

wo die beiden Reihen auf der rechten Seite beständig convergiren; auf Grund unserer ersten allgemeinen Bemerkung können wir daher $\varDelta$ in ein Product zweier Determinanten zerlegen:

$$(17)\quad \varDelta = \left| \sum_0^\infty {}^{\mu} \frac{1}{2^\mu \mu!} U_{sx}^{(\mu)} \right| \cdot \left| \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{2}{2^{2\nu+1}(2\nu + 1)!} U_{s\varkappa}^{(2\nu)} \right|$$

und zwar convergiren beide Determinanten unbeschränkt.

Es ist ferner:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \sum_0^\infty \frac{2 \cdot x^{2\nu}}{2^{2\nu+1}(2\nu + 1)!} = \prod_1^\infty {}^{\mu} \left(1 + \frac{x^2}{4\mu^2\pi^2}\right),$$

wie aus der bekannten Productzerlegung von $\sin x$ hervorgeht. Demnach zeigt unsere zweite Bemerkung, dass der eine Factor von Δ in ein beständig convergentes Product entwickelt werden kann:

$$(18)\quad \left|\sum_0^\infty{}_\nu \frac{2}{2^{2\nu+1}(2\nu+1)!} U_{s\varkappa}^{(2\nu)}\right| = \prod_1^\infty{}_\nu \left|\varepsilon_{s\varkappa} + \frac{1}{4\nu^2\pi^2} U_{s\varkappa}^{(2)}\right|.$$

Hier können wir wegen der Gleichheit der beiden Ausdrücke (15) und (16) jede Determinante auf der rechten Seite noch in zwei Factoren zerspalten und bekommen so:

$$(19)\quad \begin{cases} \left|\sum_0^\infty{}_\nu \frac{2}{2^{2\nu+1}(2\nu+1)!} U_{s\varkappa}^{(2\nu)}\right| = \\ = \prod_1^\infty{}_\nu \left|\varepsilon_{s\varkappa} + \frac{1}{2\nu\pi i} U_{s\varkappa}^{(1)}\right| \cdot \left|\varepsilon_{s\varkappa} - \frac{1}{2\nu\pi i} U_{s\varkappa}^{(1)}\right|, \end{cases}$$

wo jetzt freilich in dem Producte auf der rechten Seite die Anordnung der einzelnen Factoren nicht mehr ganz beliebig ist.

Um auch noch den ersten Factor von Δ auf eine einfachere Form zu bringen, betrachten wir die etwas allgemeinere Determinante:

$$(20)\quad \left|\sum_0^\infty{}_\mu \frac{t^\mu}{\mu!} U_{s\varkappa}^{(\mu)}\right|.$$

Setzen wir:

$$\sum_0^\infty{}_\mu \frac{t^\mu}{\mu!} U_{s\varkappa}^{(\mu)} = \omega_{s\varkappa}$$

und erinnern wir uns der auf S. 44 definirten Functionen $\Psi_{s\varkappa}$, die augenscheinlich die Form:

$$\Psi_{s\varkappa} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!} U_{s\varkappa}^{(\nu)}$$

haben, so erkennen wir, dass:

$$\omega_{s\varkappa} = \frac{\partial \Psi_{s\varkappa}}{\partial t}$$

ist, dass also die $\omega_{s\varkappa}$ den Differentialgleichungen:

$$(21)\quad \frac{\partial \omega_{s\varkappa}}{\partial t} = \sum_{\tau j}^{1\ldots r} c_{j\tau s} u_\tau \omega_{jk} \quad (s, \varkappa = 1 \cdots r)$$

genügen, die aus (1) durch Differentiation nach t folgen. Durch diese Differentialgleichungen und durch die Anfangsbedingungen:

$$(22) \qquad [\omega_{s\varkappa}]_{t=0} = \varepsilon_{s\varkappa} \qquad (s, \varkappa = 1 \cdots r)$$

sind die $\omega_{s\varkappa}$ vollständig bestimmt.

Bezeichnen wir nun die Determinante (20) der $\omega_{s\varkappa}$ kurz mit Δ', so ergiebt sich:

$$\frac{\partial \Delta'}{\partial t} = \sum_{s\varkappa}^{1\ldots r} \frac{\partial \Delta'}{\partial \omega_{s\varkappa}} \cdot \frac{\partial \omega_{s\varkappa}}{\partial t}$$

$$= \sum_{s\varkappa\tau j}^{1\ldots r} c_{j\tau s} u_\tau \omega_{j\varkappa} \frac{\partial \Delta'}{\partial \omega_{s\varkappa}},$$

also wird:

$$\frac{\partial \Delta'}{\partial t} = \sum_{s\tau j}^{1\ldots r} c_{j\tau s} u_\tau \varepsilon_{js} \Delta'$$

$$= \Delta' \cdot \sum_{s\tau}^{1\ldots r} c_{s\tau s} u_s$$

$$= \Delta' \cdot \sum_{s}^{1\ldots r} U_{ss}^{(1)}.$$

Da aber Δ' für $t = 0$ den Werth 1 annimmt, so kommt:

$$(23) \qquad \Delta' = \left| \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu} \frac{t^\mu}{\mu!} U_{s\varkappa}^{(\mu)} \right| = e^{t \cdot \sum_{1}^{r} {}_{\tau} U_{\tau\tau}^{(1)}}.$$

Setzen wir $t = \frac{1}{2}$, so erhalten wir den ersten Factor von Δ in der Gleichung (17). Mit Berücksichtigung von (19) ergiebt sich daher schliesslich:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} \frac{1}{(\nu+1)!} U_{s\varkappa}^{(\nu)} \right| = \\ & = e^{\frac{1}{2} \sum_{1}^{r} {}_{\tau} U_{\tau\tau}^{(1)}} \cdot \prod_{1}^{\infty} {}_{\nu} \left| \varepsilon_{s\varkappa} + \frac{1}{2\nu\pi i} U_{s\varkappa}^{(1)} \right| \cdot \left| \varepsilon_{s\varkappa} - \frac{1}{2\nu\pi i} U_{s\varkappa}^{(1)} \right|. \end{aligned} \right.$$

Damit ist unsere Aufgabe erledigt. Die Determinante der $\psi_{s\varkappa}$ ist in ein unendliches Product zerlegt, das beständig con-

vergirt und dessen Factoren lauter ganze Functionen von $u_1 \cdots u_r$ sind.

Wie man sieht, verschwindet die Determinante der $\psi_{s\varkappa}$ nur für solche Werthsysteme, für die eine der unendlich vielen ganzen Functionen:

$$\left| \varepsilon_{s\varkappa} \pm \frac{1}{2\nu\pi i} U_{s\varkappa}^{(1)} \right| \qquad (\nu = 1, 2 \cdots)$$

den Werth Null annimmt.

Unsere Productzerlegung von Δ liefert uns noch eine weitere bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Determinante. Es ist nämlich:

$$\left| \varepsilon_{s\varkappa} + \frac{1}{\omega} U_{s\varkappa}^{(1)} \right| = 1 + \frac{1}{\omega} g_1 + \frac{1}{\omega^2} g_2 + \cdots + \frac{1}{\omega^r} g_r ,$$

wo $g_\varkappa$ eine ganze homogene Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von $u_1 \cdots u_r$ bezeichnet. Die Functionen $g_1 \cdots g_r$ sind nun, wie Killing zuerst erkannt hat, Invarianten der adjungirten Gruppe, die zu der Zusammensetzung $c_{i\varkappa s}$ gehört (s. Math. Ann. Bd. 31, S. 260 ff.). Insbesondere ist:

$$g_1 = \sum_1^r {}_s\, U_{ss}^{(1)} .$$

Drücken wir Δ durch die Functionen $g_1 \cdots g_r$ aus, so kommt

$$(25) \quad \Delta = e^{\frac{1}{2} g_1} \prod_1^\infty {}_\nu \left(1 + \sum_1^r {}_s \frac{g_s}{(2\nu\pi i)^s}\right)\left(1 + \sum_1^r {}_s \frac{(-1)^s g_s}{(2\nu\pi i)^s}\right),$$

diesen Ausdruck aber können wir in eine beständig convergente Potenzreihe von $g_1 \cdots g_r$ entwickeln. Demnach ist Δ selbst eine Invariante der adjungirten Gruppe. Denkt man sich andrerseits Δ nach Potenzen von $u_1 \cdots u_r$ entwickelt:

$$\Delta = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu D_\nu(u_1 \cdots u_r) ,$$

wo unter D_ν eine ganze homogene Function ν^{ten} Grades verstanden wird, so ist jedes D_ν augenscheinlich darstellbar als eine ganze rationale Function der r Invarianten: $g_1 \cdots g_r$.

Zum Schluss wollen wir noch hervorheben, dass sich die gemachten Entwicklungen ohne Weiteres auf die zweite Para-

metergruppe in ihrer kanonischen Form übertragen. Die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe sind ebenfalls Quotienten beständig convergenter Potenzreihen und werden aus den infinitesimalen Transformationen der ersten kanonischen Parametergruppe durch die Substitution:

$$u_1' = -u_1, \cdots u_r' = -u_r$$

erhalten. Der gemeinsame Nenner der infinitesimalen Transformationen der zweiten kanonischen Parametergruppe hat daher dieselben Nullstellen wie die Determinante Δ.

Bei dieser Gelegenheit mag noch eine andere Bemerkung über die kanonische Parametergruppe ihre Stelle finden. Ich werde nämlich zeigen, dass sich die Functionen $\alpha_{\varkappa j}(u_1 \cdots u_r)$ in den infinitesimalen Transformationen $A_\varkappa f$ der kanonischen Parametergruppe ebenso wie die ψ durch ein simultanes System gewöhnlicher Differentialgleichungen definiren lassen.

Es seien $\Psi_{s\varkappa}$ die r^2 Functionen, die den Differentialgleichungen (1) und den Anfangsbedingungen (2) genügen. Bestimmen wir dann r^2 Functionen $A_{\varkappa j}$ aus den Gleichungen:

$$(26) \qquad \sum_1^r {}_s\, \Psi_{s\varkappa} A_{sj} = \varepsilon_{\varkappa j} \quad (\varkappa, j = 1 \cdots r),$$

so geht jedes $A_{\varkappa j}$ bei der Substitution $t = 1$ in $\alpha_{\varkappa j}$ über.

Um gewöhnliche Differentialgleichungen für die A_{sj} zu finden, differentiiren wir (26) nach t und berücksichtigen (1), das giebt:

$$(27) \quad \sum_1^r {}_s\, \Psi_{s\varkappa} \frac{\partial A_{sj}}{\partial t} + \sum_1^r {}_s\, A_{sj} \left\{ \varepsilon_{s\varkappa} + \sum_{\tau\mu}^{1\ldots r} c_{\mu\tau s} u_\tau \Psi_{\mu\varkappa} \right\} = 0 .$$

Erinnern wir uns jetzt, dass aus (26) auch die Gleichungen

$$(28) \qquad \sum_1^r {}_\varkappa\, \Psi_{s\varkappa} A_{\nu\varkappa} = \varepsilon_{s\nu} \quad (s, \nu = 1 \cdots r)$$

folgen, so bemerken wir sofort, dass wir aus (27) die $\Psi_{s\varkappa}$ wegschaffen können, wir brauchen zu diesem Zwecke blos (27) mit $A_{\nu\varkappa}$ zu multipliciren und nach $\varkappa$ von $1 \cdots r$ zu summiren. Auf diese Weise erhalten wir die Differentialgleichungen:

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_{\nu j}}{\partial t} + \sum\limits_{s\tau}^{1\ldots r} c_{\nu\tau s}\, u_\tau\, A_{sj} + \sum\limits_{\varkappa}^{1\ldots r} A_{\nu\varkappa} A_{\varkappa j} = 0 \\ (\nu, j = 1 \cdots r)\,. \end{cases}$$

Durch die Differentialgleichungen (29) sind die $A_{\nu j}$ vollständig bestimmt, wenn man noch die Anfangsbedingungen:

$$(30)\qquad [t \cdot A_{\nu j}]_{t=0} = \varepsilon_{\nu j} \quad (\nu, j = 1 \cdots r)$$

hinzunimmt.

Dass die Functionen $A_{\nu j}$ die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe bestimmen, lässt sich natürlich auch aus den Differentialgleichungen (29) beweisen, ohne dass man zu den Functionen $\Psi_{s\varkappa}$ zurückkehrt.

A. Mayer, *Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von n Variabeln.*

Soll eine Function $f(x_1 \cdots x_n)$ mit stetigen partiellen Differentialquotienten an der Stelle $a_1 \cdots a_n$ ein Maximum oder Minimum erreichen, so müssen in der TAYLOR'schen Entwickelung der Differenz:

$$D \equiv f(a_1 + k_1, \quad \cdots \quad a_n + k_n) - f(a_1 \cdots a_n)$$

nach steigenden Potenzen der willkürlichen Incremente $k_1, \cdots k_n$ die Glieder erster Ordnung identisch verschwinden. Bilden überdies die Glieder niedrigster Ordnung, die in dieser Entwickelung wirklich auftreten, zusammen eine *definite*, respective eine *indefinite* Form, so unterliegt das Stattfinden, respective das Nichtstattfinden eines Maximums oder Minimums der Function an der betrachteten Stelle keinem Zweifel mehr. Dagegen ist, ausser für $n = 2$ und $n = 3$, die Frage nach solchen Kriterien, welche für das Maximum oder Minimum in dem Ausnahmefalle gleichzeitig nothwendig und hinreichend wären, wo die Summe jener Anfangsglieder gleicher Ordnung *semidefinit* ist, noch nirgends eingehender behandelt worden, und nach den complicirten Verhältnissen, welche schon für die Functionen von zwei Variabeln in diesem Falle auftreten können [1]), dürfte diese Frage sich wohl überhaupt noch nicht allgemein erledigen lassen.

Indessen, wenn man sich ja natürlich auch Beispiele bilden

---

1) Vgl. LUDWIG SCHEEFFER, *Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln*, diese Berichte 1886, p. 102—148, abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 35. Diese Abhandlung wird im Folgenden unter dem Zeichen *Sch.* citirt.

kann, die alle möglichen Specialitäten aufweisen, so treten doch bei den Anwendungen in der Regel nicht gleichzeitig mehrere Singularitäten vereint auf. Solange man daher die Frage nicht allgemein anzugreifen vermag, ist es jedenfalls gerechtfertigt, ganz unbekümmert darum, ob sich daraus eine allgemeine Lösungsmethode entwickeln könnte oder nicht, die Untersuchung zunächst nur auf den einfachsten Fall zu beschränken, d. h. an Stelle der allgemeinen Frage zunächst die speciellere in Betracht zu ziehen:

Wenn in der Entwickelung der Differenz D die Glieder erster Ordnung identisch verschwinden und die Glieder zweiter Ordnung eine semidefinite Form bilden, welche Bedingungen sind alsdann hinreichend, und im Allgemeinen, d. h. vorausgesetzt, dass nicht wiederum eine neue Singularität eintritt, zugleich auch nothwendig für ein Maximum oder Minimum der gegebenen Function f an der Stelle $a_1 \cdots a_n$?

Mit andern Worten also, es wird nur nach solchen Kriterien gefragt, welche das Maximum oder Minimum an der betrachteten Stelle nicht bloss für die gegebene Function selbst, sondern zugleich auch für jede andere Function $f_1(x_1 \cdots x_n)$ sichern sollen, für welche die Entwickelung der Differenz

$$f_1(a_1 + k_1, \quad \cdots, \quad a_n + k_n) - f_1(a_1 \cdots a_n)$$

sich erst in den Gliedern fünfter und höherer Ordnung von der Entwickelung der Differenz D unterscheidet.

Die Beantwortung dieser Frage ist es, die im Folgenden versucht werden soll, allerdings auf einem Wege, der von vornherein nicht ganz einwurfsfrei ist. Wo es aber an einem absolut sichern Fundamente noch fehlt, da muss man sich eben auch mit weniger strengen Methoden behelfen, falls dieselben nur überhaupt ein tieferes Eindringen in das Problem gestatten.

Um den Gegenstand im Zusammenhange darzustellen, wurde es nöthig, die ganze Untersuchung ab ovo zu beginnen und also auch das Bekannte von Neuem kurz abzuleiten. Im Besonderen konnte namentlich die Reproduction eines Theils der Resultate, die bereits in meiner Note »*Ueber die kürzesten und weitesten Abstände eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Oberfläche und die dritte Variation in den Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums*«, diese Berichte 1881, erhalten wurden,

deshalb nicht wohl umgangen werden, weil dieselben sich auch für die vorliegende Untersuchung als höchst wesentlich herausstellten. Ich bezeichne diese Note im Folgenden kurz durch A.

§ 1.

Analytische Definition des Minimums. Allgemeine Entwickelungen. Die zweite Variation.

Da ein Maximum der Function f identisch ist mit einem Minimum der Function $-f$, so können wir uns auf den Fall des Minimums beschränken, und demnach die Grundfrage so stellen:

Unter welchen Bedingungen erreicht eine gegebene Function $f(x_1 \cdots x_n)$ einen kleinsten Werth an einer solchen Stelle $x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n$, in deren Umgebung die Differenz

$$D \equiv f(a_1 + k_1, \quad \cdots, \quad a_n + k_n) - f(a_1 \cdots a_n)$$

sich, so weit als man will, nach der begrenzten Taylor'schen Reihe entwickeln lässt?

Für ein Minimum der Function f an der Stelle $a_1 \cdots a_n$ ist nun jedenfalls *nothwendig*, dass die Function auf jeder Curve, die sich durch einen willkürlichen Parameter t in der Form:

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(t) \equiv a_i + \xi_i^1 t + \xi_i^2 t^2 + \xi_i^3 t^3 + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots n,$$

ausdrücken lässt, im Punkte $t = 0$ ein Minimum erreiche. Dabei soll natürlich in den ξ_i^k (ebenso wie in den weiterhin auftretenden Grössen V_i^k) der Buchstabe k keinen Exponenten, sondern nur einen obern Index bedeuten. Desgleichen versteht es sich von selbst, dass diese Reihencoefficienten ganz beliebige Werthe erhalten können und nur nicht alle gleichzeitig gleich Null gesetzt werden dürfen, sowie auch, dass hier im Gebiete des Grössten und Kleinsten das Wort *Werth* immer nur in der Bedeutung »*endlicher und reeller Werth*« gebraucht wird.

Dass diese Forderung umgekehrt auch *hinreichend* ist, dürfte wohl allgemein zugestanden werden. In der That wird dies für den Fall $n = 2$ implicite bewiesen durch die Scheeffer'sche Theorie der Maxima und Minima der Functionen von zwei Variabeln, und auch die Methode, welche Herr Stolz für Functionen dreier Variabeln angedeutet hat [1], kommt schliesslich darauf

1) *Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen,* Sitzungsberichte d. Kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe, Bd. XCIX. Abth. II.a. Juni 1890.

zurück, das Verhalten der gegebenen Function auf Curven von der analytischen Form (1) in der Nähe des Punktes $t = 0$ zu untersuchen. A priori lässt sich diese Umkehrung jedoch wohl kaum wirklich beweisen, und es ist daher möglicher Weise immerhin noch eine Beschränkung des allgemeinen Minimumbegriffes, wenn wir die obige Forderung im Folgenden auch als hinreichend annehmen, mit andern Worten, wenn wir das Minimum — unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass dasselbe überhaupt auf dem Wege der Potenzentwicklung nachweisbar sei[1]) — also definiren:

Setzt man:

(2) $$f(\varphi_1(t)\,,\ \cdots,\ \varphi_n(t)) \equiv F(t)\ ,$$

so ist es zu einem Minimum der gegebenen Function $f(x_1, \cdots x_n)$ *an der Stelle* $a_1 \ldots a_n$ *nothwendig und hinreichend, dass für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe der Reihencoefficienten* $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_n^1, \xi_n^2, \ldots$ *in der Entwickelung der Differenz*

$$F(t) - F(0)$$

nach steigenden Potenzen von t stets das erste nicht verschwindende Glied von einer geraden Ordnung und positiv sei[2]).

Aus dieser Definition folgt zunächst, dass an einer Minimumsstelle $a_1 \ldots a_n$ die ersten partiellen Differentialquotienten der Function f sämmtlich verschwinden, die Werthe $x_1 = a_1$, $\ldots$, $x_n = a_n$ also Wurzeln der n Gleichungen sein müssen:

(3) $$f'x_1 = 0\ ,\quad f'x_2 = 0\ ,\quad \cdots,\quad f'x_n = 0\ .$$

---

1) Vgl. *Sch.* namentlich § 4.

2) Auch SCHEEFFER hatte, als er anfing sich mit der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums zu beschäftigen, zuerst diese Definition zu Grunde gelegt, und verliess dieselbe erst dann, nachdem er in der Theorie der algebraischen Curven eine ungleich bessere und strengere Begründungsart erkannt hatte. Aus diesem Grunde blieb auch seine erste Arbeit über diesen Gegenstand unvollendet. In derselben hebt er aber ausdrücklich hervor, dass man sich über die Strenge der obigen Definition nicht täuschen dürfe, und begründet dies sehr treffend mit den Worten:

»Obschon es im Falle, dass *kein* Minimum stattfindet, dass also in jeder Nähe der betreffenden Stelle $a_1 \cdots a_n$ andere Stellen mit kleineren oder höchstens gleichen Functionswerthen $f(x_1 \cdots x_n)$ existiren, immer möglich sein wird, durch unendlich viele solcher Stellen eine Curve zu legen, auf welcher alsdann in dem betrachteten Punkte natürlich ebenfalls *kein* Minimum eintritt, so bleibt doch immerhin die Möglichkeit offen, dass keine derartige Curve sich in der Form (1) darstellen lässt.«

Ich setze überdies voraus, *dass diese Werthe keinem etwaigen solchen Systeme Auflösungen der Gleichungen* (3) *angehören, welches nicht von vornherein für alle n Unbekannte x bestimmte Werthe ergeben hatte.* Der gegentheilige Fall wird im folgenden Paragraphen besonders untersucht werden.

Bezeichnen wir nun die Werthe, welche die höheren partiellen Differentialquotienten:

$$f''x_i x_k\,, \qquad f'''x_i x_k x_\lambda\,, \qquad f^{\mathrm{IV}} x_i x_k x_\lambda x_\mu\,, \qquad \cdots$$

der Function f für die betrachteten Wurzeln $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ der Gleichungen (3) annehmen, zur Abkürzung durch:

$$c_{ik}\,, \qquad c_{ik\lambda}\,, \qquad c_{ik\lambda\mu}\,, \qquad \cdots\,,$$

so ergiebt sich für die Differenz:

(4) $\Delta(\varepsilon) \equiv f(a_1 + \varepsilon h_1, \cdots, a_n + \varepsilon h_n) - f(a_1 \cdots a_n)$

die Entwickelung:

$$\begin{aligned}\Delta(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \sum^i \sum^k c_{ik} h_i h_k \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 3} \sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda} h_i h_k h_\lambda \\ &+ \frac{\varepsilon^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sum^i \sum^k \sum^\lambda \sum^\mu c_{ik\lambda\mu} h_i h_k h_\lambda h_\mu \\ &+ \cdots\cdots\cdots\,,\end{aligned}$$

in der, wie überhaupt im Folgenden immer da, wo keine besonderen Summengrenzen angegeben sind, alle Summen von 1 bis n zu nehmen sind.

Setzt man hierin für $i = 1, 2, \cdots n$:

(5) $h_i = \xi_i^1 t + \xi_i^2 t^2 + \cdots + \xi_i^\nu t^\nu + \cdots\,,$

so folgt weiter:

$$\begin{aligned}(6)\quad \Delta(\varepsilon) = &\frac{\varepsilon^2}{2}(V_2^2 t^2 + V_3^2 t^3 + V_4^2 t^4 + \cdots + V_\nu^2 t^\nu + \cdots) \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 3}(V_3^3 t^3 + V_4^3 t^4 + \cdots + V_\nu^3 t^\nu + \cdots) \\ &+ \frac{\varepsilon^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}(V_4^4 t^4 + \cdots) + \cdots\,,\end{aligned}$$

und hierin ist, weil die Coefficienten $c_{ik}, c_{ik\lambda}, \ldots$ ungeändert bleiben, wenn man die Reihenfolge ihrer Indices ändert,

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_2^2 &\equiv \sum^i \sum^k c_{ik}\, \xi_i^1\, \xi_k^1 \\
V_3^2 &\equiv 2 \sum^i \sum^k c_{ik}\, \xi_i^1\, \xi_k^2 \\
V_4^2 &\equiv \sum^i \sum^k c_{ik}\, (\xi_i^2\, \xi_k^2 + 2\, \xi_i^1\, \xi_k^3) \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
V_\nu^2 &\equiv \sum^i \sum^k c_{ik} (\xi_i^1\, \xi_k^{\nu-1} + \xi_i^2\, \xi_k^{\nu-2} + \cdots + \xi_i^{\nu-1}\, \xi_k^1) \\
V_3^3 &\equiv \sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda}\, \xi_i^1\, \xi_k^1\, \xi_\lambda^1 \\
V_4^3 &\equiv 3 \sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda}\, \xi_i^1\, \xi_k^1\, \xi_\lambda^2 \\
&\equiv 3 \sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda}\, \xi_i^2\, \xi_k^1\, \xi_\lambda^1 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
V_\nu^3 &\equiv \sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda} (\xi_i^1\, \xi_k^1\, \xi_\lambda^{\nu-2} \\
&\quad + (\xi_i^1\, \xi_k^2 + \xi_i^2\, \xi_k^1)\, \xi_\lambda^{\nu-3} + \cdots \\
&\quad + (\xi_i^1\, \xi_k^{\nu-2} + \xi_i^2\, \xi_k^{\nu-3} + \cdots + \xi_i^{\nu-2}\, \xi_k^1)\, \xi_\lambda^1) \\
V_4^4 &\equiv \sum^i \sum^k \sum^\lambda \sum^\mu c_{ik\lambda\mu}\, \xi_i^1\, \xi_k^1\, \xi_\lambda^1\, \xi_\mu^1 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
\right.
$$

Nimmt man nun zunächst $\varepsilon = 1$, so verwandelt sich $\Delta(\varepsilon)$ gerade in die Differenz:

$$\Delta(1) \equiv F(t) - F(0) \;,$$

und aus (6) erhält man die Entwickelung:

$$
(8)\quad \Delta(1) = \frac{1}{2} \{ V_2^2 t^2 + (V_3^2 + \frac{1}{3} V_3^3) t^3 + (V_4^2 + \frac{1}{3} V_4^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} V_4^4) t^4 + \cdots \} \,.
$$

Das Anfangsglied dieser Entwickelung ist:

$$\frac{1}{2} V_2^2 t^2 \,.$$

Soll daher der betrachtete Werth $f(a_1 \cdots a_n)$ ein Minimum von f sein, *so darf seine zweite Variation:*

$$
(9)\qquad V_2 \equiv V_2^2 \equiv \sum^i \sum^k c_{ik}\, \xi_i^1\, \xi_k^1
$$

keiner negativen Werthe fähig sein. Und umgekehrt, wenn dieselbe *definit positiv* ist, wenn sie also nicht bloss nie negativ werden kann, sondern auch nur dann verschwindet, wenn ihre

n Variabeln $\xi_1^1 \ldots \xi_n^1$ gleichzeitig verschwinden, *so besitzt die Function f an der Stelle $a_1 \ldots a_n$ sicher ein Minimum.*

In der That, zunächst erreicht alsdann f auf allen denjenigen Curven, in deren Gleichungen (1) die n ersten Coefficienten $\xi_1^1 \ldots \xi_n^1$ nicht sämmtlich Null sind, im Punkte $t = 0$ ein Minimum.

Dasselbe gilt aber auch dann noch, wenn man die Reihen (1) nicht mit der ersten, sondern mit einer beliebig hohen, etwa mit der m-ten Potenz von t beginnen lässt. Denn nach (4) und (5) kommt dies darauf hinaus, jetzt $\varepsilon = t^{m-1}$ zu nehmen und also an Stelle von $\Delta(1)$ die Differenz $\Delta(t^{m-1})$ zu betrachten. Nach (6) aber beginnt die Entwickelung dieser Differenz wiederum mit dem definit positiven Gliede:

$$\frac{1}{2} V_2^2 t^{2m} .$$

Ist also die zweite Variation definit positiv, so besitzt die Function f überhaupt auf *allen* Curven (1) im Punkte $t = 0$ ein Minimum, und damit ist nach unserer Grundconvention das Minimum auch im Raume $x_1 \ldots x_n$ selbst sicher constatirt, was man bekanntlich auch unabhängig von dieser Convention ganz streng beweisen kann[1]).

Offen bleibt die Frage demnach nur dann, wenn die zweite Variation weder definit, noch indefinit, d. h. (falls sie nicht etwa identisch verschwindet), wenn sie *semidefinit* und zwar (da wir nur den Fall des Minimums ins Auge fassen) positiv ist, *und dieser singuläre Fall soll eben den Gegenstand unserer Betrachtungen bilden.*

Für alle Werthsysteme $\xi_1^1 \ldots \xi_n^1$, welche V_2 nicht zum Verschwinden bringen, beginnt dann die Entwickelung von $\Delta(1)$, wie von $\Delta(t^{m-1})$ stets mit einem positiven Gliede gerader Ordnung. Wir haben daher diese Entwickelungen nur noch zu untersuchen für diejenigen Werthe der n Variabeln ξ^1, welche $V_2 = 0$ machen.

Nun ist, da die zweite Variation semidefinit und positiv sein soll, Null der kleinste Werth, den sie überhaupt anzunehmen vermag. Jedes Werthsystem $\xi_1^1 \ldots \xi_n^1$, für welches V_2 verschwindet, muss daher nothwendig den n Gleichungen genügen:

---

1) Vgl. z. B. die Anmerkung am Schlusse von *Sch.* § 6.

(10) $\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_k^1} \equiv \sum^i c_{ik}\,\xi_i^1 = 0\ , \qquad k = 1,\ 2,\ \cdots n\ .$

Aus diesen Gleichungen folgt rückwärts:

$$V_2 \equiv \frac{1}{2}\sum^k \xi_k^1\,\frac{\partial V_2}{\partial \xi_k^1} = 0\ .$$

Umgekehrt bringt also jedes Werthsystem der Variabeln ξ^1, welches ihnen genügt, V_2 zum Verschwinden, und man hat den wichtigen Satz:

I. Wenn die ganze homogene Function zweiten Grades:

$$V_2 \equiv \sum^i \sum^k c_{ik}\,\xi_i^1\,\xi_k^1$$

semidefinit ist, so lassen sich die n linearen homogenen Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_k^1} \equiv \sum^i c_{ik}\,\xi_i^1 = 0\ , \quad k = 1,\ 2,\ \cdots n\ ,$$

immer erfüllen durch Werthe von $\xi_1^1 \ldots \xi_n^1$, *die nicht sämmtlich Null sind, und zugleich giebt es keine anderen Werthe dieser n Variabeln, für welche* $V_2 = 0$ *würde, als solche, welche diese n Gleichungen erfüllen*[1]).

§ 1.

Der besondere Fall, in welchem sich die ersten partiellen Differentialquotienten der gegebenen Function zum Verschwinden bringen lassen, ohne dass alle n Variable bestimmte Werthe zu erhalten brauchen[2]).

Im Allgemeinen lassen sich die n Gleichungen:

(3) $f'x_1 = 0\ ;\ \ f'x_2 = 0\ ,\ \ \cdots,\ \ f'x_n = 0\ ,$

falls sie überhaupt gleichzeitig bestehen können, nicht anders erfüllen als dadurch, dass alle n Unbekannte $x_1 \ldots x_n$ bestimmte Werthe erhalten, und dann ist die im Vorhergehenden über das Wurzelsystem $x_1 = a_1,\ \ldots,\ x_n = a_n$ gemachte Voraussetzung eo ipso erfüllt. Unter Umständen kann man aber

---

1) Genau ebenso folgt allgemein:

Das allgemeinste Werthsystem $\xi_1 \cdots \xi_n$, *welches eine gegebene semidefinite ganze homogene Function* 2ten *Grades* $V(\xi_1 \cdots \xi_n)$ *zum Verschwinden bringt, bestimmt sich aus den n Gleichungen:*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} = 0\ , \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_2} = 0\ , \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 0\ .$$

2) A. § 5.

diesen Gleichungen auch genügen, indem man nur für einen Theil der n Unbekannten passende Functionen der übrigen setzt. Ein Beispiel für diesen besonderen Fall ist uns soeben in den semidefiniten ganzen homogenen Functionen zweiten Grades begegnet. Hier tritt diese Singularität dadurch ein, dass eine oder mehrere von den Gleichungen (3) eine blosse Folge der übrigen werden, und dann giebt es überhaupt kein System Auflösungen dieser Gleichungen, welches alle n Unbekannte x vollständig bestimmte. Sie kann sich aber auch nur bei gewissen Auflösungsarten der Gleichungen (3) einstellen, während die Functionen $f'x_1, \ldots f'x_n$ an sich von einander unabhängig sind. Für die Function

$$2f(x_1 x_2) \equiv a^2 \sin^2 x_1 + (b^2 \cos^2 x_2 + c^2 \sin^2 x_2) \cos^2 x_1$$

z. B., das Quadrat des Radiusvectors des Ellipsoides

$$x = a \sin x_1 \;, \quad y = b \cos x_1 \cos x_2 \;, \quad z = c \cos x_1 \sin x_2 \;,$$

sind die beiden ersten Differentialquotienten:

$$f'x_1 \equiv (a^2 - b^2 \cos^2 x_2 - c^2 \sin^2 x_2) \sin x_1 \cos x_1$$
$$f'x_2 \equiv (c^2 - b^2) \cos x_2 \sin x_2 \cos^2 x_1$$

von einander unabhängige Functionen von x_1 und x_2, aber beide verschwinden bei willkürlichem x_2 durch die Annahme $\cos x_1 = 0$.

Um nun zu erkennen, was sich in unseren Betrachtungen ändert, wenn das Werthsystem $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ einer solchen exceptionellen Auflösung der Gleichungen (3) angehört, nehme ich jetzt allgemein an, die gegebene Function f sei so beschaffen, *dass diesen n Gleichungen bei unbestimmten $x_{r+1} \ldots x_n$ identisch genügt werde durch die r Substitutionen:*

$$(11) \qquad x_\varrho = \psi_\varrho(x_{r+1} \cdots x_n) \;, \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r \;.$$

Deutet man dann die Ausführung dieser Substitutionen durch ( ) an, so ist jedes

$$(f'x_h) \equiv 0 \;,$$

und daher, wenn x_λ irgend eine der unbestimmt gebliebenen Variabeln $x_{r+1} \ldots x_n$ bedeutet, zugleich auch

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_\lambda} \equiv (f'x_\lambda) + \sum_1^r{}_\varrho \, (f'x_\varrho) \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial x_\lambda} \equiv 0 \;,$$

d. h. *der Werth* (f), den die gegebene Function für die angenommene Auflösung der Gleichungen (3) erhält, *ist unabhängig von* $x_{r+1} \ldots x_n$.

Setzt man also:

$$\psi_\varrho(x_{r+1} \cdots x_n) \equiv \psi_\varrho \ , \qquad \psi_r(x'_{r+1} \cdots x_n') \equiv \psi_\varrho' \ ,$$

so ist stets:

$$(12) \quad f(\psi_1 \cdots \psi_r x_{r+1} \cdots x_n) \equiv f(\psi_1' \cdots \psi_r' x'_{r+1} \cdots x_n') \ .$$

Welche Werthe man daher auch den Variabeln $x_{r+1} \cdots x_n$ beilegen mag, so kann der erhaltene Functionswerth (f) doch keinenfalls *ein Minimum von f im früheren Sinne*, d. h. ein solcher Werth sein, welcher kleiner wäre als *alle* Nachbarwerthe der Function. So oft indessen für alle hinreichend kleinen und nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe von $k_1 \ldots k_r$ die Differenz

$$f(\psi_1' + k_1, \cdots, \psi_r' + k_r, x'_{r+1}, \cdots x_n') \\ - f(\psi_1 \cdots \psi_r x_{r+1} \cdots x_n)$$

beständig > 0 bleibt, während $x'_{r+1} \ldots x_n'$ willkürliche, den betrachteten Werthen von $x_{r+1} \ldots x_n$ nur hinlänglich benachbarte oder auch mit ihnen zusammenfallende Grössen bedeuten, ist (f) doch *in dem Sinne* sicher ein *kleinster Werth* der Function, *als dieselbe dann an keiner Nachbarstelle kleinere Werthe annimmt.* Nach (12.) ist aber jene Differenz

$$\equiv f(\psi_1' + k_1, \cdots, \psi_r' + k_r, x'_{r+1} \cdots x_n') \\ - f(\psi_1' \cdots \psi_r' x'_{r+1} \cdots x_n') \ ,$$

und unsere Annahme demnach keine andere als die, dass die Function

$$f(x_1 \cdots x_r x'_{r+1} \cdots x_n') \ ,$$

die neben den Variabeln $x_1 \cdots x_r$ noch die unbestimmten Constanten $x'_{r+1} \ldots x_n'$ enthält, an der Stelle $x_1 = \psi_1', \ldots x_r = \psi_r'$ *ein Minimum im alten Sinne* besitzen solle.

Der Eintritt dieses Minimums kann aber jedenfalls nur noch von der Erfüllung gewisser Bedingungsungleichungen abhängen, und wenn $a_{r+1} \ldots a_n$ die bestimmten Werthe der Variabeln $x_{r+1} \ldots x_n$ sind, die man ins Auge fassen will, so können die absoluten Beträge der Differenzen

$$x'_{r+1} - a_{r+1} \ , \quad \cdots , \quad x_n' - a_n$$

beliebig klein angenommen werden. Daher kommt die letzte Bedingung selbst wieder darauf zurück, *dass die Function*

$$f(x_1 \cdots x_r a_{r+1} \cdots a_n)$$

an der Stelle

$$x_1 = \psi_1(a_{r+1} \cdots a_n)\,, \quad \cdots, \quad x_r = \psi_r(a_{r+1} \cdots a_n)$$

ein wirkliches Minimum erreichen muss.

Uebrigens braucht man sich nicht bei dem letzten Schlusse zu beruhigen, sondern kann, nachdem man einmal bei dem Minimum der Function

$$f(x_1 \cdots x_r x'_{r+1} \cdots x_n')$$

angelangt ist, nun auch so weiter schliessen:

Bleibt das Minimum dieser Function an der Stelle $x_1 = \psi_1$, ..., $x_r = \psi_r'$ für alle Werthe der Constanten $x'_{r+1} \ldots x_n'$ bestehen, so ist auch — und bei der Weiterführung der allgemeinen Untersuchung werden wir im Grunde nur dieses Resultat brauchen — der erhaltene Werth (f) für alle Werthe der Variabeln $x_{r+1} \ldots x_n$ ein kleinster Werth der gegebenen Function $f(x_1 \ldots x_r x_{r+1} \ldots x_n)$ in dem oben angegebenen neuen Sinne des Wortes.

Ist dagegen $f(\psi_1' \ldots \psi_r' x'_{r+1} \ldots x_n')$ nur so lange ein wirkliches Minimum der ersten Function, als ihre Constanten $x'_{r+1} \ldots x_n'$ etwa zwischen gewissen Grenzen bleiben, so ist auch (f) nur so lange ein kleinster Werth der zweiten Function, als die Variabeln $x_{r+1} \ldots x_n$ zwischen denselben Grenzen bleiben.

Der ganze Unterschied zwischen dem jetzigen besondern und dem früheren allgemeinen Falle reducirt sich also darauf, *dass die bei der betrachteten Auflösung der Gleichungen* (3) *willkürlich gebliebenen Variablen $x_{r+1} \ldots x_n$ sich ganz so verhalten, als ob ihnen von vornherein diejenigen gegebenen Werthe vorgeschrieben wären, die man gerade in Betracht ziehen will.* Und wenn im Besondern die, unter der Voraussetzung *constanter* $x_{r+1} \ldots x_n$ gebildete zweite Variation von (f), also, nur in veränderter Bezeichnung, der Ausdruck:

$$\delta^2(f) \equiv \overline{\underline{\sum_i \sum_k}}_1^r (f'' x_i x_k)\, \delta x_i \delta x_k\,,$$

für das betrachtete Werthsystem $x_{r+1} \dots x_n$ *definit positiv* ausfällt, so beweist dies, dass in der Umgebung der Stelle

$$x_1 = \psi_1 \,, \quad \cdots \,, \quad x_r = \psi_r \,, \quad x_{r+1} \,, \quad \cdots x_n$$

kein Werth der gegebenen Function $f(x_1 \dots x_n)$ existirt, der kleiner wäre als (f) [1]).

Damit ist der betrachtete Ausnahmefall auf den allgemeinen Fall zurückgeführt, und wir können nun wieder zu diesem, d. h. also zu der Voraussetzung zurückkehren, dass die Wurzeln $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ keinem System Auflösungen der Gleichungen (3) angehören, welches ursprünglich eine oder mehrere der Unbekannten x unbestimmt gelassen hatte. Ueberdies sollte die zweite Variation des zugehörigen Functionswerthes $f(a_1 \dots a_n)$ semidefinit positiv sein und es waren daher die Entwickelungen

---

1) Dagegen wird alsdann die bei *variabelm* $x_{r+1} \cdots x_n$ gebildete zweite Variation von (f)

$$V_2 \equiv \sum^i \sum^k (f'' x_i x_k)\, \xi_i^1 \xi_k^1$$

nur *semidefinit positiv*. Dies folgt einmal schon daraus, dass ja überhaupt die Differenz

$$f(\psi_1 + k_1, \cdots \psi_r + k_r, x'_{r+1} \cdots x_n') - f(\psi_1 \cdots \psi_r x_{r+1} \cdots x_n)$$

$\equiv 0$ wird, sobald man jedes

$$k_\varrho = \psi_\varrho' - \psi_\varrho$$

setzt, lässt sich andrerseits aber auch direct zur Anschauung bringen durch die Bemerkung, dass man in Folge der aus den Identitäten $(f' x_h) \equiv 0$ hervorgehenden Relationen:

$$(f'' x_h x_\lambda) + \sum_1^r {}^i (f'' x_h x_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\lambda} \equiv 0$$

V_2 auch so schreiben kann:

$$V_2 \equiv \overline{\underline{\sum_1^r {}^i \sum^k}} (f'' x_i x_k)(\xi_i^1 - X_i)(\xi_k^1 - X_k)\,,$$

wo

$$X_\varrho \equiv \sum_{r+1}^n {}^\lambda \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial x_\lambda} \xi_\lambda^1 \,.$$

Man sieht also, wie in diesem besonderen Falle eine in bestimmter Weise *semidefinite* zweite Variation doch allein schon hinreicht, um einen kleinsten Werth sicher zu constatiren.

der Differenzen $\Delta(1)$ und $\Delta(t^{m-1})$ nur für diejenigen Werthe der Variabeln ξ^1 zu discutiren, welche V_2 zum Verschwinden bringen, d. h. nach Satz I, welche die n Gleichungen (10) befriedigen.

§ 3.

Das Verschwinden der dritten Variation.

Beschäftigen wir uns unter der Festsetzung, dass nicht alle n Variabeln $\xi_1^1 \dots \xi_n^1$ gleichzeitig verschwinden sollen, zunächst wieder ausschliesslich mit der Entwickelung (8)!

Diese ist jetzt nur zu bilden für solche Werthe der ξ^1, welche die n Gleichungen

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_k^1} \equiv \sum\nolimits^i c_{ik}\xi_i^1 = 0 \;, \qquad k = 1, 2, \cdots n$$

erfüllen. Für alle diese Werthe verschwindet aber mit V_2 gleichzeitig auch:

$$V_3^2 \equiv 2\sum\nolimits^k \xi_k^2 \sum\nolimits^i c_{ik}\xi_i^1$$

und das Anfangsglied der Entwickelung (8) wird also jetzt:

$$\frac{1}{2\cdot 3} V_3^3 t^3 .$$

Soll also unser Werth $f(a_1 \dots a_n)$ wirklich ein Minimum von f sein, *so muss nothwendig auch noch seine dritte Variation:*

$$(13) \qquad V_3 \equiv V_3^3 \equiv \sum\nolimits^i \sum\nolimits^k \sum\nolimits^\lambda c_{ik\lambda}\xi_i^1\xi_k^1\xi_\lambda^1$$

in Folge der Gleichungen (10) *verschwinden.*

Diese nächste nothwendige Bedingung des Minimums nehme ich daher im Folgenden als erfüllt an. Aus ihr ergiebt sich sofort eine Folgerung, die für die weitere Untersuchung von grösster Wichtigkeit ist.

Bei unserer Voraussetzung lassen sich die n Gleichungen (10) durch Werthe der ξ^1 erfüllen, die nicht sämmtlich Null sind. Daher ist von diesen n Gleichungen nothwendig wenigstens eine eine blosse Folge der anderen. Ich will allgemein annehmen, *dass von den Gleichungen* (10) *die r ersten von einander unabhängig und die $n - r$ letzten blosse Folgen der r ersten seien, und zwar mögen diese die r Variabeln $\xi_1^1 \dots \xi_r^1$ bestimmen*, sodass die Determinante

(14) $$\sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{rr} \mp 0$$

sei. — Wir werden übrigens in § 6 sehen, dass die letzte Voraussetzung bereits in der ersten enthalten ist. —

Sind dann:

(15) $$\xi_\varrho^1 = \sum_{r+1}^{n}{}^{\mu} b_\mu^\varrho \xi_\mu^1 , \qquad \varrho = 1, 2, \cdots r ,$$

die Auflösungen der r ersten Gleichungen (10), so wird, da nach Voraussetzung die Gleichung $V_3 = 0$ eine blosse Folge der Gleichungen (10) ist, mit diesen n Gleichungen zugleich auch die Gleichung

$$V_3 = 0$$

identisch erfüllt durch die Substitutionen (15).

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$M_i \equiv p \sum{}^k c_{ik} \xi_k^2 + \sum{}^k \sum{}^\lambda c_{ik\lambda} \xi_k^1 \xi_\lambda^1 ,$$

wo p eine beliebig gewählte, von Null verschiedene Zahl bezeichnet, so wird nach (13):

$$\sum{}^i M_i \xi_i^1 \equiv p \sum{}^k \xi_k^2 \sum{}^i c_{ik} \xi_i^1 + V_3 .$$

Deutet man daher der Klarheit halber die Ausführung der Substitutionen (15) durch [ ] an, so hat man:

$$[\sum{}^i M_i \xi_i^1] \equiv \sum_{r+1}^{n}{}^{\mu} \{[M_\mu] + \sum_{1}^{r}{}^{\varrho} b_\mu^\varrho [M_\varrho]\} \xi_\mu^1 \equiv 0 ,$$

d. h. es bestehen die $n - r$ Relationen:

$$[M_\mu] + \sum_{1}^{r}{}^{\varrho} b_\mu^\varrho [M_\varrho] \equiv 0 , \qquad \mu = r + 1, \cdots n .$$

Diese aber liefern, weil sich die r in den ξ^2 linearen Gleichungen:

$$[M_1] = 0 , \qquad \cdots , \qquad [M_r] = 0$$

wegen der Voraussetzung (14) nach den r Unbekannten $\xi_1^2 \ldots \xi_r^2$ auflösen lassen, sofort den folgenden (von den Beziehungen $c_{ik} = c_{ki}$ unabhängigen) Satz:[1]

II. Lassen sich die r ersten von den n linearen homogenen Gleichungen (10) *nach den r Unbekannten* $\xi_1^1 \ldots \xi_r^1$ *auflösen, und*

[1]) A. p. 46.

erfüllen diese Auflösungen mit den $n-r$ übrigen Gleichungen (10) *zugleich die Bedingung identisch:*

$$\sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda} \xi_i^1 \xi_k^1 \xi_\lambda^1 = 0 \ ,$$

so genügen für alle Werthe von $\xi_1^1 \dots \xi_n^1$, welche die Gleichungen (10) *befriedigen, auch die Auflösungen der r ersten von den n linearen nicht homogenen Gleichungen:*

$$(16) \qquad p \sum^k c_{ik} \xi_k^2 + \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda} \xi_k^1 \xi_\lambda^1 = 0$$
$$p \neq 0 \ , \quad i = 1, 2, \cdots n$$

nach den r Unbekannten $\xi_1^2 \cdots \xi_r^2$ identisch allen n Gleichungen (16).

Ich füge hinzu, dass, bei den über die Gleichungen (10) eingeführten Voraussetzungen, *die zweite Variation V_2 eine definit positive Function der Variabeln $\xi_1^1 \cdots \xi_r^1$ wird, sobald man $\xi_{r+1}^1 = \cdots = \xi_n^1 = 0$ setzt.* Denn giebt man den $n-r$ letzten Variabeln ξ^1 den gemeinsamen Werth Null, wodurch V_2 in V_2^0 übergehe, so lassen die Gleichungen (10) sich nach (14) nur durch $\xi_1^1 = \cdots = \xi_r^1 = 0$ erfüllen, und nach Satz I kann daher auch V_2^0 nur auf diese Weise zum Verschwinden gebracht werden.

Endlich wird uns auch noch der folgende Satz von Nutzen sein, den man unter Beachtung der Beziehungen $c_{ik\lambda} = c_{\lambda ki}, \cdots$ sofort als selbstverständlich erkennt, wenn man die Form der Bedingungen ins Auge fasst, welche nothwendig und hinreichend sind, um die Bedingung $V_3 = 0$ durch n lineare Substitutionen mit $n-r$ unabhängigen Variabeln $\eta_{r+1} \cdots \eta_n$:

$$\xi_i^1 = \sum_{r+1}^{n} {}^\mu \gamma^i{}_\mu \eta_\mu \ , \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

identisch zu erfüllen.

III. Wenn die n von einander abhängigen linearen homogenen Gleichungen:

$$\sum^i c_{ik} \xi_i^1 = 0 \ , \qquad k = 1, 2, \cdots n$$

die Gleichung nach sich ziehen:

$$\sum^i \sum^k \sum^\lambda c_{ik\lambda} \xi_i^1 \xi_k^1 \xi_\lambda^1 = 0 \ ,$$

so sind stets zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen:

$$\sum^i\sum^k\sum^\lambda c_{ik\lambda}\,\xi_i^1\,\xi_k^1\,\xi_\lambda^2 = 0$$

und

$$\sum^i\sum^k\sum^\lambda c_{ik\lambda}\,\xi_i^1\,\xi_k^2\,\xi_\lambda^3 = 0$$

blosse Folgen der $2n$, *resp. der* $3n$ *Gleichungen:*

$$\sum^i c_{ik}\,\xi_i^1 = 0\,,\quad \sum^i c_{ik}\,\xi_i^2 = 0\,,\quad \sum^i c_{ik}\,\xi_i^3 = 0\,.$$

§ 4.

Die vierte Variation.

Für alle Werthe der Variabeln ξ^1, welche die Gleichungen (10) erfüllen, verschwindet mit V_2^2 und V_3^2 nach Voraussetzung zugleich V_3^3, beginnt also die Entwickelung (8) mit dem Gliede 4. Ordnung

$$\tfrac{1}{4}\left(V_4^2 + \tfrac{1}{3}V_4^3 + \frac{1}{3\cdot 4}V_4^4\right)t^4\,.$$

In diesem hat sich wegen der Gleichungen (10) V_4^2 auf:

$$V_4^2 = \sum^i\sum^k c_{i\varkappa}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^2$$

reducirt, während V_4^3 und V_4^4 ihre ursprünglichen Werthe (7) beibehalten haben.

Soll daher der betrachtete Werth $f(a_1 \cdots a_n)$ ein Minimum der Function f sein, *so darf seine vierte Variation:*

$$(17)\qquad V_4 \equiv \sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^2 + \sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1 + \frac{1}{3\cdot 4}\sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda\sum^\mu c_{i\varkappa\lambda\mu}\,\xi_i^1\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1\,\xi_\mu^1$$

unter den Bedingungen (10) *für keine Werthe der n Variabeln* $\xi_1^2 \cdots \xi_n^2$ *negativ werden.*

Wir wollten uns aber auf den allgemeinen Fall beschränken, dass nun nicht wiederum eine neue Singularität eintreten sollte, oder, was auf dasselbe zurückkommt, wir frugen nur nach solchen Kriterien, welche das fragliche Minimum nicht blos für die gegebene Function $f(x_1 \cdots x_n)$ selbst, sondern gleichzeitig auch z. B. für die Function:

$$f_1(x_1 \cdots x_n) \equiv f(x_1 \cdots x_n) + \varphi_6(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$$

entscheiden, in der φ_5 irgend eine ganze homogene Function 5ten Grades ihrer Argumente ist, und so oft man V_4 zwar nicht negativ machen, wohl aber noch zum Verschwinden bringen könnte, würde sich offenbar die Function φ_5 immer so wählen lassen, dass jedenfalls f_1 an der Stelle $a_1 \cdots a_n$ kein Minimum erreicht.

Daher müssen wir geradezu verlangen, *dass der Ausdruck* (17), *der eine ganze, nicht homogene Function 2ten Grades der n willkürlichen Variabeln $\xi_1^2 \cdots \xi_n^2$ ist, für jedes gegebene Werthsystem $\xi_1^1 \cdots \xi_n^1$, das die Gleichungen* (10) *befriedigt und nicht aus lauter Nullen besteht, beständig positiv bleibe.*

Hierzu aber ist nothwendig und hinreichend, dass der kleinste Werth, den V_4 überhaupt anzunehmen vermag, für jedes solche Werthsystem der Variabeln ξ^1 positiv sei.

Nun müssen diejenigen Stellen $\xi_1^2 \cdots \xi_n^2$, an denen V_4 einen kleinsten Werth erreichen soll, nothwendig den n linearen Gleichungen genügen:

$$(18)\qquad \frac{\partial V_4}{\partial \xi_i^2} \equiv 2\sum^{\varkappa} c_{i\varkappa}\,\xi_\varkappa^2 + \sum^{\varkappa}\sum^{\lambda} c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1 = 0\,,$$

$$i = 1, 2, \cdots n\,,$$

und, weil die ξ^1 den Bedingungen (10) unterliegen, sind nach Satz II wiederum die $n-r$ letzten Gleichungen (18) blosse Folgen der r ersten. Sie bestimmen daher nur $\xi_1^2 \cdots \xi_r^2$ als Functionen von $\xi_{r+1}^2 \cdots \xi_n^2$ und ertheilen nach § 2 der Function V_4 einen von diesen $n-r$ letzten Variabeln unabhängigen Werth. Dieser Werth ist überdies, wiederum nach § 2, wirklich der kleinste, dessen die Function V_4 fähig ist, so oft seine zweite Variation:

$$\delta^2 V_4 \equiv \sum^{i}\sum^{\varkappa} \frac{\partial^2 V_4}{\partial \xi_i^2\,\partial \xi_\varkappa^2}\,\delta\xi_i^2\,\delta\xi_\varkappa^2$$

definit positiv wird, wenn man in ihr die Variationen $\delta\xi_\mu^2$ der unbestimmt gebliebenen Variabeln ξ_μ^2 gleich Null setzt. Diese Forderung ist aber bei unsern Voraussetzungen von selbst erfüllt. Denn wegen

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial \xi_i^2\,\partial \xi_\varkappa^2} \equiv 2\,c_{i\varkappa}$$

unterscheidet sich der Ausdruck $\delta^2 V$ nur in der Bezeichnung

seiner Variabeln und durch den Factor 2 von der zweiten Variation (9) unseres Functionswerthes $f(a_1 \cdots a_n)$.

Die Gleichungen (18) ergeben nun:

$$2\sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^2 + \sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1 = 0$$

und reduciren daher die Formel (17) auf die folgende:

$$(19)\qquad V_4 = \tfrac{1}{2}\Big\{\sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i^2\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1 + \frac{1}{2\cdot 3}\sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda\sum^\mu c_{i\varkappa\lambda\mu}\,\xi_i^1\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1\,\xi_\mu^1\Big\},$$

die man, unter V_4^0 und V_4^1 die Summen derjenigen Glieder von (17) verstanden, die in Bezug auf die Variabeln ξ^2 von der 0ten und von der 1ten Ordnung sind, so schreiben kann:

$$(19')\qquad V_4 = \tfrac{1}{2}V_4^1 + V_4^0.$$

Für unsere Forderung ist daher nothwendig und hinreichend [1]), dass der Werth, den der Ausdruck (19) durch die Gleichungen (18) erhält, stets > 0 bleibt.

Damit hat sich das folgende Resultat ergeben:

IV. Soll an einer Stelle $x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n$, welche unter der in § 1 angegebenen Voraussetzung den Bedingungen (3) genügt und für welche die zweite Variation des zugehörigen Functionswerthes $f(a_1 \cdots a_n)$

$$V_2 \equiv \sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}\,\xi_i^1\,\xi_\varkappa^1$$

sich als semidefinit positiv ausgewiesen hat, ein Minimum der gegebenen Function f eintreten, so muss mit der zweiten zugleich auch die dritte Variation

$$V_3 \equiv \sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i^1\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1$$

dieses Functionswerthes in Folge der n_1 von einander nicht unabhängigen Gleichungen

$$\frac{\partial V_2}{\partial \xi_\varkappa^1} = 0\,,\qquad \varkappa = 1, 2, \cdots n\,,$$

verschwinden, und wenn dies der Fall ist, so kann man nach Substitution der allgemeinsten Auflösungen dieser n Gleichungen

---

1) Letzteres wird in § 6 bei der Betrachtung der ganzen Functionen zweiten Grades noch weit anschaulicher hervortreten.

mit Hülfe der wiederum von einander abhängigen n Gleichungen (18) *die Variabeln* $\xi_1^2 \cdots \xi_n^2$ *vollständig aus der vierten Variation* (17) *oder, was dasselbe ist, aus dem Ausdrucke* (19) *eliminiren, der hierdurch übergeht in eine ganze homogene Function* 4ten *Grades von weniger als n Variabeln. Vermag dann diese ganze homogene Function* 4ten *Grades (oder direct die* 4te *Variation* (17) *unter den Bedingungen* (10)) *auch negative Werthe anzunehmen, so ist* $f(a_1 \cdots a_n)$ *sicher kein Minimum von f. Ist sie dagegen definit positiv, so erreicht die Function f auf allen Curven, in deren Gleichungen* (1) *die n ersten Reihencoefficienten* $\xi_1^1 \cdots \xi_n^1$ *nicht sämmtlich* $= 0$ *sind, im Punkte* $t = 0$ *stets ein Minimum.*

§ 5.

Das Kriterium IV ist hinreichend auch für das Minimum überhaupt

Nun fragt es sich aber wieder, ob bei der letzten Voraussetzung des Satzes IV unsere Function f auch auf allen Curven, deren Gleichungen:

$$x_i = \xi_i^1 t^m + \xi_i^2 t^{m+1} + \cdots, \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

mit einer beliebig hohen Potenz von t beginnen, an der Stelle $t = 0$ gleichfalls ein Minimum besitzt, d. h. also, ob alsdann auch für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe von $\xi_1^1 \cdots \xi_n^1$, welche die Gleichungen (10) erfüllen, die Entwickelung der Differenz $\Delta(t^{m-1})$ stets mit einem positiven Gliede gerader Ordnung beginnt?

Nach (5) und (6) ist nun:

$$(20) \quad \Delta(t^{m-1}) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\{ V_2^2 t^{2m} + V_2^3 t^{2m+1} + \cdots + V_h^2 t^{2m+h-2} + \cdots + V_{m+1}^2 t^{3m-1} \}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\{ (V_{m+2}^2 + \tfrac{1}{3} V_3^3) t^{2m} + \cdots + (V_{m+h}^2 + \tfrac{1}{3} V_{h+1}^3) t^{3m+h-2} + \cdots$$

$$+ (V_{2m+1}^2 + \tfrac{1}{3} V_{m+2}^3) t^{4m+1} \}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(V_{2m+2}^2 + \tfrac{1}{3} V_{m+3}^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} V_4^4 \right) t^{4m} + \cdots.$$

Nach Voraussetzung erfüllen aber die Variabeln ξ^1 die Gleichungen (10) und mit ihnen zugleich die Gleichung:

$$V_3^3 \equiv \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{i\varkappa\lambda} \xi_i^1 \xi_\varkappa^1 \xi_\lambda^1 = 0 .$$

Ueberdies ist nach (7)

$$V^2_{2g+1} \equiv 2\sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}(\xi_i^1\,\xi_\varkappa^{2g} + \xi_i^2\,\xi_\varkappa^{2g-1} + \cdots + \xi_i^g\,\xi_\varkappa^{g+1})\,,$$

$$V^2_{2g+2} \equiv 2\sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}(\xi_i^1\,\xi_\varkappa^{2g+1} + \xi_i^2\,\xi_\varkappa^{2g} + \cdots + \xi_i^g\,\xi_\varkappa^{g+2}) + \sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}\,\xi_i^{g+1}\,\xi_\varkappa^{g+1}\,,$$

und in V_ν^3 kommen keine ξ vor, deren oberer Index $> \nu - 2$ wäre. Aus den Formeln (7) ergiebt sich daher durch Anwendung des Satzes III sofort das Resultat:

V. Gelten für jedes $h \leqq g$ die n Gleichungen:

(21) $$\sum^i c_{i\varkappa}\,\xi_i^h = 0\,, \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots n\,,$$

so wird gleichzeitig auch:

$$V^2_2 = V^2_3 = \cdots = V^2_{2g+1} = 0$$

$$V^3_3 = V^3_4 = \cdots = V^3_{g+2} = 0\,,$$

während V^2_{2g+2} und V^3_{g+3} sich auf:

(22) $$\begin{cases} V^2_{2g+2} = \sum^i\sum^\varkappa c_{i\varkappa}\,\xi_i^{g+1}\,\xi_\varkappa^{g+1}\,, \\ V^3_{g+3} = \sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i^1\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^{g+1} \end{cases}$$

reduciren.

Dies vorausgeschickt seien die Gleichungen (21) nun eben für jedes $h \leqq g$ erfüllt.

Ist dann $2g + 1 < m + 1$, also $2g + 2 \leqq m + 1$, so erhält nach V die Entwickelung (20) das Anfangsglied gerader Ordnung:

(23) $$\frac{1}{2}\,V^2_{2g+2}\,t^{2m+2g}\,.$$

Ist zweitens $m + 1 \leqq 2g + 1 < 2m + 1$, d. h. $m \leqq 2g < 2m$, so hat man:

$$g - m < 0\,, \qquad m + 1 < 2g + 2 \leqq 2m + 1$$

und daher, $m + h = 2g + 2$ gesetzt:

$$h = 2g + 2 - m \geqq 2\,,$$

$$h + 1 = 2g + 3 - m < g + 3\,,$$

$$3m + h - 2 = 2m + 2g\,.$$

Wieder also beginnt die Entwickelung (20) mit dem Gliede (23).

Ist endlich $g = m$, so wird:

$$V_2^2 = V_3^2 = \cdots = V_{2m+1}^2 = V_3^3 = V_4^3 = \cdots = V_{m+2}^3 = 0,$$

und folglich jetzt:

$$(24) \qquad \frac{1}{2}\left(V_{2m+2}^2 + \frac{1}{3} V_{m+2}^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} V_4^4\right) t^{4m}$$

das Anfangsglied von $\Delta(t^{m-1})$.

Solange also $g < m$ bleibt, stellt sich immer das Anfangsglied (23) ein, das nach (22) nie negativ werden kann und nur dann verschwindet, wenn die Gleichungen (21) auch noch für $h = g + 1$ erfüllt werden. Für $g = m$ aber tritt an Stelle dieses semidefiniten Gliedes das Anfangsglied (24), in welchem nach (22) der Factor von $\frac{1}{2} t^{4m}$ bis auf die Bezeichnung eines Theils der Variablen vollständig mit der vierten Variation (17) übereinstimmt, und welches daher (unabhängig davon, ob man die Gleichungen (21) auch noch für $h > m$ gelten lässt oder nicht) für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe der Variabeln ξ^1, welche die Bedingungen (10) erfüllen, beständig positiv bleibt, so oft dasselbe von der vierten Variation V_4 gilt.

Hiermit haben wir als Endresultat unserer allgemeinen Untersuchung den Satz gewonnen:

VI. Sind die sonstigen Voraussetzungen des Satzes IV erfüllt, und ist überdies für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe der ξ^1, welche die Gleichungen (10) erfüllen, die vierte Variation (17) eine beständig positive Function der Variabeln ξ^2, oder, was nach dem Vorhergehenden dasselbe besagt, ist ausserdem diejenige ganze homogene Function 4ten Grades von weniger als n Variabeln definit positiv, welche man erhält, wenn man nach Substitution der allgemeinsten Auflösungen der Gleichungen (10) die Variabeln ξ^2 mit Hülfe der Gleichungen (18) aus dem Ausdrucke (19) eliminirt, so erreicht die gegebene Function f überhaupt auf allen Curven (1) im Punkte $t = 0$ stets ein Minimum und daher ist alsdann im Sinne unserer Grunddefinition jedenfalls $f(a_1 \cdots a_n)$ sicher ein Minimum von f.

§ 5.

Beispiele und Bemerkungen.

Um diese Kriterien auf einen gegebenen Fall anzuwenden, wird man selbstverständlich in der Regel die Variationen V_2,

V_3, V_4 nicht unmittelbar aus den allgemeinen Formeln (9), (13), (17) berechnen, sondern man wird bequemer successive so verfahren, dass man zuerst durch directe Ausführung der Entwickelung

$$f(a_1+\xi_1^1 t, \cdots, a_n+\xi_n^1 t) - f(a_1 \cdots a_n)$$
$$= \frac{1}{2} V_2 t^2 + \frac{1}{2\cdot 3} V_3 t^3 + \cdots$$

V_2 und V_3 ermittelt und damit verificirt, ob auch wirklich V_2 semidifinit positiv ist und V_3 zugleich mit V_2 verschwindet.

Hat man dann die allgemeinsten Werthe:

$$\xi_1^1 = \zeta_1, \cdots, \xi_n^1 = \zeta_n$$

gefunden, welche die Forderung $V_2 = 0$ oder die n Gleichungen

(10) $$\frac{\partial V_2}{\partial \xi_k^1} = 0$$

erfüllen, so liefert die Entwickelung der Differenz:

$$f(a_1+\zeta_1 t+\xi_1^2 t^2, \cdots, a_n+\zeta_n t+\xi_n^2 t^2) - f(a_1 \cdots a_n)$$

durch ihr Anfangsglied $\frac{1}{2} V_4 t^4$ unmittelbar die 4te Variation V_4, und man hat nun schliesslich, falls das Zeichen von V_4 sich nicht unmittelbar erkennen lässt, mit Hülfe der n Gleichungen

$$\frac{\partial V_4}{\partial \xi_i^2} = 0$$

und eventuell der Formel

(19') $$V_4 = \frac{1}{2} V_4^1 + V_4^0$$

den kleinsten Werth von V_4 zu berechnen und sein Vorzeichen zu untersuchen. So oft dieser kleinste Werth eine *definite* oder *indefinite* Function derjenigen unabhängigen Variabeln ist, in welchen man die allgemeinen Auflösungen der Gleichungen (10) ausgedrückt hatte, geben die Sätze IV und VI sichern Aufschluss darüber, ob nicht nur die gegebene Function $f(a_1 \cdots a_n)$ selbst, sondern mit ihr zugleich auch jede andere Function $f_1(a_1 \cdots a_n)$, für welche die Differenzen:

$$f(a_1+k_1, \cdots a_n+k_n) - f(a_1 \cdots a_n)$$

und

$$f_1(a+k_1, \cdots a_n+k_n) - f_1(a_1 \cdots a_n)$$

sich erst in den Entwicklungsgliedern 5ter und höherer Ordnung unterscheiden, an der Stelle $a_1 \cdots a_n$ ein wirkliches Minimum erreicht oder nicht. Offen bleibt diese Frage und zwar schon für die gegebene Function selbst nur in dem Falle, wo jener kleinste Werth wiederum semidefinit positiv ausfallen sollte.

Im Folgenden mögen zunächst diese Kriterien an einigen einfachen und bekannten Beispielen erprobt und erläutert werden, bei denen immer die zu untersuchende Stelle der Nullpunkt ist und die Function selbst hier den Werth Null erhält, so dass man $\frac{1}{2}V_2$ und $\frac{1}{2\cdot 3}V_3$ unmittelbar durch Vertauschung der Variabeln x mit den entsprechenden Variabeln ξ^1 aus den beiden ersten Gliedern der Function erhält. Der Bequemlichkeit halber schreibe ich jedoch jetzt ξ_i für ξ_i^1, und η_i für ξ_i^2.

1. $f(x_1\, x_2) = x_1^2 - (p^2 + q^2)x_1 x_2^2 + p^2 q^2 x_2^4, \quad p^2 \mp q^2.$ [1])

Hier ist:

$$\tfrac{1}{2}V_2 = \xi_1^2, \quad \frac{1}{2\cdot 3}V_3 = -(p^2+q^2)\xi_1\xi_2^2 .$$

Beide verschwinden für $\xi_1 = 0$ und man erhält:

$$f(\eta_1 t^2, \xi_2 t) = (\eta_1^2 - (p^2+q^2)\eta_1\xi_2^2 + p^2q^2\xi_2^4)t^4,$$

also

$$\tfrac{1}{2}V_4 = \eta_1^2 - (p^2+q^2)\eta_1\xi_2^2 + p^2q^2\xi_2^4 .$$

Die Gleichung $\frac{\partial V_4}{\partial \eta_1} = 0$ liefert

$$\eta_1 = \frac{p^2+q^2}{2}\xi_2^2$$

und damit:

$$V_4 = -(p^2+q^2)\eta_1\xi_2^2 + 2p^2q^2\xi_2^4 = -\frac{(p^2-q^2)^2}{2}\xi_2^4$$

als kleinsten Werth von V_4. Dieser Werth ist negativ. Daher hat nicht nur die gegebene Function selbst, sondern auch jede andere Function, welche aus ihr durch Vermehrung um Glieder 5ter und höherer Ordnung entsteht, im Nullpunkte weder ein Minimum noch ein Maximum. —

---

1) *Sch.* § 8, 1. (Peano'sches) Beispiel.

2. $$f(x_1 x_2) = x_1^2 - x_1^3 + x_2^4 - x_1 x_2^2 \,.$$ [1]

Hier werden:

$$\tfrac{1}{2} V_2 = \xi_1^2 \,, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} V_3 = -\xi_1^3$$

wiederum beide $= 0$ für $\xi_1 = 0$, und

$$f(\eta_1 t^2, \xi_2 t) = (\eta_1^2 + \xi_2^4) t^4 - \cdots,$$

sodass $\frac{1}{2} V_4 = \eta_1^2 + \xi_2^4$ sich schon ohne Weiteres als bestimmt positiv darstellt. Die gegebene Function, sowie jede andere, die in den Gliedern 1ter bis 4ter Ordnung mit ihr übereinstimmt, erreicht also im Nullpunkte ein sicheres Minimum. —

3. $$f(x_1 x_2) = x_1^2 - 2\, x_1 x_2^2 + x_2^4 \pm x_1^4 \,.$$ [2]

$$\tfrac{1}{2} V_2 = \xi_1^2 \,, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} V_3 = -2\,\xi_1 \xi_2^2$$

verschwinden beide für $\xi_1 = 0$. Es wird aber:

$$f(\eta_1 t^2, \xi_2 t) = (\eta_1^2 - 2\eta_1 \xi_2^2 + \xi_2^4) t^4 \pm \eta_1^4 t^8,$$

also kann $\frac{1}{2} V_4 = (\eta_1 - \xi_2^2)^2$ zwar nie negativ werden, wohl

---

1) SERRET-HARNACK II, 1, p. 380. Das Kriterium, welches HARNACK dort für das Minimum in dem betrachteten Ausnahmefalle angiebt, verlangt, dass

$$\text{Lim} \frac{V_3}{V_2} = 0$$

werde, wie man auch die Variabeln $\xi_1^1 \cdots \xi_n^1$ sich der Grenze Null möge nähern lassen, und dass überdies V_4^1 (nicht V_4) für diejenigen Werthe dieser Variabeln, welche $V_2 = 0$ machen, beständig positiv bleibe. Dies Kriterium ist indess, was bereits SCHEEFFER seiner Zeit mir brieflich mittheilte, nur hinreichend, nicht zugleich auch nothwendig. So wird z. B. für die Function

$$f(x_1 x_2) = x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2^4 \equiv \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x^4 ,$$

welche nach VI im Nullpunkte ein Minimum von derselben Natur wie das Beispiel 2. besitzt,

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{\xi_1 \xi_2^2}{\xi_1^2} = \frac{\xi_2^2}{\xi_1}$$

und die Forderung $\text{Lim} \frac{V_1}{V_2} = 0$ hier also nicht erfüllt.

2) *Sch.* § 8, 4. Beispiel.

aber noch verschwinden, und wir haben einen solchen Fall vor uns, in welchem unsere Kriterien versagen.

Man braucht aber die gegebene Function nur in der Form zu schreiben

$$f(x_1 x_2) = (x_1 - x_2^2)^2 \pm x_1^4\,,$$

um unmittelbar zu erkennen, dass dieselbe im Nullpunkte ein oder kein Minimum besitzt, jenachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt. Dies gilt aber nur für die gegebene Function selbst, nicht mehr gleichzeitig auch für jede Function, die mit ihr die Glieder 1ter bis 4ter Ordnung gemein hat. In der That erreicht von den beiden Functionen:

$$f_1(x_1 x_2) = (x_1 - x_2^2)^2 + x_1^4 - x_2^6\,,$$

und

$$f_2(x_1 x_2) = (x_1 - x_2^2)^2 - x_1^4 + x_2^6$$

die erste kein, die zweite dagegen ein Minimum im Nullpunkte.

Dass bei Annahme des unteren Zeichens die gegebene Function selbst hier kein Minimum besitzt, lehrt auch unmittelbar die Formel:

$$f(\xi_2^2 t^2, \xi_2 t) = \pm \xi_2^8 t^8\,.$$

Dagegen darf man diese Formel jedenfalls nicht ohne Weiteres als ein sicheres Kennzeichen des Minimums der gegebenen Function im Falle des obern Zeichens ansehen.

In solchen Fällen, *wo auch die vierte Variation wiederum sich semidefinit positiv verhält*, tritt nämlich, wenn auch wohl noch nicht bei den ganzen Functionen 4ten Grades, *eine neue Eigenthümlichkeit* auf.

In der That, während es bei unserer Beschränkung auf diejenigen Fälle, in denen nur die zweite Variation semidefinit ist, nach §§ 4 und 5 ausreicht, das Verhalten der gegebenen Function im Punkte $t = 0$ auf allen denjenigen Curven zu erkennen, *in deren Gleichungen* (1) *die n ersten Coefficienten $\xi_1^1 \cdots \xi_n^1$ nicht sämmtlich Null sind*, gilt dagegen nicht nothwendig mehr dasselbe, so oft sich dieser ersten Singularität noch andere höhere Singularitäten hinzugesellen, d. h. wenn im Punkte $t = 0$ das Minimum der gegebenen Function *auf allen Curven dieser besonderen Classe* sich erst durch Hinzuziehung solcher Entwicklungsglieder der Differenz D, *deren Ordnung > 4 ist*, sicher nachweisen lässt, so braucht dieses

Minimum deshalb doch noch durchaus nicht *auch überhaupt auf allen Curven* (1) einzutreten; daher denn das Minimum auf allen Curven der ersten Art auch noch keineswegs das Minimum im Raume $x_1 \cdots x_n$ selbst irgendwie sichert.

Entwickelt man z. B. die Function 6ten Grades:

$$f(xy) = x^4 - (p^2 + q^2)x^2 y^3 + p^2 q^2 y^6 ,$$

nachdem man darin:

$$(1') \qquad x = \xi t + \xi_1 t^2 + \cdots , \quad y = \eta t + \eta_1 t^2 + \cdots$$

gesetzt hat, nach steigenden Potenzen von t, so erhält man, so lange ξ und η nicht gleichzeitig verschwinden, stets ein positives Anfangsglied gerader Ordnung, nämlich $\xi^4 t^4$, wenn $\xi \neq 0$, und $p^2 q^2 \eta^6 t^6$, wenn $\xi = 0$ ist.

Auf allen Curven (1′), in denen ξ und η nicht beide $= 0$ sind, erreicht also die Function $f(xy)$ im Punkte $t = 0$ stets ein Minimum. Es wird aber:

$$f(\xi_2 t^3, \eta_1 t^2) = (\xi_2^4 - (p^2 + q^2)\xi_2^2 \eta_1^3 + p^2 q^2 \eta_1^6) t^{12} ,$$

und die biquadratische Function von ξ_2

$$W = \xi_2^4 - (p^2 + q^2)\xi_2^2 \eta_1^3 + p^2 q^2 \eta_1^6$$

erhält durch die aus dem Ansatze $\frac{\partial W}{\partial \xi_2} = 0$ folgende Substitution:

$$\xi_2^2 = \frac{p^2 + q^2}{2} \eta_1^3$$

den negativen Werth

$$W = -\frac{(p^2 - q^2)^2}{4} \eta_1^6 .$$

Es giebt also Curven von der analytischen Form:

$$x = \xi_2 t^3 , \quad y = \eta_1 t^2 ;$$

auf denen unsere Function im Nullpunkte nicht mehr ein Minimum, sondern ein Maximum erreicht.

Ja die Function:

$$f(xy) = x^{2m} - (p^2 + q^2) x^m y^{m+1} + p^2 q^2 y^{2m+2}$$

zeigt sogar die Eigenthümlichkeit, dass sie erst dann, wenn man in jeder der beiden Reihen (1′) die sämmtlichen m ersten Coefficienten $= 0$ setzt, auf den Curven (1′) im Nullpunkte nicht mehr stets ein Minimum besitzt.

§ 6.

Vollständige Erledigung der Theorie für die ganzen Functionen zweiten und dritten Grades.

Es sind aber nicht bloss diese Complicationen, welche eine Weiterführung unserer früheren allgemeinen Untersuchung jedenfalls ausserordentlich erschweren und es fast aussichtslos erscheinen lassen, auf diesem Wege die Theorie des Maximums und Minimums der Functionen von n Variabeln allmählich zu einem befriedigenden Abschlusse bringen zu können. Denn in dem Ausnahmefalle, wo auch die vierte Variation sich wiederum semidefinit positiv verhält, wird es voraussichtlich schon nicht ganz leicht sein, diejenigen, nicht mehr linearen Substitutionen allgemein zu ermitteln, welche V_2 und V_4 gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Daher dürfte die allgemeine Erledigung dieses Falles bereits für die ganzen Functionen 4ten Grades ziemliche Schwierigkeiten darbieten.

Dagegen reichen die vorhergehenden Betrachtungen, vor allem die Resultate des § 2 noch vollständig aus zur Beantwortung der Frage, wann eine gegebene ganze Function 2ten oder 3ten Grades $f(x_1 \cdots x_n)$ an einer solchen Stelle $a_1 \cdots a_n$ wirklich einen kleinsten Werth erreicht, für welche in der Entwickelung der Differenz D die Glieder erster Ordnung identisch verschwinden und die Glieder zweiter Ordnung eine semidefinit positive Form bilden; und diese specielle Untersuchung ist auch deshalb wichtig, weil sie in ihrem ersten Theile den inneren Grund der Resultate, die in § 4 über die vierte Variation erhalten wurden, klar zu Tage treten lässt.

Bei einer ganzen Function *zweiten Grades*

$$2f \equiv a + 2\sum\nolimits^i b_i x_i + 2\varphi \tag{25}$$

kann der fragliche Fall nur eintreten, wenn die Glieder zweiter Ordnung

$$2\varphi \equiv \sum\nolimits^i\sum\nolimits^\varkappa c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa\,, \quad c_{i\varkappa} = c_{\varkappa i}$$

selbst eine semidefinit positive Form bilden, und dann sind nach Satz I die n linearen homogenen Functionen $\varphi' x_1, \cdots \varphi' x_n$ von einander abhängig. Man hat also etwa:

(26) $$\varphi' x_\mu \equiv \sum_1^r {}_\varrho \gamma_\varrho^\mu \varphi' x_\varrho\,, \quad \mu = r+1 \cdots n\,,$$

während $\varphi' x_1, \cdots \varphi' x_r$ unabhängig von einander sind.

Soll daher die Function überhaupt einen kleinsten Werth erreichen können, d. h. soll es möglich sein, den n linearen Gleichungen

(3) $$f' x_1 = 0\,, \quad f' x_2 = 0\,, \quad \cdots \quad f' x_n = 0$$

zu genügen durch endliche Werthe von $x_1, x_2 \cdots x_n$, so muss nothwendig gleichzeitig auch

(27) $$f' x_\mu \equiv \sum_1^r {}_\varrho \gamma_\varrho^\mu f' x_\varrho\,, \quad \mu = r+1\,, \cdots n$$

sein. Dann aber haben wir eben den in § 2 behandelten besonderen Fall vor uns, und daher ist der Werth, den die Function f durch die r unabhängigen Gleichungen:

$$f' x_1 = 0\,, \cdots f' x_r = 0$$

erhält, sicher der kleinste Werth, den diese Function überhaupt anzunehmen vermag.

Der innere Grund dieses Resultates liegt darin, dass bei unsern Voraussetzungen sich f überhaupt auf eine blosse Function der r unabhängigen Variabeln

(28) $$\varphi' x_h = y_h\,, \qquad h = 1, 2, \cdots r$$

reducirt. Die Theorie der vollständigen Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen lehrt, dass eine ähnliche Reduction überhaupt für jede Function f möglich ist, deren erste partielle Differentialquotienten Relationen von der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \sum_1^r {}_\varrho \psi_\varrho^\mu (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}\,, \qquad \mu = r+1, \cdots n\,,$$

identisch erfüllen. Im vorliegenden Falle lässt sich aber der behauptete, übrigens wohl nicht neue Satz auch ganz elementar so beweisen:

Die Voraussetzungen (27), welche die ursprünglichen Annahmen (26) von selbst einschliessen, zerfallen nach (25) in die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}&(29)\quad c_{i\mu}=\sum_1^r{}^{\varrho}\,\gamma_\varrho^{\mu}\,c_{i\varrho}\,, \\ &(30)\quad b_\mu=\sum_1^r{}^{\varrho}\,\gamma_\varrho^{\mu}\,b_\varrho\,,\end{aligned}\right|\quad\begin{aligned}&i=1,2,\cdots n\quad, \\ &\mu=r+1,\cdots n\,.\end{aligned}$$

Durch die Relationen (26) und (30) geht aber

$$2f\equiv a+2\sum{}^i b_i x_i+\sum{}^i x_i\,\varphi' x_i$$

über in

$$(31)\qquad 2f\equiv a+\sum_1^r{}^{\varrho}\,(\varphi' x_\varrho+2b_\varrho)\Big(x_\varrho+\sum_{r+1}^n{}^{\mu}\,\gamma_\varrho^{\mu}\,x_\mu\Big)\,,$$

und nach (29) lassen sich die r Gleichungen (28) so schreiben:

$$\varphi' x_h\equiv\sum_1^r{}^{\varrho}\,c_{h\varrho}\Big(x_\varrho+\sum_{r+1}^n{}^{\mu}\,\gamma_\varrho^{\mu}\,x_\mu\Big)=y_h\,.$$

Nach Voraussetzung sind diese r Gleichungen von einander unabhängig, also ist, wie bereits in § 3 behauptet wurde, nothwendig ihre Determinante:

$$\sum\pm c_{11}c_{22}\cdots c_{rr}\neq 0\,,$$

und die Gleichungen bestimmen die r Unbekannten:

$$x_\varrho+\sum_{r+1}^n{}^{\mu}\,\gamma_\varrho^{\mu}\,x_\mu$$

also blosse Functionen von $y_1\cdots y_r$, verwandeln daher auch den Ausdruck (31) in eine blosse Function dieser r Variabeln.—

Anders dagegen liegt der Fall bei den ganzen Functionen *dritten Grades.*

Sei nämlich $f(x_1\cdots x_n)$ jetzt eine gegebene ganze Function dritten Grades und $x_1=a_1\cdots x_n=a_n$ irgend ein Werthsystem der n Unbekannten x, welches die n Gleichungen (3) befriedigt.

Dann hat man:

$$(32)\qquad\begin{aligned}&f(a_1+\xi_1^1,\cdots,a_n+\xi_n^1)\\ &\equiv f(a_1\cdots a_n)+\tfrac{1}{2}V_2+\frac{1}{2\cdot 3}V_3\,,\end{aligned}$$

wo V_2 und V_3 die alten Werthe haben:

(9) $$V_2 \equiv \sum^i \sum^\varkappa c_{i\varkappa} \xi_i^1 \xi_\varkappa^1 ,$$

(13) $$V_3 \equiv \sum^i \sum^\varkappa \sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda} \xi_i^1 \xi_\varkappa^1 \xi_\lambda^1 ,$$

und es fragt sich nur noch, welche Bedingungen sind in dem Falle, dass die zweite Variation V_2 semidefinit positiv ist, für einen kleinsten Werth der Function f an der Stelle $a_1 \cdots a_n$ nothwendig und hinreichend?

Nach § 3 muss dann zunächst die Gleichung $V_3 = 0$ eine blosse Folge derselben Gleichungen

(10) $$\frac{1}{2} \frac{\partial V_2}{\partial \xi_i^1} \equiv \sum^\varkappa c_{i\varkappa} \xi_\varkappa^1 = 0 , \qquad i = 1, \cdots n$$

sein, in welche die Forderung $V_2 = 0$ zerfällt, und von denen wiederum nur die r ersten von einander unabhängig sein mögen. Ueberdies aber darf die vierte Variation, die sich nach (17) jetzt auf:

(33) $$V_4 = \sum^i \sum^\varkappa c_{i\varkappa} \xi_i^2 \xi_\varkappa^2 + \sum^i \sum^\varkappa \sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda} \xi_i^2 \xi_\varkappa^1 \xi_\lambda^1$$

reducirt, unter den Bedingungen (10) für keine Werthe der ξ^2 negativ werden. Daher ist, auch wenn V_3 gleichzeitig mit V_2 verschwindet, $f(a_1 \cdots a_n)$ doch sicher kein kleinster Werth von f, falls die Gleichungen (10) nicht etwa auch noch die n Gleichungen nach sich ziehen:

(34) $$\sum^\varkappa \sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda} \xi_\varkappa^1 \xi_\lambda^1 = 0 , \qquad i = 1, 2, \cdots n .$$

Denn jedem gegebenen Werthsysteme der ξ^1, das die Gleichungen (10), nicht aber zugleich auch die Gleichungen (34) erfüllt, kann man solche Werthe

$$\xi_i^2 = \eta_i t$$

der Variabeln ξ_i^2 zuordnen, dass der Ausdruck (33) die Form erhält

$$V_4 = At + Bt^2 ,$$

in der $A \neq 0$ ist, und dieser Werth von V_4 wechselt sein Zeichen, wenn man t durch Null hindurchgehen lässt. In dieser Weise verhält sich die Function

$$f(x_1 x_2) = x_1^2 + x_1 x_2^2 \,[1]$$

im Nullpunkte.

Andererseits folgt aus (13) durch totale Differentiation:

1) *Sch.* § 8, 2. Beispiel.

$$dV_3 = 3\sum^i\sum^\varkappa\sum^\lambda c_{i\varkappa\lambda}\,\xi_\varkappa^1\,\xi_\lambda^1\,d\xi_i^1$$

und daher lassen sich die Gleichungen (34) so schreiben:

$$\frac{\partial V_3}{\partial \xi_i^1} = 0\,.$$

Sind also auch die Gleichungen (34) wiederum nur Folgen der Gleichungen (10), so ziehen nach (32) die letzteren überhaupt die n Gleichungen nach sich:

$$\frac{\partial f(a_1 + \xi_1^1, \cdots, a_n + \xi_n^1)}{\partial \xi_i^1} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_i^1} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_i^1} = 0$$

und daher werden die n Gleichungen $f'x_i = 0$ durch jedes Werthsystem der n Unbekannten $x_1 \cdots x_n$ befriedigt, welches die n Gleichungen erfüllt:

$$\sum^\varkappa c_{i\varkappa}(x_\varkappa - a_\varkappa) = 0\,.$$

Diese n Gleichungen bestimmen aber nur $x_1 - a_1, \cdots, x_r - a_r$ als Functionen von $x_{r+1} - a_{r+1}, \cdots, x_n - a_n$. Das betrachtete Wurzelsystem $x_i = a_i$ gehört jetzt also nothwendig einer solchen Auflösung der Gleichungen (3) an, welche ursprünglich $x_{r+1} \cdots x_n$ unbestimmt gelassen hatte. Wieder also tritt nunmehr der besondere Fall von § 2 ein, und da nach Voraussetzung V_2 definit positiv wird, wenn man $\xi_{r+1}^1, \cdots, \xi_n^1 = 0$ setzt, so ist der von $x_{r+1} \cdots x_n$ unabhängige Werth, den f bei dieser Auflösung der Gleichungen (3) erhält, an der betrachteten Stelle $a_1 \cdots a_n$ insofern sicher ein kleinster Werth der Function, als dieselbe in der Umgebung dieser Stelle kleinere Werthe nicht anzunehmen vermag.

Aber einerseits ist jener Werth von f nun nicht mehr der kleinste, dessen die Function überhaupt fähig ist, und andererseits geht aus dem Beispiele:

$$f(x_1 x_2) = x_1^2 + x_1^2 x_2\,,$$

für welches der auf der ganzen Geraden $x_1 = 0$ eintretende Nullwerth im Intervall $x_2 > -1$ ein kleinster (und im Intervall $x_2 < -1$ ein grösster) Werth ist, unmittelbar hervor, dass der Eintritt eines solchen kleinsten Werthes hier, bei den Functionen dritten Grades, schon nicht mehr, wie bei den Functionen zweiten Grades, nothwendig an die Bedingung gebunden ist, dass sich die gegebene Function durch weniger als n unabhängige Variable ausdrücken lassen muss. —

Nachtrag.

Die vorstehende Arbeit war bereits im Satz begriffen, als ich von Herrn Stolz den, in den Wiener Sitzungsberichten vom November 1891 veröffentlichten Nachtrag zu seiner Abhandlung über die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen erhielt. Daher konnte ich diesem neuesten Aufsatze im Vorhergehenden selbst nicht mehr die Berücksichtigung angedeihen lassen, die er entschieden verdient, und muss mich jetzt darauf beschränken, nachträglich hervorzuheben, dass durch denselben nun allerdings wohl ein Weg vorgezeichnet sein dürfte, auf welchem man, wenn auch natürlich erst nach einer sehr grossen Anzahl von Einzeluntersuchungen, schliesslich doch stets zur Entscheidung des Maximums oder Minimums muss gelangen können. Dabei ist mir der Umstand mit am Merkwürdigsten, dass, während alle neueren Methoden mehr oder weniger versagen, es gerade das älteste Verfahren ist, welches zum sicheren Ziele zu führen scheint. Der Grundgedanke nämlich, dass man, um die Minima einer Function von x und y zu finden, erst ihre Minima bei constanten x, und hierauf diejenigen Stellen x aufsucht, an welchen diese Minimalwerthe selbst wieder ein Minimum erreichen, ist ja derselbe, den bereits Lagrange (am Klarsten in der Theorie des fonctions, II, No. 51) benutzt hat, um seine Kriterien des Maximums und Minimums abzuleiten und damit einen Fehler Euler's zu berichtigen.

SITZUNG AM 1. FEBRUAR 1892.

C. Neumann, *Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik.*

Will man über die vielfachen und zum Theil weitgehenden Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik eine ungefähre Uebersicht erhalten, so hat man hinzublicken auf die Untersuchungen von Poiseuille, Helmholtz, Kirchhoff, Boltzmann, Bjerknes und Riecke. Dabei tritt sofort zu Tage, dass diese Analogien in zwei weit auseinander liegende Kategorien zerfallen, nämlich *erstens* in solche, bei denen, wie z. B. beim Poiseuille'schen Gesetz (über die Bewegung des Wassers in Röhren), die Reibung der Flüssigkeit eine wesentliche Rolle spielt, und *zweitens* in solche, bei denen die Reibung als Null zu betrachten ist, wie z. B. in den Untersuchungen von Helmholtz, Kirchhoff und Boltzmann.

Der hier vorliegende Aufsatz wird ausschliesslich die Analogien zweiter Kategorie zum Gegenstand haben.

Auf solche Analogien dürfte zum ersten Male wohl aufmerksam gemacht worden sein durch die bekannte *Helmholtz*sche Abhandlung über *Wirbelbewegungen*; (1858, Crelle's J. Bd. 55, Seite 25).

Sodann aber sind später derartige Analogien auch bei *wirbelfreien* Bewegungen entdeckt worden; und zwar von *Kirchhoff* in seinem Aufsatz über die Kräfte, welche *zwei unendlich dünne Ringe* in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben; (1869, Crelles J., Bd. 71, Seite 263).

Die überraschend einfachen und schönen Resultate, zu denen Kirchhoff in diesem Aufsatz gelangte, haben zu mancherlei Ideen Veranlassung gegeben. Namentlich aber haben sie

eine höchst interessante Abhandlung von *Boltzmann* hervorgerufen (1870, Crelle's J., Bd. 73, Seite 111), in welcher eine Ausdehnung der Kirchhoff'schen Resultate auf Ringe von *beliebigem* Querschnitt, womöglich auch auf *Körper von ganz beliebiger Gestalt* angestrebt wird. Insbesondere verdanken wir dieser Boltzmann'schen Abhandlung auch die höchst wichtige Bemerkung (l. c. Seite 128), dass das Hamilton'sche Princip in seiner gewöhnlichen (z. B. von Thomson und Tait benutzten) Form auf die Bewegung einer Flüssigkeit nur dann anwendbar sei, wenn der von der Flüssigkeit erfüllte Raum $\mathfrak{R}$ *einfach* zusammenhängend ist, und dass man zu *unrichtigen* Resultaten gelangen würde, wenn man das Princip in jener Form auf den Fall eines *mehrfach* zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ anwenden wollte.

Ob es überhaupt *möglich* sei, dem Princip eine Form zu geben, in der es ohne Ausnahme auf *alle* Fälle anwendbar wäre, — diese Frage blieb dabei völlig offen.

Nach vielen Bemühungen ist es mir gelungen, diese Frage zum Austrag zu bringen, sie *bejahend* zu beantworten, und die verlangte allgemeine Form des Princips wirklich hinzustellen. Man vergleiche meine hydrodynamischen Untersuchungen (1883, Verlag von Teubner, Seite 63).

Nach Ausfüllung dieser Lücke habe ich nun seit längerer Zeit jene von *Kirchhoff* und *Boltzmann* entdeckten und inzwischen auch von *Riecke* (1887, Math. Annal. Bd. 32) in Betracht gezogenen Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik zum Gegenstande eingehender Studien gemacht. Die hierbei gewonnenen Resultate beabsichtige ich hier — *ohne* Angabe der Beweise — in möglichster Genauigkeit darzulegen. Dabei habe ich der wesentlichen Dienste, die mir die Boltzmann'schen Untersuchungen theils als Stütze, theils als Anregung, geleistet haben, mit grösster Anerkennung zu gedenken.

§ 1.

Das zu betrachtende materielle System.

Es seien $(n+1)$ starre Körper $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ gegeben. Der Körper $\mathfrak{K}_0$ enthalte in seinem Innern einen Hohlraum. Und die Begrenzungsfläche dieses Hohlraumes d. i. die *innere* Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}_0$ sei mit σ_0 bezeichnet. Andererseits mögen

die *äussern* Oberflächen der Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ mit σ_1, $\sigma_2, \ldots \sigma_n$ bezeichnet sein. Jede dieser $(n+1)$ Flächen σ ist *beliebig*, also im Allgemeinen eine *mehrfach* zusammenhängende. Uebrigens sollen, wie aus dem Folgenden sofort ersichtlich werden wird, die Flächen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ eine gewisse *Kleinheit* besitzen im Vergleich mit σ_0.

Der Hohlraum des Körpers $\mathfrak{K}_0$ enthalte nämlich eine *incompressible Flüssigkeit.* Und innerhalb dieser mögen — wie einzelne Inseln — die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ gedacht werden; der Art, dass jener Hohlraum durch die Flüssigkeit und die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ *vollständig* ausgefüllt ist. Alsdann wird offenbar der von der Flüssigkeit selbst occupirte Raum $\mathfrak{R}$ durch die $(n+1)$ Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ *vollständig* begrenzt sein.

§ 2.

Die Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$.

Auf einer solchen Fläche σ wollen wir — und zwar innerhalb der Flüssigkeit — in Gedanken eine kleine menschliche Figur fortschreiten lassen, und dieser Figur entsprechend die Worte »links« und »rechts« anwenden. Ist z. B. auf der Fläche σ eine Curve von bestimmter Richtung gezogen, und lassen wir jene kleine Figur längs dieser Curve und in der Richtung derselben fortwandern, so soll unter der *linken* Seite der Curve diejenige verstanden werden, welche jene Figur bei ihrer Wanderung zur *Linken* hat. U. s. w.

Ist also die Richtung einer auf σ gezeichneten Curve gegeben, so bestimmen sich, mittelst dieser Regel, sofort die linke und rechte Seite der Curve oder (nach Riemann'scher Ausdrucksweise) das linke und rechte *Ufer* derselben. — Und umgekehrt: Sind für eine auf σ gezeichnete Curve die linke und rechte Seite gegeben, so bestimmt sich, mittelst jener Regel, sofort die Richtung der Curve.

Sind auf der Fläche σ *zwei* Curven s_1 und s_2 gezeichnet, jede von bestimmter Richtung, so mag unter dem Symbol

$$(1) \qquad [s_1, s_2]$$

eine gewisse den beiden Curven zugehörige ganze Zahl verstanden werden. Ueberschreitet nämlich s_1 die Curve s_2 im Ganzen $(L+R)$mal, und zwar Lmal vom rechten zum *linken*, anderer-

seits aber R mal vom linken zum *rechten* Ufer, so soll

$$[s_1, s_2] = L - R$$

sein. Aus dieser Definition entspringt, beiläufig bemerkt, sofort die Formel:

(1 a) $$[s_1, s_2] = -[s_2, s_1].$$

Jede Fläche σ ist, wie schon betont wurde, im Allgemeinen mehrfach zusammenhängend. Die Schnitte oder Curven, deren es bedarf, um eine solche Fläche σ in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln, mögen — genau in der Riemann'schen Art und Weise — mit a, b, c bezeichnet sein; so dass also jede der Curven a, b *geschlossen*, hingegen jede der Curven c *ungeschlossen* ist. [In meinen Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie (zweite Auflage, Seite 184) findet man eine schematische Darstellung dieser Curven a, b, c.] Auch mögen all' diesen Curven a, b, c — genau in der Riemann'schen Art und Weise — bestimmte Richtungen zuertheilt sein. Ferner mögen, der Bequemlichkeit willen, die Curven a, b die *Hauptcurven* genannt, andrerseits aber die Curven c (als weiterhin überflüssig) wieder gelöscht werden.

Schliesslich wollen wir uns die Hauptcurven a, b der Reihe nach für *sämmtliche* Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ construirt denken, und all' diese Curven zusammengenommen kurzweg mit a, b bezeichnen.

§ 3.

Der von der Flüssigkeit eingenommene Raum $\mathfrak{R}$.

Dieser von den Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ begrenzte Raum $\mathfrak{R}$ ist im Allgemeinen mehrfach zusammenhängend. Es seien $q', q'', q''', \cdots$ diejenigen *Schnittflächen*, deren es bedarf, um ihn in einen einfach zusammenhängenden zu verwandeln. Unter den *Randcurven* $k', k'', k''', \cdots$ dieser Flächen $q', q'', q''', \cdots$ mögen diejenigen geschlossenen Curven verstanden werden, in denen diese Flächen $q', q'', q''', \cdots$ mit der Begrenzung des Raumes $\mathfrak{R}$, d. i. mit den Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ zusammenstossen. Dabei wird z. B. auch der Fall vorkommen können, dass ein und dieselbe Fläche q' *mehrere* solche Randcurven k' besitzt.

Jedweder Fläche q mag nun — und zwar ganz nach Will-

kür — ihre bestimmte linke und rechte Seite zuertheilt sein. Hierdurch sind alsdann, der Continuität entsprechend, bereits mitbestimmt die linken und rechten Seiten der Curven k, und also (auf Grund der in § 2 festgesetzten Regel) auch bereits mitbestimmt die *Richtungen* der Curven k.

Es seien irgend welche *Constanten* gegeben: $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, $\cdots$, der Reihe nach entsprechend den Schnittflächen q', q'', q''', $\cdots$. Zugleich mögen unter den *adjungirten Constanten* M_a, M_b folgende verstanden sein:

$$(2) \qquad \begin{cases} M_a = -\sum [a, k^{(i)}]\varkappa^{(i)}\,, \\ M_b = -\sum [b, k^{(i)}]\varkappa^{(i)}\,, \end{cases}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Curven k', k'', k''', $\cdots$. Dabei sollen die Symbole $[a, k^{(i)}]$ und $[b, k^{(i)}]$ die in (1) angegebene Bedeutung haben, also bestimmte *ganze Zahlen* sein.

Es sind hier also zwei Systeme von Constanten zu unterscheiden, nämlich erstens die einstweilen *willkürlich gewählten* Constanten $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, $\cdots$ (entsprechend den einzelnen Schnittflächen q', q'', q''', $\cdots$), und andererseits die diesen $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, $\cdots$ *adjungirten Constanten* M_a, M_b (entsprechend den einzelnen Hauptcurven a, b).

§ 4.

Das zu behandelnde hydrodynamische Problem.

Nach all' diesen Vorbereitungen wollen wir jetzt das aus der incompressiblen Flüssigkeit und den starren Körpern $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{K}_n$ bestehende System unter dem Einfluss gegebener *äusserer Kräfte* in irgend welcher *Bewegung* begriffen uns denken. Dabei mögen die auf die Körper $\mathfrak{K}$ einwirkenden äussern Kräfte A ganz *beliebig*, andererseits aber die auf die Flüssigkeit einwirkenden äussern Kräfte mit einem *Potential* $V = V(x, y, z)$ behaftet sein.

Ueberdies sei vorausgesetzt, dass *keine Reibung* stattfindet, und dass der Anfangszustand der Flüssigkeit *wirbelfrei* war. Alsdann wird bekanntlich der Zustand der Flüssigkeit fortdauernd wirbelfrei bleiben. Oder mit andern Worten: Die

Flüssigkeit wird alsdann fortdauernd ein sogenanntes *Geschwindigkeitspotential* $\Phi = \Phi(x, y, z)$ besitzen [1]).

Das Geschwindigkeitspotential $\Phi = \Phi(x, y, z)$ ist bekanntlich eine Function, die in den Schnittflächen $q', q'', q''', \cdots$ mit constanten Differenzen behaftet, sonst aber sammt all' ihren Ableitungen im Raume $\mathfrak{R}$ überall stetig ist. Dabei ist zu beachten, dass die genannten Differenzen nicht nur räumlich (d. i. in ganzer Ausdehnung der einzelnen Schnittflächen), sondern auch zeitlich constant sind, und dass also die Werthe dieser Differenzen durch den gegebenen *Anfangszustand* ohne Weiteres bestimmt sind. Wir bezeichnen diese constanten Differenzen mit $\varkappa', \varkappa''$, $\varkappa''', \cdots$, und zwar in dem Sinne, dass $\varkappa^{(i)}$ den Betrag repräsentirt, um welchen Φ auf der *linken* Seite der Schnittfläche $q^{(i)}$ grösser ist als auf der rechten. Aus $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \cdots$ ergeben sich nun sofort, nach Maassgabe der Formeln (2), die denselben *adjungirten* Constanten M_a, M_b; so dass also all' diese Constanten

$$(3) \qquad \varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \cdots M_a, M_b$$

als *von Hause aus gegebene*, nämlich *durch den Anfangszustand bestimmte* Constanten anzusehen sind.

Wir betrachten nun irgend eine der Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$, etwa die *Oberfläche* σ des *Körpers* $\mathfrak{K}$, und denken uns auf einem Element $d\sigma$ dieser Oberfläche die in die *Flüssigkeit* (d. i. in den Raum $\mathfrak{R}$) hineinlaufende Normale $\mathfrak{N}$ errichtet. Alsdann repräsentirt offenbar $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{N}}$ die dieser Richtung $\mathfrak{N}$ entsprechende Geschwindigkeitscomponente des das Element $d\sigma$ berührenden *Flüssigkeitstheilchens*. Andererseits mag die der Richtung $\mathfrak{N}$ entsprechende Geschwindigkeitscomponente des bei $d\sigma$ liegenden *Körpertheilchens* mit s bezeichnet sein. Diese beiden Geschwindigkeitscomponenten — sie mögen kurzweg die *Nor-*

---

1) In Uebereinstimmung mit *allen* Autoren und z. B. auch mit Boltzmann, werde ich das *Geschwindigkeitspotential* Φ der Art einführen, dass seine *positiven* Ableitungen die Geschwindigkeitscomponenten sind. Andererseits aber werde ich die *gewöhnlichen* Potentiale (wie z. B. V und weiterhin P, P) nach dem Vorgange meines Vaters der Art einführen, dass ihre *negativen* Ableitungen die Kräfte vorstellen. Demgemäss haben diese *gewöhnlichen* Potentiale bei mir und Boltzmann *entgegengesetzte* Werthe. Denn Boltzmann definirt dieselben so, dass ihre *positiven* Ableitungen die Kräfte sind [Crelle's J. Bd. 73, Seite 116].

malgeschwindigkeiten heissen — sind bekanntlich in jedem Augenblick *einander gleich.* Es ist also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{N}} = s \, .$$

Denkt man sich nun die Normalgeschwindigkeiten s für alle Oberflächenpunkte aller Körper $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots \mathfrak{K}_n$ in irgend einem Zeitaugenblick *gegeben*, so sind die Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{N}} = s \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \, ,$$

unter Hinzunahme der schon genannten Stetigkeitseigenschaften von Φ, und unter Benutzung der gegebenen Constanten $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, $\cdots$ (3), ausreichend zur Berechnung des augenblicklichen Werthes von Φ. Ist dieser aber gefunden, so ergiebt sich hieraus sofort auch die augenblickliche lebendige Kraft T der Flüssigkeit.

Die augenblicklichen Werthe von Φ und T sind also in ganz bestimmter Weise abhängig von jenen augenblicklichen Normalgeschwindigkeiten s der einzelnen Oberflächenpunkte der starren Körper. Und das zu behandelnde hydrodynamische Problem oder wenigstens ein wesentlicher Theil desselben besteht darin, diese *Abhängigkeit*, welche einstweilen nur durch Differentialgleichungen ausgedrückt ist, näher zu untersuchen, und womöglich in endlicher Form darzustellen.

So wenigstens lautet die gewöhnliche Aufgabe der Hydrodynamik. Hier aber soll gezeigt werden, dass die in Rede stehende Abhängigkeit *elektrodynamisch construirbar* ist.

Ich werde diese Construirbarkeit zuerst in voller Allgemeinheit darlegen, sodann aber zu denjenigen specielleren Ergebnissen mich hinwenden, welche für den Fall der *ruhenden* oder *festgehaltenen* Körper sich ergeben.

§ 5.

Allgemeine Resultate.

Jene Normalgeschwindigkeiten s seien für irgend einen Zeitaugenblick *gegeben.* Unsere Aufgabe besteht darin, die augenblicklichen Werthe von Φ und T *elektrodynamisch zu construiren.*

Zu diesem Zweck versehen wir die gegebenen Oberflächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ in dem gegebenen Zeitaugenblick mit zweierlei Belegungen, nämlich erstens mit gewissen *magnetischen Belegungen* (s), und zweitens mit gewissen *stationären elektrischen Strombelegungen* (j).

Was die magnetischen Belegungen (s) betrifft, so soll bei ihnen die magnetische Flächendichtigkeit für jedweden Oberflächenpunkt genau ebenso gross sein wie die augenblickliche Normalgeschwindigkeit s dieses Punktes.

Andererseits sollen die stationären elektrischen Strombelegungen (j) von solcher Art gedacht werden, dass die Hauptdurchgangsmengen derselben identisch sind mit den gegebenen Constanten M_a, M_b (3), und dass überdies die Gesammtwirkung all' dieser Belegungen (s) und (j) auf jedweden ausserhalb $\mathfrak{R}$ gelegenen Magnetpol *Null* ist. Was unter einer stationären elektrischen Strombelegung, und unter ihren Hauptdurchgangsmengen zu verstehen sei, ist bereits früher von mir dargelegt worden (diese Berichte, 1891, Seite 571, 572).

Durch die soeben gemachten Angaben sind nicht nur die Belegungen (s), sondern auch die Belegungen (j) *eindeutig* bestimmt; wie sich solches ergiebt auf Grund eines gewissen Unitäts-Theorems, welches ich hier nur seinem Inhalt nach — ohne Beweis — mir mitzutheilen erlaube. Dasselbe lautet:

Unitäts-Theorem. *Jede der Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ sei behaftet mit einer stationären elektrischen Strombelegung. Für diese sonst unbekannten Belegungen seien gegeben die Hauptdurchgangsmengen. Und überdies sei die Wirkung derselben auf jedweden ausserhalb $\mathfrak{R}$ gelegenen Magnetpol gegeben. — Alsdann werden hierdurch jene Belegungen eindeutig bestimmt sein.*
Auf einen speciellen Fall dieses Theorems ist bereits früher (diese Berichte, 1891, Seite 574) von mir aufmerksam gemacht.

Nachdem in solcher Art und Weise, nämlich auf Grund der Normalgeschwindigkeiten s, der Reihe nach die Belegungen (s) und (j) construirt sind, ist es nun leicht, die augenblicklichen Werthe von Φ und T wirklich anzugeben. Es wird nämlich das Geschwindigkeitspotential Φ für jedweden innerhalb $\mathfrak{R}$ liegenden Punkt (x, y, z) den Werth haben:

$$\Phi = -\frac{S+P}{4\pi}, \tag{5}$$

wo S und P diejenigen Potentiale bezeichnen, welche resp. die Belegungen (s) und (j) auf den Punkt (x, y, z) ausüben würden, falls derselbe ein Magnetpol von der magnetischen Masse Eins wäre.

Andererseits wird die augenblickliche lebendige Kraft T der Flüssigkeit den Werth besitzen:

$$T = + \varrho \frac{\mathsf{S} - \mathsf{P}}{4\pi} . \tag{6}$$

Hier bezeichnet ϱ die constante Dichtigkeit der incompressiblen Flüssigkeit, ferner S das Potential des Systems der Belegungen (s) auf sich selbst, und P das Potential des Systems der Belegungen (j) auf sich selber.

Man könnte noch fragen nach dem *Druck der Flüssigkeit*, namentlich z. B. nach derjenigen Wirkung, welche dieser Druck auf die einzelnen starren Körper $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{K}_n$ ausübt. Diese Wirkung aber mittelst der Belegungen (s) und (j) construiren, resp. definiren zu wollen, dürfte ein Ding der Unmöglichkeit sein; es sei denn, dass man voraussetzt, die starren Körper $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_n$ würden durch die auf sie einwirkenden äussern Kräfte A, trotz der in Bewegung begriffenen Flüssigkeit, in fortdauernder *Ruhe* erhalten; was im folgenden § geschehen soll.

Selbst wenn die Körper lauter unendlich dünne Ringe sind, ist die Bestimmung jener Druckwirkung, solange die Ringe in *Bewegung* gedacht werden, nicht so einfach, wie Kirchhoff glaubte, und auch von Boltzmann nur durch Herbeiziehung *weiterer Hülfsmittel* (nämlich des von ihm mit Q bezeichneten Potentials) einigermassen erreicht. Es ist meine Absicht, auf die Betrachtung solcher unendlich dünnen Ringe in einer späteren Publikation genauer einzugehen, hier aber nicht.

Historisches. Schon *Boltzmann* hat die hier mit (j) bezeichneten Belegungen untersucht (Crelle's J., Bd. 73.) Entgangen sind ihm aber die Belegungen (s). Auch fehlte ihm das von mir aufgestellte Unitäts-Theorem. Und in diesen beiden Umständen liegt der Grund dafür, dass er jene Belegungen (j) *elektrodynamisch* zu construiren ausser Stande war. Auch konnte er, in Ermangelung der Belegungen (s), nicht zu den Ausdrücken S, S gelangen, mithin auch nicht zu den Formeln (5), (6).

Augenscheinlich hat Boltzmann nach solchen Formeln, wie sie in (5), (6) angegeben sind, mit grossem Eifer gesucht, und

dabei jene ihm unzugänglichen Ausdrücke S, $\mathfrak{S}$ gewissermassen zu *elimíniren* sich bemüht. Zu diesem Zwecke hat er (l. c. Seite 121) die Körper $\mathfrak{K}$ als *Flüssigkeitsmassen* sich vorgestellt, der Art, dass bloss noch ihre *Oberflächen* σ aus einer *starren* (resp. biegsamen) Substanz bestehen sollten. Auch hat er zu diesem Zwecke (l. c. Seite 123) ein neues Potential Q zu Hülfe genommen, welches in jedem Augenblick, aber in ziemlich complicirter Weise, durch den augenblicklichen Bewegungszustand jener starren (resp. biegsamen) Flächen σ sich bestimmt.

Sodann geht Boltzmann über zur Betrachtung des Falles *unendlich dünner Ringe*, und zeigt (l. c. Seite 126), dass der in diesem Fall von Kirchhoff für die lebendige Kraft T der Flüssigkeit gefundene elektrodynamische Ausdruck auch dann noch gültig bleibt, wenn die Querschnitte der Ringe unendlich klein, aber *nicht* kreisförmig sind.

Hierauf discutirt Boltzmann die Frage, ob es möglich sei, die Wirkung der von der Flüssigkeit auf die Ringe ausgeübten Druckkräfte aus jenem Ausdruck der lebendigen Kraft T, sei es durch *Differentiation*, sei es durch *Variation*, abzuleiten.

Boltzmann deutet an (l. c. Seite 126), dass von einer Ableitung durch *Differentiation* nicht die Rede sein könne, ausser im Fall der *ruhenden* Ringe (l. c. Seite 111). Will man also, wie es *Kirchhoff* gethan, das Verfahren der blossen Differentiation in Anwendung bringen auf in *Bewegung* begriffene Ringe, so wird man für die Wirkung jener Druckkräfte einen Werth erhalten, der noch irgend welcher *nachträglichen Correction* bedürftig ist.

Andererseits verbietet sich, wie Boltzmann bemerkt, das Verfahren der *Variation* von selber, so lange man die Form noch nicht kennt, welche dem Hamilton'schen Princip für den Fall der Ringe, d. i. für einen *mehrfach* zusammenhängenden Flüssigkeitsraum zuzuertheilen ist.

Ohne nach dieser Form weiter zu suchen, schlägt sodann Boltzmann (l. c. Seite 129), einen möglichst directen Weg ein zur Bestimmung der Wirkung der Druckkräfte, und findet hierbei (l. c. Seite 133), dass jene noch fehlende *nachträgliche Correction* im Werthe dieser Wirkung ausdrückbar sei mittelst des schon genannten Potentials Q.

§ 6.

Resultate für den Fall ruhender Körper.

Wir wollen jetzt annehmen, die auf die Körper $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{K}_n$ einwirkenden äussern Kräfte A (vgl. § 4) seien von solcher Beschaffenheit, dass diese Körper, trotz der in Bewegung begriffenen Flüssigkeit, in *Ruhe* bleiben.

Alsdann werden offenbar jene Normalgeschwindigkeiten s

alle $= 0$ sein, mithin die Belegungen (s) *verschwinden. Demgemäss sind im gegenwärtigen Fall* (vgl. § 5) *die Belegungen* (j) *als diejenigen zu definiren, welche die gegebenen Hauptdurchgangsmengen* M_a, M_b *besitzen, und welche überdies auf alle ausserhalb* $\mathfrak{R}$ *liegenden Magnetpole die Wirkung Null geben.* Zugleich reduciren sich in diesem Fall die Formeln (5) und (6) resp. auf

(7) $$\Phi = -\frac{P}{4\pi},$$

und auf

(8) $$T = -\varrho\,\frac{\mathsf{P}}{4\pi},$$

wo P und P dieselben Bedeutungen haben wie damals.

Dass die Belegungen (j) durch die soeben angegebene Definition *eindeutig* bestimmt sind, ergiebt sich ohne Weiteres aus meinem im vorhergehenden § angegebenen Unitäts-Theorem.

Wir gehen über zum Druck der Flüssigkeit auf die starren Körper. Dieser Druck wird gegenwärtig, wo die Körper in *Ruhe* sich befinden, ein auf dieselben einwirkendes Kräftesystem repräsentiren, welches die Eigenschaft hat, den die Körper sollicitirenden äussern Kräften A das Gleichgewicht zu halten, und wird daher als *äquivalent* zu bezeichnen sein mit jedwedem andern Kräftesystem, welches *dieselbe* Eigenschaft besitzt. Ein in diesem Sinne mit dem Druck der Flüssigkeit *äquivalentes* Kräftesystem ist nun leicht angebbar. Es ergiebt sich nämlich folgender Satz:

Aequivalenz-Satz. *Die von der Flüssigkeit auf die starren Körper* $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_n$ *ausgeübten Druckkräfte sind äquivalent mit denjenigen Kräften, welche die Körper selbst, vermöge ihrer Strombelegungen* (j), *nach den bekannten elektrodynamischen Gesetzen, gegenseitig aufeinander ausüben, diese Kräfte noch multiplicirt mit dem constanten Factor* $\left(-\frac{\varrho}{4\pi}\right)$. *Dabei ist vorausgesetzt, dass auf die Flüssigkeit selbst keinerlei äussere Kräfte einwirken, dass also das mit* V (vgl. § 4) *bezeichnete Potential* $= 0$ *sei.*

Lässt man diese Voraussetzung fallen, nimmt man also an, V sei eine beliebig gegebene Function der Coordinaten, so hat man, um die soeben genannte Aequivalenz zu einer vollständigen zu machen, zu jenen mittelst der Belegungen (j) charakteri-

sirten Kräften noch diejenigen hinzuzufügen, welche aus dem *Princip des Archimedes* sich ergeben.

Historisches. — Ausser der *Boltzmann*'schen Arbeit (1870, Crelle's J., Bd. 73) kommt hier auch eine Arbeit von *Riecke* (1887, Math. Annal. Bd. 32) in Betracht. Da indessen diese beiden Arbeiten, obwohl verschieden durch verschiedene Methoden, doch den Resultaten nach im Wesentlichen übereinstimmen, so wird es zu entschuldigen sein, wenn ich hier ausschliesslich auf die *Boltzmann*'sche Untersuchung eingehe.

Der Einfachheit willen mag die Fläche σ_0 eine völlig fest aufgestellte Kugelfläche sein, deren Centrum irgendwo im Endlichen liegt, und deren Radius unendlich gross ist; so dass also diese Fläche σ_0 ebenso wie der Körper $\mathfrak{K}_0$ unsern Augen entschwindet, und nur noch die Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... $\mathfrak{K}_n$ übrig bleiben.

Alsdann sind die Sätze (7) und (8) und der soeben ausgesprochene Aequivalenz-Satz — wenigstens für *ringförmige* Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... $\mathfrak{K}_n$ — in befriedigender Uebereinstimmung[1]) mit den betreffenden *Boltzmann*'schen Resultaten, (l. c. Seite 116, 120 und 130). Trotzdem aber bleibt dabei zwischen Boltzmann und mir ein wesentlicher Unterschied vorhanden in Betreff jener Belegungen (j), welche den eigentlichen Angelpunkt all' dieser Sätze bilden.

Boltzmann hat nämlich — wenigstens für den Fall *ringförmiger* Körper — eine gewisse *Minimum-Eigenschaft* der Belegungen (j) entdeckt (l. c. Seite 116—118). Er folgert hieraus, dass das System der Belegungen (j) eine *Gleichgewichts-Anordnung* der betreffenden elektrischen Ströme repräsentirt (l. c. Seite 118), und benutzt sodann, falls ich ihn richtig verstanden habe, (l. c. Seite 119), diese Eigenschaften des Minimums und Gleichgewichts zur *elektrodynamischen Definition* der Belegungen (j). — Dass aber diese letztern durch eine solche Definition *eindeutig* bestimmt seien, dürfte wohl nicht ohne Weiteres evident sein, und scheint auch von Boltzmann nicht gradaus behauptet zu werden (l. c. Seite 119).

Wesentlich anders liegen die Dinge bei mir. Ich gebe nämlich für die Belegungen (j) — und zwar nicht nur für den Fall ringförmiger Körper, sondern ganz allgemein für *völlig beliebig gestaltete* Körper — jene höchst einfache zu Anfang des gegenwärtigen § ausgesprochene Definition, und liefere zugleich mit

1) Wie schon (in der Note zu § 4) erwähnt wurde, haben die gewöhnlichen Potentiale (wie z. B. P, P) bei Boltzmann und mir *entgegengesetzte* Vorzeichen. Beachtet man dies, so ist die Uebereinstimmung des Satzes (8) und des Aequivalenzsatzes mit den Boltzmann'schen Resultaten (l. c. Seite 120 und 130) eine *vollständige*. Hingegen bleibt dabei zwischen dem Satze (7) und dem betreffenden Boltzmann'schen Ergebnisse (l. c. Seite 116) immer noch ein Zeichenunterschied bestehen. Dieser Unterschied bedarf noch der Aufklärung.

telst meines Unitäts-Theorems (§ 5) den strengen Beweis dafür, dass die Belegungen (j) durch diese Definition *eindeutig* bestimmt sind.

Wenn nun in diesen Dingen meinem Verfahren wohl ohne Zweifel der Vorzug einzuräumen ist, so muss doch andererseits betont werden, dass jene von Boltzmann für *ringförmige* Körper entdeckte Minimum-Eigenschaft den eigentlichen Kern eines Theorems von hervorragender Bedeutung und grösster Wichtigkeit repräsentirt.

Denkt man sich (ebenso wie in § 1) einen Raum $\mathfrak{R}$, begrenzt von $(n+1)$ Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$, so lautet dieses Theorem folgendermassen:

Minimum-Theorem. — *Die Flächen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ seien mit irgend welchen stationären elektrischen Strombelegungen (j) versehen, die indessen von solcher Beschaffenheit sein sollen, dass ihre Wirkung auf alle* ausserhalb *$\mathfrak{R}$ gelegenen Magnetpole Null ist. Ferner sei P das Potential des Systems der Belegungen (j) auf sich selbst.*

Unterwirft man alsdann diese Belegungen (j), ohne Verletzung ihres stationären Charakters und ohne ihre Hauptdurchgangsmengen zu ändern, irgend welchen Variationen, so wird der hierdurch entstehende Zuwachs $\delta\mathsf{P}$ des Potentials P stets $= 0$ sein.

Von Wichtigkeit ist dieses Theorem z. B. für den Beweis des in diesem § angegebenen Aequivalenz-Satzes, ebenso wie auch Boltzmann (l. c. Seite 120) von seinem specielleren Theorem zu analogem Zwecke Gebrauch gemacht hat.

§ 7.

Ueber die elektrodynamische Construirbarkeit willkürlich gegebener Functionen.

Jedwede Function $F = F(x, y, z)$ ist, falls sie nur gewissen Stetigkeits-Anforderungen entspricht, *physikalisch construirbar.* Ist nämlich die Function nebst ihren Ableitungen innerhalb eines gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$ *stetig*, so wird sie innerhalb dieses Raumes $\mathfrak{R}$ darstellbar sein als das *Potential* eines gewissen *Massensystems*, welches theils in continuirlicher Vertheilung den Raum $\mathfrak{R}$ erfüllt, theils in Form einer Flächenbelegung an der Grenze des Raumes $\mathfrak{R}$ sich befindet, theils endlich in Gestalt einer Doppel-Flächenbelegung ebenfalls über diese

Grenze sich ausdehnt. — Solches ergiebt sich leicht mittelst eines bekannten *Green*'schen Satzes.

Wollte man diese Darstellungsweise auf *drei* Functionen $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ anwenden, so hätte man *drei* solche Massensysteme einzuführen.

Eine einfachere und für viele Zwecke vortheilhaftere Darstellungsweise ergiebt sich aus der vielgenannten *Boltzmann*-schen Abhandlung (Crelle's J., Bd. 73, Seite 113). Diese besteht darin, die Functionen u, v, w auszudrücken als die Componenten derjenigen *Kraft*, welche ein bestimmtes *System elektrischer Ströme* auf den variablen Punkt (x, y, z) ausübt, wobei alsdann dieser Punkt als ein *Magnetpol* anzusehen ist. Allerdings wird bei dieser Boltzmann'schen Darstellungsweise vorausgesetzt, dass die Functionen u, v, w folgende Bedingungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ,$$

$$\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w = 0 ,$$

von denen die vier ersten auf das Innere, die letzte auf die Oberfläche des zu betrachtenden Raumes $\mathfrak{R}$ sich beziehen. Dabei sind unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Richtungscosinus der auf dieser Oberfläche errichteten Normale zu verstehen.

Doch lassen sich diese lästigen Bedingungen oder Beschränkungen abstreifen, wodurch man alsdann zu folgendem allgemeinen Theorem gelangt.

Theorem. — *Sind u, v, w irgend welche Functionen von x, y, z, die sammt ihren Ableitungen innerhalb eines beliebig begrenzten Raumes $\mathfrak{R}$ stetig sind, und sind u_1, v_1, w_1 die Werthe dieser Functionen im Punkte (x_1, y_1, z_1), so gelten die Formeln:*

$$(A.) \qquad \begin{cases} 4\pi\varepsilon_1 u_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial x_1} + \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}\right) , \\ 4\pi\varepsilon_1 v_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial y_1} + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right) , \\ 4\pi\varepsilon_1 w_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial z_1} + \left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\right) , \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1 = 1$ *oder* $= 0$ *ist, je nachdem der Punkt* (x_1, y_1, z_1) *innerhalb* $\mathfrak{R}$ *oder ausserhalb* $\mathfrak{R}$ *liegt.*

Hier sind S_1, F_1, G_1, H_1 *Summen gewisser Potentiale. Und diese Potentiale rühren von Massenvertheilungen her, die mit gewissen Dichtigkeiten theils über die Oberfläche* σ *des Raumes* $\mathfrak{R}$, *theils über diesen Raum selbst ausgebreitet sind. Es ist nämlich:*

$$(B.)\quad \begin{cases} S_1 = \int \frac{s\,d\sigma}{r} + \int \frac{s^*\,d\tau}{r}, \\ F_1 = \int \frac{f\,d\sigma}{r} + \int \frac{f^*\,d\tau}{r}, \\ G_1 = \int \frac{g\,d\sigma}{r} + \int \frac{g^*\,d\tau}{r}, \\ H_1 = \int \frac{h\,d\sigma}{r} + \int \frac{h^*\,d\tau}{r}, \end{cases}$$

wo s, f, g, h *und* s^*, f^*, g^*, h^* *die Bedeutung haben:*

$$(C.)\quad \begin{cases} s = \mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + Cw, & s^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ f = \mathfrak{B}w - \mathfrak{C}v, & f^* = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ g = \mathfrak{C}u - \mathfrak{A}w, & g^* = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ h = \mathfrak{A}v - \mathfrak{B}u, & h^* = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Dabei repräsentiren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *die Richtungscosinus der auf irgend einem Oberflächenelement* $d\sigma$ *errichteten, in den Raum* $\mathfrak{R}$ *hineinlaufenden Normale* $\mathfrak{N}$.

Die Integrationen in (B.) sind hinerstreckt zu denken über alle Oberflächenelemente $d\sigma\,(x, y, z)$, *respective über alle Volumelemente* $d\tau\,(x, y, z)$ *des Raumes* $\mathfrak{R}$. *Und dabei ist unter* r *der Abstand eines solchen Elementes vom Punkte* (x_1, y_1, z_1) *zu verstehen.*

Besonders hervorzuheben ist nun, dass die rechten Seiten der Formeln (A.) einfache elektrodynamische, respective magnetische Bedeutungen haben, sobald man den Punkt (x_1, y_1, z_1) *als einen Magnetpol von der magnetischen Masse Eins ansieht. Alsdann nämlich repräsentiren*

$$(D.)\qquad -\frac{\partial S_1}{\partial x_1},\quad -\frac{\partial S_1}{\partial y_1},\quad -\frac{\partial S_1}{\partial z_1}$$

die Componenten der auf jenen Pol (x_1, y_1, z_1) *von einer gewissen magnetischen Materie ausgeübten Wirkung. Diese Materie ist theils über die Oberfläche* σ *des Raumes R, theils über den Raum* $\mathfrak{R}$ *selber ausgebreitet, resp. mit den Dichtigkeiten s und s*.*

Gleichzeitig repräsentiren alsdann

$$(E.)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial y_1}-\frac{\partial G_1}{\partial z_1},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial G_1}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$$

die Componenten der auf den Pol (x_1, y_1, z_1) *von einer gewissen stationären elektrischen Stromvertheilung ausgeübten Wirkung. Diese Stromvertheilung ist theils über die Oberfläche* σ *des Raumes* $\mathfrak{R}$*, theils über den Raum* $\mathfrak{R}$ *selber ausgebreitet, respective mit den Strömungscomponenten* (f, g, h) *und* (f^*, g^*, h^*).

In Anbetracht dieser Bemerkungen über die Ausdrücke (*D.*), (*E.*), können wir sagen, dass durch die Formeln (*A.*) die Werthe der *stetigen* Functionen u, v, w in irgend einem Punkte (x_1, y_1, z_1) des Raumes $\mathfrak{R}$ *elektrodynamisch construirt* sind. Auch können wir hinzufügen, dass diese Construction eine ziemlich einfache ist, insofern als die Dichtigkeiten und Strömungscomponenten der dabei erforderlichen magnetischen und Strom-Vertheilungen sofort angebbar sind.

Demgemäss dürfte zu erwarten sein, dass wir die meisten physikalischen Vorgänge, so weit dieselben in *stetiger* Weise erfolgen, d. i. durch *stetige* Functionen sich ausdrücken, *elektrodynamisch zu construiren* oder (anders ausgedrückt) *mittelst der elektrodynamischen Gesetze zu beschreiben* im Stande sein werden. Und hierin liegt nach meiner Ansicht z. B. auch der Grund dafür, dass die Hydrodynamik so viele Beziehungen zur Elektrodynamik darbietet.

Diese Beziehungen oder Uebereinstimmungen haben also nach meiner Ansicht keine tieferen Gründe. Sie sprechen nicht etwa für einen noch weiter zu erforschenden *gemeinschaftlichen Boden* der beiden Disciplinen, sondern sie repräsentiren nur äusserliche Analogien, deren Existenz aus dem Umstande resultirt, dass es sich in den betreffenden Theilen der Hydrodynamik immer nur um *stetige* Functionen handelt, derartige Functionen aber elektrodynamisch construirbar sind.

§ 8.

Beiläufige Bemerkungen.

Ich benutze diese Gelegenheit zur beiläufigen Mittheilung zweier Sätze, von denen der eine auf hydrostatischen Ueberlegungen beruht, während der andere einen merkwürdigen Fall des hydrostatischen Gleichgewichts zum Gegenstande haben wird.

Erster Satz. — Es sei gegeben ein ganz unregelmässiges *starres Polyeder*, begrenzt von lauter ebenen Seitenflächen. Auf jeder solchen Seitenfläche markire man den Schwerpunkt derselben. Sodann lasse man in diesen Punkten auf das Polyeder Kräfte einwirken, die gegen die einzelnen Seitenflächen senkrecht, den Grössen der Flächen proportional, und alle nach aussen gerichtet sind. — Alsdann wird das Polyeder unter dem Einfluss all dieser Kräfte im Gleichgewicht sein.

Beweis. — Man denke sich das Polyeder *hohl*, etwa zusammengelöthet aus einzelnen starren Blechstücken. Der Innenraum dieses hohlen Polyeders sei nun erfüllt von einer beliebig stark comprimirten *Flüssigkeit.* Alsdann wird das Polyeder durch das Expansionsbestreben dieser Flüssigkeit, d. i. durch die von der Flüssigkeit auf die einzelnen Seitenflächen ausgeübten Druckkräfte unmöglich in Bewegung gerathen können. U. s. w.

NB. Ein analoger Satz ist von *Despeyrous* (1884, Cours de Mécanique, Paris, Tome I, pag. 84) für das *Polygon* ausgesprochen, von ihm aber *nicht* durch hydrostatische Ueberlegungen, sondern direct (auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers) bewiesen worden.

NB. Man kann den vorstehenden Satz z. B. auf ein *unendlich kleines starres Tetraeder* anwenden. Alsdann aber gelangt man, weil ein solches Tetraeder als ein materieller *Punct* anzusehen ist, zur Regel des Parallelepipedums, mithin auch zur Regel des Parallelogramms.

Setzt man also voraus, dass irgend eine dem Gesetz des isotropen Druckes entsprechende Flüssigkeit existirt, so ergiebt sich hieraus mit Nothwendigkeit, dass die Resultante zweier auf einen materiellen Punkt einwirkenden Kräfte durch die Diagonale des über diesen beiden Kräften construirten Parallelogramms dargestellt ist.

Zweiter Satz. — Es sei gegeben eine absolut fest aufgestellte *starre homogene Schale*, begrenzt von zwei *confocalen abgeplatteten Rotationsellipsoiden.* Der Bequemlichkeit willen seien die beiden Pole der äussern Ellipsoidfläche mit A, B, und die der innern in entsprechender Weise mit α, β bezeichnet.

Ausserdem wollen wir uns ein System von *Rotations-Hyperboloiden* vorstellen, die alle ein und denselben Asymptotenkegel haben. Dieser Kegel besitze denselben Mittelpunkt und dieselbe geometrische Axe wie die gegebene Schale. Seine Kanten seien gegen jene Axe unter einem Winkel geneigt, dessen trigonometrische Tangente $= \sqrt{2}$ ist. Der innere Hohlraum der Schale zerfällt offenbar durch den Kegel in drei Theile. Diese mögen mit U, V und W bezeichnet sein, und zwar der Art, dass U den Punkt α, andrerseits V den Punkt β enthält.

Die gegebene Schale sei längs der geraden Linie $A\alpha$ von einer äusserst engen Oeffnung durchbohrt. Und durch diese Oeffnung mag von aussen her in den bis dahin leeren Hohlraum der Schale sehr langsam mehr und mehr *Flüssigkeit* hineingedrückt werden. Diese Flüssigkeit sei homogen und incompressibel.

Wir wollen nun annehmen, dass diese Flüssigkeit von der gegebenen Schale nach dem *Newton'schen Gesetz* angezogen werde, sonst aber keinen weiteren Kräften (also weder der Schwere noch auch einer gegenseitigen Einwirkung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen) unterliege. — Es handelt sich um die *Gleichgewichtsfigur* der in irgend einem Augenblick in den Hohlraum der Schale hineingebrachten Flüssigkeitsmasse.

Diese Aufgabe führt zu dem Resultat, dass die Gleichgewichtsfigur stets von der innern Ellipsoidfläche und von einer oder mehreren Flächen jenes Hyperboloidsystems begrenzt ist. Zugleich aber ergiebt sich, dass diese Gleichgewichtsfigur, bei allmähliger Zunahme der im Hohlraum befindlichen Flüssigkeitsmasse, nicht immer stetig, sondern zuweilen auch u n s t e t i g sich ändert.

Ist die hineingebrachte Flüssigkeitsmasse sehr klein, so wird sie um den Punkt α herum sich ausbreiten, und eine Gestalt annehmen, die theils von der innern Ellipsoidfläche, theils von einer Fläche jenes Hyperboloidsystems begrenzt ist. Drückt man nun von aussen her durch die Oeffnung $A\alpha$ sehr langsam

mehr und mehr Flüssigkeit in den Hohlraum hinein, so wird die Gleichgewichtsfigur sich mehr und mehr ausdehnen, dabei aber hinsichtlich ihrer Begrenzung stets den soeben genannten Charakter behalten, bis sie schliesslich in einem gewissen Augenblicke den Kegelraum U vollständig erfüllt.

Bringt man jetzt — immer durch die Offnung $A\alpha$ — noch mehr Flüssigkeit hinein, so erfolgt eine *Discontinuität*, indem an der Spitze des Kegels U mehr und mehr Tropfen sich losreissen, und an der gegenüberliegenden Seite des Hohlraumes, nämlich bei β sich ansammeln, und hier wiederum eine Gestalt annehmen, die theils von der innern Ellipsoidfläche, theils von einer Fläche jenes Hyperboloidsystems begrenzt ist. Dieser Process dauert so lange fort, bis in einem gewissen Augenblicke *beide* Kegelräume U und V von Flüssigkeit vollständig erfüllt sind.

Wird jetzt endlich durch die Oeffnung $A\alpha$ noch mehr Flüssigkeit hineingebracht, so erweitert sich dieser Doppelkegel $(U+V)$, und zwar in der Art, dass die statt der Kegelfläche eintretende neue Begrenzungsfläche stets durch eine Fläche jenes Hyperboloidsystems repräsentirt ist, bis schliesslich der ganze Hohlraum der Schale vollständig von Flüssigkeit erfüllt ist.

Zusatz. — Ist die gegebene homogene Schale von zwei *ganz beliebigen* Rotationsellipsoiden begrenzt, die aber einerlei Mittelpunkt und einerlei Axe besitzen, so gilt Wort für Wort dasselbe; nur mit dem Unterschiede, dass alsdann der soeben beschriebene Process je nach Umständen entweder in der *nämlichen* Weise, oder aber auch in *inverser* Weise erfolgen wird. Der inverse Process besteht, wie wohl kaum zu bemerken erforderlich ist, darin, dass zuerst ein Flüssigkeitsring am Aequator sich ansammelt, sodann der Raum W erfüllt wird, u. s. f.

Der *inverse* Process wird z. B. dann eintreten, wenn die Schale begrenzt ist von zwei *gestreckten confocalen* Rotations-Ellipsoiden.

Besonders zu betonen ist, dass in allen Fällen das in Betracht kommende System von Rotationshyperboloiden stets *ein und dasselbe* bleibt, so dass also die Kanten des zugehörigen Asymptoten-Kegels mit der geometrischen Axe Winkel bilden, deren trigonometrische Tangente jederzeit $=\sqrt{2}$ ist.

Beweis. — Für den vorhin genannten Fall der *gestreckten confocalen* Ellipsoide kann, wenn überdies die Dicke der Schale

äusserst klein ist, der Satz sofort bewiesen werden mittelst eines früher von mir gefundenen Satzes, den ich gelegentlich der Herausgabe der Vorlesungen meines Vaters publicirt habe. (Vgl. F. Neumann's Vorl. über Potential und Kugelfunctionen, Leipzig 1887, Seite 360.)

Leichter aber führen, in diesem wie auch in den übrigen Fällen, andere bekannte Methoden zum Ziel. Kurz, der Beweis der Sätze ist so leicht und bequem, dass ich dieselben gar nicht mitgetheilt haben würde, wenn mir nicht die dabei auftretenden *Discontinuitäten* einigermassen beachtenswerth erschienen wären.

Sophus Lie, *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.*

In meiner zweiten Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie (Diese Berichte 1890, S. 355 ff.) habe ich gezeigt, dass im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume das sogenannte Monodromieaxiom des Herrn v. Helmholtz eine Folge von dessen drei ersten Axiomen ist, sobald man die Definition der freien Beweglichkeit, die Herr v. Helmholtz aufgestellt hat, in ihrem engsten Sinne fasst [1].

Herr Veronese giebt nun in seinem neuerdings erschienenen Werke: *Fondamenti di Geometria* die wichtigsten Ergebnisse, zu denen ich bei meinen Untersuchungen über die

---

1) Ich hebe hier ausdrücklich hervor, dass die Definition der freien Beweglichkeit nach dem Wortlaut der Helmholtz'schen Auseinandersetzungen in ihrem engsten Sinne *verstanden werden muss*. Herr v. Helmholtz verlangt nämlich erstens, dass *zwei beliebige* Punkte durch eine bei jeder Bewegung invariante Gleichung verknüpft seien und zweitens, dass die Beweglichkeit eines jeden Punktes *nur* durch die Gleichungen beschränkt sei, die ihn mit den andern Punkten verknüpfen (s. Gött. Nachr. 1868, S. 198—200). Es ist daher sicher, dass Herrn v. Helmholtz's Monodromieaxiom eine Folge seiner andern Axiome ist, wenn man diese nach ihrem Wortlaute nimmt. Es ist aber denkbar, dass seine Formulirung seine Meinung nicht ganz correct darstellt. An einer andern Stelle werde ich zeigen, dass nicht allein das Monodromieaxiom, sondern zugleich ein Theil des Axioms der freien Beweglichkeit überflüssig ist; es genügt anzunehmen, dass nach dem Festhalten eines Punktes jeder anderer Punkt sich frei auf einer Fläche bewegt, welche den festen Punkt nicht enthält.

Grundlagen der Geometrie gelangt bin, ganz richtig wieder, insbesondere auch das soeben mitgetheilte Ergebniss über das Monodromieaxiom. Er fügt aber hinzu, bereits Herr de Tilly habe in seinem *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie* eine ähnliche Behauptung aufgestellt, überdies habe Herr Klein später einen einfacheren Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung geliefert.

Ich werde zeigen, dass *diese Darstellung des Herrn* Veronese *durchaus unrichtig* ist.

Herr de Tilly hat gar nicht versucht zu beweisen, dass das Monodromieaxiom eine Folge von Herrn v. Helmholtz's drei ersten Axiomen ist, er hat etwas Derartiges nicht einmal behauptet; dagegen hat er gezeigt, oder wenigstens zu zeigen versucht, *dass das Monodromieaxiom überflüssig wird, wenn man jene drei ersten Axiome durch andere Axiome ersetzt.*

Herr Klein seinerseits hat allerdings geglaubt, meinen Beweis durch einen ungleich einfacheren ersetzen zu können, aber sein Beweis beweist zuviel und ist infolge dessen nicht stichhaltig.

Ich werde im Folgenden die eben aufgestellten Behauptungen näher begründen; ausserdem werde ich noch mit ein paar Worten auf eine Stelle in Herrn Lindemann's »Vorlesungen über die Geometrie des Raumes« eingehen. Herr Lindemann erwähnt nämlich dort meine ältere Note: Bemerkungen zu v. Helmholtz's Arbeit u. s. w. (d. Ber. 1886, S. 337 ff.), er hat aber nicht bloss diese meine Note, sondern auch die Helmholtz'sche Arbeit missverstanden.

Zunächst will ich zeigen, dass bei Herrn de Tilly die Helmholtz'schen Axiome durch andere ersetzt sind.

Herr v. Helmholtz bestimmt ohne weiteres den Punkt des Raumes von n Dimensionen durch n Coordinaten $x_1 \cdots x_n$, sodann definirt er die Linie als den Ort aller Punkte, die $n - 1$ unabhängige Gleichungen zwischen $x_1 \cdots x_n$ erfüllen, die Fläche als den Ort aller Punkte, die $n - 2$ unabhängige Gleichungen befriedigen, und so weiter. Die Bewegungen des Raumes fasst er auf als eine Schaar von Transformationen der

Punkte des Raumes, er denkt sie sich also bestimmt durch Gleichungen von der Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\,;\; a_1 \cdots a_r)\,, \qquad (i = 1 \cdots n)\,,$$

die gewisse Parameter $a_1 \cdots a_r$ enthalten. Den Begriff der Entfernung führt er ein, indem er verlangt, dass zwischen je zwei Punkten $x_1 \cdots x_n$ und $y_1 \cdots y_n$ eine von der Lage der Punkte unabhängige Gleichung:

$$\Omega(x_1 \cdots x_n\,,\; y_1 \cdots y_n) = 0$$

bestehe, die bei allen Bewegungen invariant bleibt. Der Zahl n ertheilt Herr v. Helmholtz erst später den bestimmten Werth: $n = 3$ und zwar ist diese Annahme bei ihm ein Axiom.

Ganz anders Herr de Tilly. Er definirt die Fläche als Grenze eines Raumtheils, die Curve als Grenze eines Flächentheils, den Punkt als Grenze eines Curventheils. Es führt den Begriff »geschlossene Fläche« ein, und sucht mit deren Hülfe zu beweisen, dass der Punkt durch *drei* Coordinaten bestimmt ist. Er versucht also zu beweisen, was Herr v. Helmholtz als Axiom festsetzt.

Unter der Entfernung zweier Punkte versteht Herr de Tilly zunächst nur eine Grösse, die durch die beiden Punkte bestimmt ist. Um den Begriff genauer festzustellen, denkt er sich zwei Punkte A und B durch eine Curve verbunden und lässt sodann einen Punkt P diese Curve von B aus in der Richtung nach A durchlaufen; er verlangt, *dass sich dabei die Entfernung AP stetig ändere, immer positiv bleibe und gegen Null convergire.*

Herr v. Helmholtz macht keine derartige Voraussetzung, dass die Entfernung zweier Punkte immer positiv bleibe und sich stetig mit den Coordinaten der beiden Punkte ändere. Diese Voraussetzung ist auch keineswegs in allen Fällen erfüllt. Zum Beispiel hat bei der Gruppe:

$$p\,,\; q\,,\; xp + r\,,\; yq + kr\,,\; x^2p + 2xr\,,\; y^2q + 2kyr$$

die Entfernung der beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 den Werth:

$$\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - l(x_2 - x_1) - k \cdot l(y_2 - y_1)$$

und dieser Ausdruck wird stets unendlich, sobald die Verbindungslinie der Punkte mit der z-Axe parallel ist.

Herr v. Helmholtz setzt freie Beweglichkeit voraus, Herr de Tilly dagegen gar nicht[1]; er setzt nur Folgendes voraus: Hat man gewisse Punkte A, B, C, D · · · und ausserdem noch einen Punkt B', der so beschaffen ist, dass die Gleichung:

$$AB = AB'$$

besteht, so giebt es stets auch gewisse Punkte C', D', · · ·, die den Gleichungen:

$$AC = AC', \quad AD = AD',$$
$$BC = B'C', \quad BD = B'D',$$
$$CD = C'D' \quad \text{u. s. w.}$$

genügen. Von dieser Annahme aus versucht er das Vorhandensein der freien Beweglichkeit zn beweisen.

Herr de Tilly beweist, dass Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten verschieden sein müssen; aus dem Princip der freien Beweglichkeit folgt das jedoch nicht, wie die vorhin angeführte Gruppe zeigt, bei der freie Beweglichkeit stattfindet.

Dass sich ein starrer Körper um zwei feste Punkte drehen kann, setzt Herr v. Helmholtz in seinem Axiom der freien Beweglichkeit ohne Beweis voraus. Herr de Tilly will es beweisen, was ihm allerdings nicht gelingt.

Augenscheinlich sind die Ausgangspunkte Beider so verschieden, wie nur möglich. Es kann daher nicht überraschen, wenn Herr de Tilly beweist, dass bei der Drehung um zwei feste Punkte alle andern Punkte geschlossene Bahncurven durchlaufen, während Herr v. Helmholtz dies als Axiom festsetzt; das eben ist ja sein Monodromieaxiom.

Alles in Allem hat Herr de Tilly ganz sicher nicht bewiesen, dass das Monodromieaxiom eine Folge der drei ersten Helmholtz'schen Axiome ist. Thatsache ist nur, dass Herr de Tilly,

---

1) Allerdings könnte man aus den Anmerkungen, die Herr de Tilly unterm Text macht, den Eindruck gewinnen, als ob auch er die freie Beweglichkeit als Axiome festsetzte; aus meinen folgenden Mittheilungen über seine Arbeit geht jedoch hervor, dass es sich anders verhält.

dessen Voraussetzungen von den Helmholtz'schen grundverschieden sind, von seinen Voraussetzungen ausgehend die Helmholtz'schen Axiome und insbesondere auch das Monodromieaxiom zu beweisen versucht. Hieran kann auch der Umstand nichts ändern, dass Herr de Tilly behauptet, er befinde sich in den meisten Punkten mit Herrn v. Helmholtz in Uebereinstimmung, aber in zwei Punkten weiche er von ihm ab[1]).

Welche Axiome Herr de Tilly eigentlich zu Grunde legen will, ist aus seiner Arbeit schwer zu ersehen. Sicher ist nur, dass er von dem Princip der freien Beweglichkeit bloss den ersten Theil voraussetzt, nämlich die Möglichkeit der Drehung um einen festen Punkt, *während er dem Begriff Entfernung Eigenschaften beilegt*, *welche Herr von Helmholtz nicht voraussetzt.*

Wenden wir uns jetzt zu Herrn F. Klein's Betrachtungen (s. Math. Ann. Bd. 37, S. 564 f.).

Herr Klein beginnt mit der Behauptung, das Monodromieaxiom stelle zunächst die Forderung, »dass volle Umdrehung um eine Axe möglich sei«, es werde dadurch zum Beispiel der Raum mit indefinitem Bogenelement ausgeschlossen. Dieser Theil des Axioms scheint Herrn Klein berechtigt.

Hiergegen muss man einwenden, dass auf dem Helmholtzschen Standpunkt der Begriff »volle Umdrehung um eine Axe« zunächst keinen bestimmten Sinn hat, einen wirklichen Sinn bekommt dieser Begriff erst dann, wenn man verlangt, dass jeder Punkt bei der Umdrehung um zwei feste Punkte eine geschlossene Curve beschreibt, wenn man also das Helmholtz'sche Monodromieaxiom in seinem vollen Umfange benutzt. Vielleicht versteht aber Herr Klein die Möglichkeit der vollen Umdrehung um eine Axe so: jedes Flächenelement kann sich um jedes in ihm enthaltene Linienelement drehen und kann durch Drehung ohne Umkehr in seine ursprüngliche Lage zurückkommen. In diesem Falle muss man Herrn Klein entgegenhalten, dass eine derartige Forderung im Monodromieaxiom keineswegs steckt;

1) Herr de Tilly sagt nicht, dass er *nur* in diesen beiden Punkten von Herrn v. Helmholtz abweiche; das würde auch den Thatsachen nicht entsprechen.

es könnte ja der Fall eintreten, dass die infinitesimale Transformation, die zwei unendlich benachbarte Punkte in Ruhe lässt, von *zweiter* Ordnung wäre. Alsdann blieben alle Flächenelemente, welche die beiden festgehaltenen Punkte enthielten, in Ruhe. Ich habe an einem Beispiele gezeigt, dass dieser Fall wirklich eintreten kann, wenn man das Princip der freien Beweglichkeit in seinem weitern Sinne versteht.

Als zweiten Theil des Monodromieaxioms bezeichnet Herr Klein die Forderung, dass bei der Drehung um eine Axe alle Punkte geschlossene Bahncurven beschreiben sollen. Diesen Theil des Axioms erklärt er für überflüssig, weil er beweisen zu können glaubt, dass überhaupt bei jeder Gruppe von ∞^1 Drehungen um eine Axe alle Punkte nothwendig geschlossene Bahncurven beschreiben. Wären die Ueberlegungen, deren er sich hierbei bedient richtig, so müsste zum Beispiel die eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$\frac{\delta x}{y + cx} = \frac{\delta y}{-x + cy} = \frac{\delta z}{cz} = \delta t$$

erzeugt wird, geschlossene Bahncurven haben, was augenscheinlich nicht der Fall ist. Herr Klein beweist also zuviel.

Ich kann unter diesen Umständen keineswegs zugeben, dass Herr Klein mein Ergebniss auf einfachere Weise abgeleitet habe. Es ist überhaupt *sicher*, dass man ganz anders tiefgehende Untersuchungen als die Herren v. Helmholtz und Klein angestellt haben, unternehmen muss, um diese Theorie zum Abschluss zu bringen.

Wenn übrigens Herr Klein die Ansicht ausspricht, ein Theil des Monodromieaxioms müsse aufrecht erhalten werden, um den Raum mit indefinitem Bogenelement auszuschliessen, so kann ich auch hierin ihm nicht beipflichten; die betreffenden Raumformen erfüllen nämlich das Princip der freien Beweglichkeit nicht. In einem Raume mit indefinitem Bogenelement gehört ja zu jedem festgehaltenen Punkte O eine Kugel (eine reelle Kegelfläche), die durch ihren Mittelpunkt O (die Kegelspitze) hindurchgeht; ein von O verschiedener Punkt P dieser Kugel kann aber bei der Drehung um O nicht, wie es das Princip der freien Beweglichkeit verlangt, in alle andern Punkte der Kugel übergehen, denn er kann nicht nach O übergeführt

werden. Ich muss daher auch fernerhin daran festhalten, dass das Monodromieaxiom aus den drei ersten HELMHOLTZ'schen Axiomen folgt, wohl bemerkt, *wenn man diese ihrem Wortlaute nach versteht.*

Endlich komme ich zu den Bemerkungen, die Herr LINDEMANN meiner ersten Note über den in Rede stehenden Gegenstand gewidmet hat.

Wenn Herr LINDEMANN ausführt, dass Herr v. HELMHOLTZ sich ebenso wie Herr LINDEMANN selbst, auf projective Gruppen beschränke, so thut er Herrn v. HELMHOLTZ Unrecht. Es mag sein, dass dieser in seinen populären Vorträgen die gerade Linie als die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten bezeichnet hat — in seiner Abhandlung über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, gebraucht er jedenfalls keinen Ausdruck dieser Art, er denkt darin überhaupt gar nicht daran, zu verlangen, dass bei den Bewegungen gerade Linien in gerade Linien übergehen sollen.

Ferner irrt sich Herr LINDEMANN, wenn er behauptet, unter diesen Umständen werde mein Bedenken hinfällig, dass es nicht ohne Weiteres erlaubt sei, die unendlich kleinen Bewegungen durch lineare Gleichungen darzustellen, denn selbst wenn die HELMHOLTZ'sche Arbeit bloss projective Transformationen in Betracht zöge, wäre es doch nicht von vorn herein erlaubt, anzunehmen, dass unter den infinitesimalen Transformationen, die den Punkt: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ invariant lassen, keine auftrete, die bloss Glieder von zweiter Ordnung in $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ enthielte. Eine andere Sache ist es, dass in Folge der von Herrn v. HELMHOLTZ begangenen Fehler, seine Resultate factisch nur für *lineare* (also nicht einmal für projective) Gruppen erwiesen sind.

Missverstanden hat mich Herr LINDEMANN endlich, wenn er mir die Aeusserung zuschreibt, ich hätte es für wahrscheinlich erklärt, dass die Forderung, der Kreis solle eine geschlossene Curve sein, sich aus den übrigen HELMHOLTZ'schen Axiomen als Folgerung ergäbe, und wenn er hinzufügt, dass meine Vermuthung für die parabolische Geometrie unzutreffend sei. Beschränkt man sich auf die Ebene, so unterliegt es keinem Zweifel, dass man die Forderung: der Kreis soll eine geschlossene Curve sein, als Axiom aufstellen muss. Fasst man dagegen

die Ebene als einen Theil des dreifach ausgedehnten Raumes auf, so liegt die Sache anders: das Monodromieaxiom ist in diesem Falle überflüssig, sobald man das Helmholtz'sche Princip der freien Beweglichkeit nach seinem Wortlaute deutet.

Um nicht missverstanden zu werden, füge ich noch das Folgende hinzu.

Meine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie sind vielfach missverstanden worden. Um solchen Missverständnissen in der Zukunft zu entgehen und einmal die noch schwebenden Fragen zur Entscheidung zu bringen, habe ich in dieser Note versucht mich möglichst präcis auszudrücken. Wenn ich bei berühmten Verfassern wesentliche Irrthümer gefunden habe, so habe ich dies ganz offen gesagt. Dies darf nicht missverstanden werden. Wenn ich z. B. jetzt offen sage, dass Herr v. Helmholtz in seiner viel besprochenen Note die Aufgabe die er sich gestellt hat, nicht erledigt hat, da seine Entwickelungen keineswegs zeigen, dass seine Axiome hinreichen, während auf der anderen Seite sein Monodromieaxiom und sogar ein Theil seines Princips der freien Beweglichkeit eine Folge seiner anderen Axiome ist, so hege ich doch fortwährend grosse Bewunderung für eben diese seine Arbeit, ja ich betrachte sie gewissermassen als *bahnbrechend*. Auf der andern Seite muss ich gestehen, dass Herr de Tilly's unzweifelhaft sehr werthvollen Untersuchungen mir nicht ganz präcis erscheinen, indem sie mit complicirten Begriffen operiren, deren Sinn mir zuweilen unklar ist.

Bei einer neuen Redaction meiner Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie werde ich den Nachweis, dass bei den von mir betrachteten Beispielen freie Beweglichkeit im weiteren Sinne stattfindet, wirklich durchführen.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch einige Bemerkungen über Herrn Schur's Untersuchungen über Transformationsgruppen hinzufügen.

Ich habe schon mehrmals anerkannt, dass seine Arbeiten auf diesem Gebiete Werth haben; ich muss aber jetzt hervorheben, dass er die Beziehungen seiner Untersuchungen zu den meinigen nach meiner Ansicht nicht correct wiedergegeben hat.

Einmal kann ich nicht anerkennen, dass seine Entwickelungen eine wesentliche Vereinfachung der Grundlagen meiner Theorie liefern, zumal da alle seine Entwickelungen unter einem, seinerzeit von Herrn Prof. Engel bemerkten, an der Spitze seiner ersten Arbeit begangenen Fehler leiden. Andererseits muss ich bemerken, dass seine Verweisungen fast ohne Ausnahme entweder unbestimmt oder uncorrect sind. Endlich möchte ich an Herrn Schur die Bitte richten, in Zukunft nicht bloss seine eignen Beweise meiner Sätze zu citiren, sondern jedenfalls gleichzeitig zu bemerken, dass die Sätze von mir herrühren.

INHALT.

Seite

Robert Behrend, Ueber die Löslichkeit von Doppelverbindungen. I. 1

M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind. I. 15

Friedrich Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. . . 43

A. Mayer, Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von *n* Variabeln. 54

C. Neumann, Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik. 86

Sophus Lie, Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie 106

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
NOV 5 1892
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

II.

MIT FÜNF FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1892.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD COLLEGE
NOV 5 1892
LIBRARY.

SITZUNG AM 7. MÄRZ 1892.

E. Drechsel, *Ueber die Spaltungsproducte des Caseïns.*

In meiner letzten Mittheilung[1]) über die Producte, welche bei der Spaltung des Caseïns durch Salzsäure entstehen, habe ich bereits darauf hingewiesen, dass das Lysin: $C_6H_{14}N_2O_2$ seiner empirischen Zusammensetzung nach als das nächst höhere Homologe des von Jaffé[2]) entdeckten Ornithins: $C_5H_{12}N_2O_2$ betrachtet werden kann. Jaffé hat bekanntlich Hühner mit Benzoësäure gefüttert, und dann in dem Harn der Thiere eine Säure, die Ornithursäure, gefunden, welche bei der Spaltung mit Salzsäure in 2 Mol. Benzoësäure und 1 Mol. Ornithin zerfiel, sich also in dieser Hinsicht der Hippursäure ähnlich verhielt. Man durfte hiernach erwarten, dass sich das Ornithin, und, falls es diesem wirklich homolog war, auch das Lysin, nach der Schotten-Baumann'schen Methode leicht werde benzoyliren lassen. Ich habe deshalb verschiedene Mutterlaugen, welche neben Lysin erhebliche Mengen von Chloralkalien enthielten, mit Natronlauge und Chlorbenzoyl behandelt, und zwar so, dass die angewandte Menge Chlorbenzoyl bei weitem nicht hinreichte, um sofort die ganze vorhandene Menge des Lysins zu benzoyliren; die alkalische Lösung wurde sodann mit Salzsäure übersättigt, der harzartige Niederschlag entfernt, die Mutterlauge durch Eindampfen vom Chlornatrium befreit, und dann wieder mit Natronlauge und Chlorbenzoyl behandelt. Man erhält auf diese Weise in der That leicht Benzoylderivate des Lysins, welche in ihren Eigenschaften die grösste Aehnlichkeit mit der Or-

1) Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1891, 248.
2) Ber. d. d. chem. Ges. X, 1925; XI, 406.

nithursäure von Jaffé zeigen; sie fallen aus der alkalischen Lösung auf Zusatz von Salzsäure als harzartige, halbflüssige Massen aus, welche in Alkohol sehr leicht, in Aether dagegen nur sehr schwer löslich sind und nach einiger Zeit zu krystallisiren anfangen. Leider dauert dieser Krystallisationsprocess sehr lange. und wenn man die selbst schön in weissen Nädelchen krystallisirte Substanz aus Alkohol umzukrystallisiren versucht, so scheidet sich dieselbe doch wieder zunächst als ein farbloses, in Wasser unlösliches Oel aus, welches nur sehr langsam krystallinisch erstarrt. Da es mir bisher nicht gelungen ist, ein krystallisirtes und schwerlösliches Salz dieses Benzoyllysins zu erhalten, so habe ich die nähere Untersuchung desselben einstweilen noch verschoben, um so mehr, als ich bei der dritten Benzoylirung der erwähnten Mutterlaugen noch ein anderes, leicht und schön krystallisirendes Benzoylderivat erhalten habe. Als nämlich die alkalische mit Chlorbenzoyl behandelte Flüssigkeit mit Salzsäure im Ueberschusse versetzt wurde, schied sich zunächst wieder ein zäher, halbflüssiger Niederschlag aus, aus der Mutterlauge krystallisirte aber über Nacht eine andere Substanz aus, welche im Gegensatze zum Benzoyllysin in Alkohol fast ganz unlöslich war und durch diesen vom ersteren getrennt werden konnte. Sie wurde in wenig Natronlauge gelöst, durch Essigsäure gefällt und aus Wasser umkrystallisirt. Auf diese Weise wurden schöne, farblose Prismen erhalten, welche in kaltem Wasser wenig, in kochendem leicht löslich sind; der Schmelzpunkt liegt bei 227°, doch schwärzt sich die Substanz schon bei 213°. In concentrirter Salzsäure ist die Substanz ziemlich leicht löslich. Die Analyse, welche Herr cand. chem. Welzel ebenso wie die folgenden auszuführen die Güte hatte, ergab:

1) 0.2322 g (1. Krystallisation) gaben 0.4731 g CO_2 = 0.129027 g C, und 0.1062 g H_2O = 0.0118 g H.

2) 0.2599 g (1. Krystallisation) gaben 32.2 ccm N bei 20°.0 und 749.6 mm Hg = 0,03717 g N.

3) 0.1992 g (2. Krystallisation) gaben 0.4043 g CO_2 = 0.110264 g C, und 0.0884 g H_2O = 0.009822 g H.

4) 0.0963 g (2. Krystallisation) gaben 11.9 ccm N bei 19°.0 und 770 mm Hg = 0.0138647 g N.

Aus diesen Zahlen berechnet sich die Formel $C_9H_{10}N_2O_3$, welche verlangt:

Berechnet:			Gefunden:			
$C_9H_{10}N_2O_3$			I.	II.	III.	IV.
C_9	= 108	55.67 %	55.57	—	55.35	—
H_{10}	= 10	5.15 -	5.08	—	4.93	—
N_2	= 28	14.43 -	—	14.30	—	14.4
O_3	= 48	24.74 -	—	—	—	—
	194	99.99				

Die Formel $C_9H_{10}N_2O_3$ aber ist die einer *Monobenzoyldiamidoessigsäure*:

$$C\begin{cases} H \\ NH_2 \\ NH \cdot CO \cdot C_6H_5 \end{cases} \cdot CO \cdot OH\,,$$

und in der That lässt sich die Substanz durch Erhitzen mit einer Mischung gleicher Volumina concentrirter Salzsäure und absoluten Alkohols im Rohr auf 140° leicht spalten, wobei Benzoëäthylester und salzsaure Diamidoessigsäure entstehen. Dampft man die vom Ester getrennte saure Lösung auf dem Wasserbade ein, so hinterbleibt ein beim Erkalten prächtig krystallisirender Syrup. Derselbe wurde in Wasser gelöst, mit Marmor auf dem Wasserbade erhitzt, bis die saure Reaction (Lackmus) völlig verschwunden war, vom überschüssigen Marmor getrennt, zum Syrup verdampft, und mit absolutem Alkohol behandelt; dabei löste sich das Chlorcalcium und es fielen prächtige, anscheinend rhombische Täfelchen aus, welche mit Alkohol, in welchem sie unlöslich sind, ausgewaschen wurden. Die Analyse ergab, dass sie das *Monochlorhydrat der Diamidoessigsäure*: $C_2H_6N_2O_2 \cdot HCl$ sind:

1) 0.1050 g Substanz gaben 0.0731 g CO_2 = 0.0199364 g C und 0.0524 g H_2O = 0.005822 g H.

2) 0.0957 g Substanz gaben 18.22 ccm N bei 22°0 und 759.4 mm Hg = 0.020612 g N.

3) 0.1004 g Substanz gaben 0.1110 g $AgCl$ = 0.02746 g Cl.

		Berechnet:	Gefunden: I.	II.	III.
	$C_2H_6N_2O_2 \cdot HCl$				
$C_2 =$	24	18.99 %	18.99	—	—
$H_7 =$	7	5.54 -	5.54	—	—
$N_2 =$	28	22.16 -	—	21.54	—
$O_2 =$	32	25.33 -	—	—	—
$Cl =$	35.34	27.97 -	—	—	27.35
	126.34	99.99			

Digerirt man die wässrige Lösung dieses Salzes mit Silberoxyd, so bildet sich Chlorsilber, und eine beträchtliche Menge Silberoxyd geht in die stark alkalisch reagirende Lösung über. Durch Schwefelwasserstoff wird dasselbe nicht völlig gefällt; die tiefbraune Lösung wird erst durch Erhitzen mit essigsaurem Kali filtrirbar, doch geht immer etwas Ag_2S mit durch das Filter und selbst durch anhaltendes Centrifugiren sind die letzten Spuren desselben nicht zu entfernen. Die fast völlig klare Lösung wurde eingedampft und der Syrup mit Alkohol behandelt; dabei schied sich die *Diamidoessigsäure* in schönen flachen Prismen von manchmal augitähnlichem Habitus aus, welche in Wasser sehr leicht, in Alkohol nicht löslich waren. Die Diamidoessigsäure ist mit der Hydrazinessigsäure von Curtius[1] nur isomer, nicht identisch, da sie nicht wie diese durch Erhitzen mit Salzsäure zersetzt wird; aus diesem letzteren Grunde geht auch mit grösster Wahrscheinlichkeit hervor, dass die beschriebene Substanz wirklich Diamidoessigsäure und nicht ein anderes Isomeres ist, doch werde ich mich bemühen, wenn ich mehr Material unter den Händen haben werde, noch den directen Beweis zu erbringen. In dem Auftreten und dem Verhalten der Diamidoessigsäure ist aber auch eine Stütze für die Ansicht gegeben, dass das Ornithin Diamidovaleriansäure, und das Lysin Diamidocapronsäure ist; wir kennen daher jetzt drei Glieder dieser Säurereihe $C_n H_{2n+2} N_2 O_2$, welche als Spaltungsproducte des Eiweisses auftreten, denn dass das Ornithin diesen Ursprung besitzt, kann wohl ebensowenig einem Zweifel unterliegen, wie dass das Glykokoll der Hippursäure dem Collagen entstammt. Das Auftreten der Diamidoessigsäure unter den Spaltungsproducten des Caseïns erscheint besonders bedeutsam,

1) Ber. d. d. chem. Ges. XXIII, 3029.

wenn man bedenkt, dass dieser Eiweisskörper lange Zeit hindurch fast der einzige ist, der sich in der Nahrung des Säuglings vorfindet. Vielleicht wird er im Organismus desselben zu Glykokoll umgewandelt und ermöglicht so die Entwicklung des Bindegewebes, überhaupt des Collagens während dieser Periode raschesten Wachsthums. In rein chemischer Hinsicht ist dagegen der Umstand interessant, dass die Diamidoessigsäure bei der Benzoylirung nach SCHOTTEN nur ein Monobenzoylderivat liefert, während das Lysin ein Dibenzoylderivat zu geben scheint. Vielleicht liegt die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens darin, dass die Diamidoessigsäure beide Amidogruppen an demselben Kohlenstoffatom gebunden enthält, das Lysin aber an zwei verschiedenen.

Die bisher mit Sicherheit erkannten Spaltungsproducte des Eiweisses durch Salzsäure sind demnach, mit Ausnahme des Tyrosins und der Phenyl-α-amidopropionsäure, Glieder der Reihen des Leucins ($C_n H_{2n+1} NO_2$), des Lysins ($C_2 H_{2n+2} N_2 O_2$), des Lysatins ($C_n H_{2n+1} N_3 O_2$) und der Glutaminsäure ($C_n H_{2n-1} NO_4$), während SCHÜTZENBERGER unter der Einwirkung des Baryts aus dem Eiweiss auch noch eigenthümliche Producte erhielt, welche er als Leuceïne und Glykoproteïne bezeichnet. HLASIWETZ und HABERMANN haben derartige Substanzen in ihren Versuchen nicht gefunden, dagegen gelang es vor einiger Zeit M. SIEGFRIED [1], einen Körper von der Zusammensetzung ($C_4 H_8 NO_2)_n$ in geringer Menge unter den Zersetzungsproducten des Conglutins durch Salzsäure aufzufinden, der also zu den Glykoproteïnen SCHÜTZENBERGER's: $C_m H_{2m} N_2 O_4$ gehören könnte. Bei der principiellen Wichtigkeit der Frage, ob die Eiweisskörper mit Salzsäure und Barythydrat dieselben Spaltungsproducte liefern, habe ich einige vorläufige Versuche angestellt, ob sich nicht in den Mutterlaugen von der Spaltung des Caseïns noch Glykoproteïne oder ähnliche Körper fänden. Zu diesem Zwecke habe ich die von der überschüssigen Phosphorwolframsäure befreiten Mutterlaugen eingedampft, krystallisiren lassen, die Mutterlaugen abgesaugt, wieder verdampft, und den schliesslich erhaltenen dicken Syrup mit absolutem Alkohol ausgezogen. Der unlöslich gebliebene Theil wurde in sehr concentrirter wässriger Lösung mit einem grossen Ueberschusse einer sehr concentrirten wäss-

1) Ber. d. d. Ges. XXIV, 418.

rigen Lösung von Phosphorwolframsäure versetzt, wodurch zunächst ein harzartiger, dann ein mehr pulvriger Niederschlag entstand (das Ende der Fällung ist kaum zu beobachten). Derselbe wurde abfiltrirt, mit wenig schwefelsaurem Wasser gewaschen, und dann mit Baryt zersetzt, das Filtrat vom Baryt befreit und hierauf zum Syrup verdampft. Aus diesem Syrup wurde durch Alkohol eine in krümlichen Massen krystallisirende Substanz abgeschieden, die durch Lösen in wenig Wasser und Fällen mit Alkohol gereinigt wurde. Die Analyse derselben ergab:

1) 0.1282 g Substanz gaben 0.2255 g $CO_2 = 0.0615$ g C, 0.0839 g $H_2O = 0.009322$ g H und 0.0036 g Asche,

2) 0.1114 g Substanz gaben 11.0 ccm N bei 17°5 und 747.8 mm Hg = 0.01253 g N.

Aus diesen Werthen berechnet sich für die aschefreie Substanz die Formel: $C_{10}H_{18}N_2O_5$:

	Ber.: $C_{10}H_{18}N_2O_5$		Gef.: I.	II.
C_{10} =	120	48.78%	49.36	—
H_{18} =	18	7.32 -	7.48	—
N_2 =	28	11.38 -	—	11.57
O_5 =	80	32.52 -	—	—
	246	100.00		

Die alkoholische Mutterlauge dieser Substanz wurde verdampft, der Rückstand in Wasser gelöst, mit überschüssigem Silberoxyd versetzt, filtrirt, mit Alkohol gefällt; dabei entstand ein weisser Niederschlag eines Silbersalzes, welches mit Alkohol gewaschen und über Schwefelsäure getrocknet wurde. Die Analyse dieses Salzes ergab:

1) 0.1857 g gaben 0.1559 g $CO_2 = 0.04252$ g C, 0.0467 g $H_2O = 0.00519$ g H, und 0.0965 g Ag.

2) 0.1504 g gaben 8.0 ccm N bei 18°0 und 759.4 mm Hg = 0.009228 g N.

Diese Werthe führen zu der Formel: $C_8H_{14}Ag_2N_2O_4$, welche verlangt:

Ber.:			Gef.:	
	$C_8H_{12}Ag_2N_2O_4$		I.	II.
C_8	= 96	23.08%	22.89	—
H_{12}	= 12	2.88 -	2.79	—
Ag_2	= 216	51.92 -	51.97	—
N_2	= 28	6.74 -	—	6.13
O_4	= 64	15.38 -	—	—
	416	100.00		

Aus diesen Versuchen geht zum mindesten soviel mit Sicherheit hervor, dass bei der Spaltung des Caseïns durch Säuren ausser den Gliedern der oben aufgeführten Amidosäurereihen auch noch andere Producte gebildet werden, welche zu den Glykoproteïnen und Leuceïnen Schützenberger's in naher Beziehung stehen, und so wird eine meiner nächsten Aufgaben sein, diese Substanzen in grösserer Menge darzustellen und näher zu untersuchen. Als weiteres nicht uninteressantes Resultat hat sich die Thatsache ergeben, dass auch schwächere Basen durch Phosphorwolframsäure gefällt werden können, wenn man nur mit genügend concentrirten Lösungen arbeitet und dieselben längere Zeit stehen lässt; sind die Niederschläge dann einmal entstanden, so zeigen sie sich so schwer löslich, dass man sie bequem und ohne grosse Verluste schnell ein paar Mal auswaschen kann. Schüttelt man dann die stark überschüssige Phosphorwolframsäure enthaltende Lösung im Scheidetrichter mit Aether, so fällt eine ätherische Lösung als schweres Oel aus; dieselbe enthält aber nicht reine Phosphorwolframsäure, sondern auch noch reichliche Mengen organischer Körper, welche den beschriebenen ganz ähnlich sind und demnächst näher untersucht werden sollen.

SITZUNG VOM 9. MAI 1892.

E. Study, *Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen.* Vorgelegt v. d. ao. Mitgliede Engel.

In der Theorie einer jeden Gruppe von linearen Transformationen ist es eine fundamentale Aufgabe, alle ganzen rationalen Invarianten der Gruppe zu finden. Unter einer »*Invariante*« wollen wir hier im engeren Sinne nur eine algebraische Form, d. i. eine homogene Function von beliebig vielen (Reihen von) Veränderlichen verstehen, die sich bei allen Transformationen der Gruppe bis auf einen numerischen Factor reproducirt.

Solche Aufgaben sind schon in einigen Fällen behandelt worden. Nachdem Herr F. Klein das Problem für die im binären Gebiet auftretenden endlichen Gruppen erledigt hatte, haben die Herren Maschke und Burkhardt sogleich mehrere der schwierigsten und verwickeltsten Beispiele in Angriff genommen [1]).

Die gegenwärtige Arbeit schlägt einen neuen Weg ein. In ihr wird die Theorie der Invarianten der endlichen Gruppen von getrennten linearen Transformationen auf gewisse Reihenentwickelungen gegründet, deren Glieder ähnlich den Lagrange-schen Resolventen gebildet sind. Diese Reihen haben für die Theorie der genannten Gruppen dieselbe Bedeutung, wie die Gordan'schen Reihen für die gewöhnliche Invariantentheorie. Zwischen beiden Arten von Reihenentwickelungen findet überhaupt eine weitgehende Analogie statt. Von besonderen Ergebnissen dieser mit sehr einfachen Hülfsmitteln geführten Unter-

---

1) Klein, Vorlesungen über das Icosaeder. Leipzig, 1884. — Maschke, Math. Ann. Bd. 30, S. 496 u. ff. Bd. 33, S. 317 u. ff. — Burkhardt, Math. Ann. Bd. 38, S. 161 u. ff.

suchung mag die eigenthümliche Rolle hervorgehoben werden, die dem *Apolaritätsbegriff* zufällt, und der Satz, dass man zur Bestimmung der Invarianten einer Gruppe der genannten Art im ungünstigsten Falle nur *reine* Gleichungen aufzulösen braucht.

Sodann wird ein Beispiel genauer untersucht, die Gruppe G_{16} von sechzehn vertauschbaren involutorischen Transformationen, von der die Punkte oder Ebenen des Raumes zu Kummer-schen Configurationen zusammengeordnet werden. Die Behandlung der bei dieser Gruppe invarianten Flächen gestaltet sich überraschend einfach auf Grund eines in § 6 mitgetheilten Satzes über die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Theorie ja mit unserer Gruppe nahe zusammenhängt. —

Zur Kennzeichnung des vom Verfasser eingenommenen Standpunktes mag Folgendes dienen:

Beschränkt man sich nicht darauf, die Verhältnisse der homogenen Coordinaten x_i zu betrachten, sondern fasst man diese als absolute Grössen auf, so kann man aus jeder Gruppe G von n collinearen Transformationen des Raumes eine isomorphe Gruppe G' des quinären Gebietes, eine Untergruppe der von Herrn S. Lie so genannten *speciellen linearen homogenen Gruppe* des Raumes von vier Dimensionen herleiten, die mindestens n oder $2n$ oder $4n$ Transformationen umfasst. Stellt man nun, wie es zweckmässig ist, die quaternäre Gruppe G analytisch durch die Transformationen der quinären Gruppe [1]) G' dar, so werden gewisse Invarianten von G sich bei diesen einfach mit dem Factor $+1$ reproduciren. Solche Invarianten sind »absolute Invarianten« genannt und in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt worden. Man scheint zu glauben, dass sie um der genannten Eigenschaft willen der Gruppe G oder auch nur der Gruppe G' gegenüber eine Art von Vorzug haben vor den übrigen, so dass man z. B. bei der Aufstellung eines sogenannten vollständigen Formensystems der Gruppe nur auf sie Rücksicht zu nehmen nöthig hätte.

Ich kann einer so einseitigen Auffassung des Invarianten-

---

1) Herr Maschke nennt diese in vier nicht-homogenen Veränderlichen geschriebenen Gruppen *quaternäre* Gruppen. Er befindet sich damit in einem wohl unbeabsichtigten Gegensatz zur gebräuchlichen Terminologie, wonach die Theorie der quaternären Formen der Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes entspricht, und es nur mit den Verhältnissen der vier Coordinaten zu thun hat.

begriffs schon deshalb nicht zustimmen, weil gewisse interessante Sätze dabei völlig verloren gehen. Die besprochene Annahme trifft aber auch gar nicht immer zu. Man kann sogar in manchen Fällen die Gruppe G' durch eine andere G'' ersetzen, die ganz dieselben (*in den x_i homogenen*) Invarianten hat, bei der aber die »absoluten« Invarianten keineswegs mit denen der Gruppe G' übereinstimmen. Unsere Gruppe G_{16} ist selbst ein schönes Beispiel dieser Art. Sie kann auf nicht weniger als sechzehn verschiedene Weisen durch eine Gruppe G' von 32 Transformationen dargestellt werden, und jedesmal hat sie andere »absolute Invarianten«.

Wenn sonach die charakteristische Eigenschaft dieser besonderen Invarianten nur eine untergeordnete Bedeutung hat, so kann auch wohl ein eigener Name für sie entbehrt werden. Zudem haben, wie mir scheint, andere Gebilde gegründeteren Anspruch auf die Bezeichnung.

Der Quotient aus irgend zwei Formen einer der in § 1 zu definirenden Invariantenschaaren hat nämlich folgende Eigenschaften:

1) Er bleibt völlig ungeändert bei den Transformationen der Gruppe, *wie man diese auch schreiben möge.*

2) Er bleibt ungeändert, wenn man alle Coordinaten x_i u. s. w. proportional vergrössert.

Diese rationalen Invarianten vom Grade Null, und sie allein, sind also das genaue Seitenstück zu den absoluten Invarianten der gewöhnlichen Invariantentheorie; sie kann man daher passend als *absolute Invarianten* bezeichnen.

1.

Allgemeines über Invarianten.

Die Aufgabe, alle ganzen rationalen Invarianten einer gegebenen Gruppe darzustellen, kann in zwei Schritte zerlegt werden: Erstens, man sucht alle Invarianten mit gegebenen Ordnungszahlen, d. h. alle Invarianten, in denen die verschiedenen Veränderlichen jede in einem bestimmten Grade auftreten — wobei man sich etwa auf die sogenannten Normalformen beschränken kann [1]) — zweitens, man sucht die so gefundenen

1) Wegen der Terminologie vgl. Gordan »Ueber das Formensystem binärer Formen«, Leipzig 1875, und des Verfassers »Methoden zur Theorie der ternären Formen«, Leipzig 1889.

Invarianten als ganze rationale Functionen einer kleinsten Anzahl von geeignet gewählten Invarianten auszudrücken.

Hier soll nur von dem ersten Schritte die Rede sein.

Sind J und J' Invarianten einer Gruppe G, beide mit denselben Ordnungszahlen, so ist keineswegs auch die Summe $J+J'$ immer eine Invariante. Dazu ist vielmehr nothwendig (und hinreichend), dass J und J' bei jeder Transformation S von G beide denselben Factor annehmen. Man sieht daraus, dass die Gesammtheit aller Invarianten mit gegebenen Ordnungszahlen in eine Reihe von linearen Schaaren zerfällt, der Art, dass eine Summe von mehreren Formen derselben Schaar immer eine Invariante ist, *niemals* aber eine Summe von Formen, die verschiedenen Schaaren entnommen sind. Der erste Theil dieser Behauptung ist selbstverständlich. Der zweite kann auch so ausgesprochen werden, dass zwischen Invarianten J_1, J_2, J_3, $\cdots J_\mu$ verschiedener Schaaren keine lineare Relation mit numerischen Coefficienten

$$c_1 J_1 + c_2 J_2 + \cdots + c_\mu J_\mu = 0$$

bestehen kann. Dass dieses im Falle $\mu = 3$ richtig ist, haben wir soeben schon gesehen. Daraus schliesst man aber sofort auf die Unmöglichkeit einer entsprechenden Relation im Falle $\mu = 4$: könnte eine solche stattfinden, so müsste $c_1 J_1 + c_2 J_2 = - c_3 J_3 - c_4 J_4$ eine Invariante sein, was unmöglich ist; u. s. w.

I. *Die Lösung der Aufgabe: Alle Invarianten J mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen zu finden, erfordert nur noch die Auflösung von linearen Gleichungen, wenn man die Invarianten einer jeden einzelnen Transformation eines Systems von solchen Transformationen der Gruppe G kennt, die zusammen die ganze Gruppe erzeugen.*

Auch dieses ist nahezu selbstverständlich: Kennt man die Invarianten der erzeugenden Transformationen S_1, S_2, S_3, $\cdots$ von G, so werden die Invarianten von G selbst alle die Formen sein, die sowohl Invarianten von S_1, als auch Invarianten von S_2, S_3, $\cdots$ sind. Um diese Formen aufzufinden, hat man aber nur lineare Gleichungen aufzulösen, oder, geometrisch gesprochen, lineare Mannigfaltigkeiten zum Durchschnitt zu bringen. (Der hiermit angezeigte Weg zur Aufsuchung der Invarianten einer Gruppe G wird übrigens im gegebenen Falle noch mannigfache Abänderungen und Abkürzungen gestatten. Wenn die Gruppe

G insbesondere zusammengesetzt ist, wird man zweckmässiger Weise nach einander die Invarianten solcher Untergruppen suchen, die eine sogenannte Reihe der Zusammensetzung bilden.)

Nach dem Gesagten wird Alles darauf ankommen, die Invarianten einer einzelnen periodischen linearen Transformation zu finden, d. h. die Invarianten einer endlichen Gruppe

$$S^0,\ S^1,\ S^2,\ \cdots S^{\mu-1},$$

die durch Wiederholung einer einzigen Transformation S entsteht. Dies kann zwar im Allgemeinen nicht durch Auflösung von nur linearen Gleichungen geleistet werden, erfordert aber nur die Zuziehung von ganz einfachen Irrationalitäten, nämlich von solchen, wie sie aus der Auflösung reiner Gleichungen hervorgehen.

Das anzuwendende Verfahren ist der Methode der Lagrange-schen Resolventen nachgebildet.

Wir denken uns die Transformation S so geschrieben, dass ihre Determinante gleich Eins wird; so dass S^μ genau $= S^0$, gleich der identischen Transformation wird, ohne irgend einen vor die Veränderlichen tretenden gemeinsamen Factor. Ist dann ε eine primitive μ^{te} Einheitswurzel und $F = F^{(0)}$ irgend eine algebraische Form mit beliebig vielen Veränderlichen, $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots F^{(\mu-1)}, F^{(\mu)} = F^{(0)}, \cdots$ die Reihe der Formen, die aus F durch die Transformationen $S^0, S^1 \cdots S^{\mu-1}, S^\mu = S^0, \cdots$ hervorgehen, so wird offenbar eine jede der Formen

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu F_0 = F^{(0)} + F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots + F^{(\mu-1)} \\ \mu F_1 = F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \cdots + \varepsilon^{\mu-1} F^{(\mu-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu F_{\mu-1} = F^{(0)} + \varepsilon^{\mu-1} F^{(1)} + \varepsilon^{2\mu-2} F^{(2)} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)^2} F^{(\mu-1)}, \end{array}\right.$$

sofern sie nicht etwa identisch den Werth Null hat, eine Invariante unserer Gruppe. Auf diese Weise entstehen aber auch *alle* Invarianten der Gruppe. Denn die nicht identisch verschwindenden unter den Formen F_i nehmen bei der Transformation S jede einen anderen Factor an; sie gehören also zu verschiedenen Schaaren; und andere Invarianten kann es nicht geben, da nach der Formel

$$(2)\qquad F = F_0 + F_1 + \cdots + F_{\mu-1}$$

bereits jede beliebige Form mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen durch Formen F_i linear ausgedrückt werden kann.

In den Formen F_i kommen die Veränderlichen nicht mehr in allgemeinster Weise vor, sondern nur noch in gewissen Verbindungen; mit anderen Worten, ihre Coefficienten genügen gewissen linearen Gleichungen. Diese können wir sofort aufstellen.

Bezeichnen wir nämlich der Kürze halber mit Π_i die Operation, durch die wir die Form F_i aus der Grundform F hergeleitet haben, so dass

$$F_i = \Pi_i F ,$$

so finden wir durch eine kleine Rechnung, dass für verschiedene Werthe von i und k

$$\Pi_i F_k = 0 , \qquad \text{dagegen} \quad \Pi_i F_i = F_i \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} \Pi_0 F = \Pi_1 F = \cdots\cdot = \Pi_{i-1} F \\ = \Pi_{i+1} F = \cdots = \Pi_{\mu-1} F = 0 \end{aligned}$$

sagen also aus, dass die Grundform F selbst schon zur i^{ten} Invariantenschaar gehört; sie stellen die gesuchten Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten dar.

Wir haben hiermit den Satz gewonnen:

II. *Wenn die Determinante der linearen Transformation S von der Periode μ den Werth Eins hat, und wenn ausserdem die μ^{ten} Einheitswurzeln rational bekannt sind, so erfordert die Aufsuchung aller Invarianten J der Transformation S nur noch die Auflösung linearer Gleichungen.*

Bei vorgeschriebenen Ordnungszahlen einer Grundform F gibt es höchstens μ verschiedene Schaaren von Formen F_i, denen die Invarianteneigenschaft zukommt.

Jede beliebige Form F lässt sich auf eine einzige Weise als Summe von Formen F_i darstellen, die je einer der genannten Schaaren angehören.

Um die Transformation S auf die verlangte Form zu bringen, hat man (im Gebiete N^{ter} Stufe) aus ihrer Determinante die N^{te} Wurzel zu ziehen.

Uebrigens ist es für die Geltung unserer Ueberlegung nicht gerade nöthig, dass die Determinante von S den Werth Eins hat; ist sie eine μ^{te} Einheitswurzel, so lassen sich dieselben

Schlüsse machen. Wir wollen indessen an jener bestimmteren Vorstellung festhalten, da eine genaue Bezeichnung der erforderlichen Irrationalitäten ohnehin eine Unterscheidung verschiedener Fälle und ein tieferes Eingehen auf den Gegenstand erfordern würde, was hier entbehrt werden kann.

Der Fall, dass man weniger als μ verschiedene Schaaren von Invarianten mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen erhält, tritt, wie gesagt, dann ein, wenn einige der Formen F_i verschwinden. Ob dieses stattfindet, hängt erstens von den Eigenschaften der Transformation S ab, und zweitens von den Ordnungszahlen der Grundform F. Wenn S gegeben ist, so gibt es, wie sich zeigen lässt, immer nur eine *endliche* Anzahl von Systemen von Ordnungszahlen, deren zugehörige Reihenentwickelung

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_{\mu-1}$$

sich auf weniger als μ Glieder reducirt. Aus allen anderen Formen F gehen wirklich μ verschiedene Schaaren von Invarianten hervor.

Zu einem bemerkenswerthen Ergebniss werden wir geführt, wenn wir neben den Formen F Formen Φ betrachten, die jenen dualistisch gegenüber stehen. (»Methoden«, S. 85.)

Für diese Formen besteht natürlich eine ganz ähnliche Reihenentwickelung, wie für die Formen F. Wir wollen aber, um zu einem möglichst einfachen Satz zu gelangen, ein etwas abgeändertes System von Bezeichnungen verwenden, indem wir die Formen, die durch die Transformationen $S, S^2, \cdots\cdots S^{\mu-1}$ aus Φ abgeleitet sind, nicht mit $\Phi_1 \cdots \Phi_{\mu-1}$, sondern in umgekehrter Folge mit $\Phi_{\mu-1} \cdots \Phi_1$ bezeichnen. Die Formen Φ_i werden sonach definirt durch die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \mu\Phi_0 = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots + \Phi^{(\mu-1)} \\ \mu\Phi_1 = \Phi^{(0)} + \varepsilon^{-1}\Phi^{(1)} + \varepsilon^{-2}\Phi^{(2)} + \cdots + \varepsilon^{1-\mu}\Phi^{(\mu-1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu\Phi_{\mu-1} = \Phi^{(0)} + \varepsilon^{1-\mu}\Phi^{(1)} + \varepsilon^{2-2\mu}\Phi^{(2)} + \cdots + \varepsilon^{-(\mu-1)^2}\Phi^{(\mu-1)}. \end{cases}$$

Von der hierdurch definirten Reihenentwickelung der Form $\Phi = \Phi^{(0)}$:

$$(5)\qquad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \cdots + \Phi_{\mu-1}$$

gilt offenbar noch alles Das, was wir vorhin über die Reihenentwickelung der Form F gesagt haben.

Wir denken uns jetzt die Veränderlichen der Form F in ganz bestimmter Weise denen der Form Φ zugeordnet, und bilden die bilineare Invariante $[F, \Phi]$, deren Verschwinden das »Conjugirtsein« von F und Φ ausdrückt. (»Methoden«, S. 85.) Setzen wir hierein für F und Φ ihre Reihenentwickelungen, so entsteht zunächst die Summe

$$[F, \Phi] = \sum_0^{\mu-1}{}_{\varkappa} \sum_0^{\mu-1}{}_{\lambda} [F_\varkappa, \Phi_\lambda].$$

Aus dieser fallen aber alle Glieder heraus, bei denen der Index $\varkappa$ vom Index λ verschieden ist. Da nämlich die Determinante der Transformation S nach Voraussetzung den Werth Eins hat, so wird allgemein

$$[F^{(\sigma)}, \Phi^{(\tau)}] = [F^{(\sigma+1)}, \Phi^{(\tau+1)}] = [F^{(\sigma+2)}, \Phi^{(\tau+2)}] = \cdots,$$

also

$$\mu^2 \cdot [F_\varkappa, \Phi_\lambda]$$
$$= \{1 + \varepsilon^{\varkappa-\lambda} + \varepsilon^{2(\varkappa-\lambda)} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(\varkappa-\lambda)}\}$$
$$\cdot \{[F^{(0)}, \Phi^{(0)}] + \varepsilon^{-\lambda}[F^{(0)}, \Phi^{(1)}] + \cdots + \varepsilon^{-(\mu-1)\lambda}[F^{(0)}, \Phi^{(\mu-1)}]\},$$

und dieser Ausdruck hat den Werth Null, so oft $\varkappa \neq \lambda$ ist.

Wir haben also die einfachere Entwickelung anzusetzen:

$$(6) \quad [F, \Phi] = [F_0, \Phi_0] + [F_1, \Phi_1] + \cdots + [F_{\mu-1}, \Phi_{\mu-1}].$$

Diese Gleichung ist eine Identität sowohl in Bezug auf die Coefficienten von F, als auch in Bezug auf die Coefficienten von Φ. Sie vertritt vollständig die beiden Reihenentwickelungen (2) und (5); denn aus ihr gehen jene wieder hervor, wenn man einmal die Symbole von Φ, das andere Mal die Symbole von F durch Veränderliche ersetzt. Wir schliessen daraus, dass das Glied $[F_i, \Phi_i]$ in (6) nicht identisch verschwinden kann, es sei denn, dass F_i und Φ_i selbst identisch gleich Null sind; denn anderfalls könnten wir eine ganz beliebige Form F durch eine Summe von Formen ausdrücken, die zusammen weniger linear-unabhängige Constante enthielten, als sie selbst. Ja wir können sogar den Schluss ziehen, dass die Form F_i von genau so vielen Constanten abhängt, wie die Form Φ_i; denn wenn dem nicht so wäre, so würde die Ausrechnung der Invariante $[F, \Phi]$ eine geringere Zahl von Gliedern ergeben, als die Zahl der linear-unabhängigen Coefficienten von F oder Φ beträgt.

Wir können hiernach den letzten Satz wie folgt ergänzen:

III. *Aus zwei Grundformen F und Φ, deren Veränderliche einander dualistisch entsprechen, gehen nach dem letzten Satz zwei Reihenentwickelungen hervor, deren Glieder Invarianten der periodischen Transformation S sind.*

Die Glieder dieser Reihen lassen sich in bestimmter Weise einander zuordnen, so dass jedes Glied F_i der ersten Reihe conjugirt (apolar) ist zu jedem Glied $\Phi_\varkappa$ der zweiten Reihe, mit Ausnahme des einen ihm selbst zugeordneten Gliedes Φ_i.

Die einander entsprechenden Schaaren von Invarianten F_i und Φ_i enthalten beide gleichviele linear-unabhängige Formen.

Man kann dies noch auf andere Weise bestätigen. Man findet nämlich durch Anwendung des Satzes II auf lineare Formen oder auch durch eine einfache geometrische Überlegung, dass sich jede periodische lineare Transformation im Gebiete N^{ter} Stufe auf die canonische Form

$$x_i' = \varepsilon^{\lambda_i} x_i \qquad (i = 1 \cdots N) \tag{7}$$

bringen lässt. In den entsprechenden Coordinaten eines Gebietes $(N-1)^{\text{ter}}$ Stufe lautet dann dieselbe Transformation

$$u_i' = \varepsilon^{-\lambda_i} u_i \qquad (i = 1 \cdots N); \tag{8}$$

die Transformation (7) geht also durch die dualistische Transformation $y_i = u_i$ über in

$$y_i' = \varepsilon^{-\lambda_i} y_i \qquad (i = 1 \cdots N); \tag{9}$$

diese ist aber keine andere als die entgegengesetzte der Transformation (7), abgesehen von der Bezeichnung der Veränderlichen.

Eine jede von einer einzigen periodischen linearen Transformation erzeugte Gruppe ist also zu sich selbst dualistisch; sie wird bei der von uns getroffenen Auswahl der Veränderlichen durch die dualistische Transformation des Polarsystems $\Sigma x_i y_i = 0$ in sich selbst übergeführt. Es kann daher nicht überraschen, dass in den Reihenentwickelungen zweier zu einander dualistischer Formen F und Φ entsprechende Glieder auftreten, deren Formen von gleichvielen Constanten abhängen. Auch den sonstigen Inhalt des Satzes III bestätigt man leicht auf Grund der Formeln (7) und (8).

Der Satz III kann angewendet werden auf Gruppen, die von

periodischen linearen Transformationen erzeugt sind, mögen sie nun eine endliche oder unendliche Anzahl, mögen sie nur getrennte oder auch unendlich kleine Transformationen enthalten. Es folgt daraus, dass jede Schaar von Invarianten F_i mit gegebenen Ordnungszahlen identisch conjugirt ist zu jeder Schaar $\Phi_\varkappa$ von Invarianten mit den dualistisch entsprechenden Ordnungszahlen, *mit Ausnahme der Formen von höchstens einer Schaar.*

Wir betrachten hier nur endliche Gruppen von getrennten linearen Transformationen. Wir wollen annehmen, dass bei einer solchen Gruppe G ϱ verschiedene Schaaren von Invarianten F_i mit gegebenen Ordnungzahlen vorhanden seien, und ebensoviele Schaaren von Invarianten Φ_i mit den dualistisch entsprechenden Ordnungszahlen. Es mag ebensoviele (M_i) linear-unabhängige Formen F_i geben, als es linear-unabhängige Formen Φ_i gibt; und es soll $[F_i, \Phi_\varkappa] = 0$ sein, so oft $i \neq \varkappa$ ist; endlich soll die Gleichung $[F_i, \Phi_i] = 0$ sowohl bei beliebig gegebenem F_i, als auch bei gegebenem Φ_i nur noch durch $M_i - 1$ linear-unabhängige Formen der anderen Art erfüllt werden.

Unter diesen Bedingungen gilt der folgende Satz, der ein unmittelbarer Ausfluss der Theorie der linearen Gleichungen ist:

IV. *Durch die Gruppe G sind unter den genannten Verhältnissen Reihenentwickelungen der Formen F und Φ bestimmt:*

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_{\varrho-1} + F_\varrho ,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \cdots + \Phi_{\varrho-1} + \Phi_\varrho ,$$

von folgenden Eigenschaften:

1) $F_0 \cdots F_{\varrho-1}$ *und* $\Phi_0 \cdots \Phi_{\varrho-1}$ *gehören den ϱ verschiedenen Invariantenschaaren an.*

2) *Jedes Glied der ersten Reihe ist conjugirt zu jedem Glied der zweiten Reihe, mit Ausnahme des einen Gliedes, das denselben Index hat; so dass*

$$[F, \Phi] = [F_0, \Phi_0] + \cdots + [F_{\varrho-1}, \Phi_{\varrho-1}] + [F_\varrho, \Phi_\varrho] .$$

Die neue Reihenentwickelung unterscheidet sich von den bisher betrachteten dadurch, dass noch ein Glied $[F_\varrho, \Phi_\varrho]$ hinzutritt. Dieses ist indessen nur dann von Null verschieden, wenn die Gesammtheit der $M_0 + M_1 + \cdots + M_{\varrho-1}$ linear-unabhängigen Formen $F_0, F_1, \cdots F_{\varrho-1}$ die Gesammtheit der linear-unabhängigen Formen F noch nicht erschöpft; denn die Formen Φ_ϱ z. B. bilden die Gesammtheit der Formen, die zu allen Formen

$F_1 \cdots F_{\varrho-1}$ gleichzeitig conjugirt sind. Die Formen F_ϱ und Φ_ϱ sind zwar nicht Invarianten der Gruppe G; wohl aber hat die von ihnen gebildete lineare Schaar die Invarianteneigenschaft. Ist $\varrho = 0$, gibt es überhaupt keine Invarianten mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen, so wird $F = F_\varrho$, $\Phi = \Phi_\varrho$; dann entsteht also keine wirkliche Reihenentwickelung.

Die angegebenen Voraussetzungen, unter denen die im Satze IV genannten Reihenentwickelungen zu Stande kommen, haben scheinbar einen sehr speciellen Charakter. Sie treffen aber bei einer ganzen Reihe von sehr verschiedenartigen Gruppen zu, die ich daraufhin betrachtet habe. Es ist mir nicht gelungen, einen Fall aufzufinden, in dem die besprochenen Reihenentwickelungen *nicht* vorhanden wären. Sollte es sich hier wirklich um eine ganz allgemeine Eigenschaft der endlichen Gruppen von getrennten linearen Transformationen handeln, so wäre das gewiss ein merkwürdiger Satz. Jedenfalls verdient die Frage eine nähere Untersuchung. Es würde dabei vor Allem zu entscheiden sein, ob zwei solche Gruppen G und G', die durch eine dualistische Transformation in einander übergehen, immer auch durch eine collineare Transformation in einander übergeführt werden können, oder ob es Gruppen gibt, bei denen dies nicht möglich ist.

Für eine Classe von Gruppen lässt sich übrigens die Gültigkeit des Satzes IV allgemein beweisen, nämlich für die Gruppen des Gebietes N^{ter} Stufe, die N linear-unabhängige Punkte in Ruhe lassen. Bei allen diesen Gruppen gehört zu einer ganz beliebigen Grundform F eine Reihenentwickelung ohne Zusatzglied

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_{\varrho-1}\,.$$

Wie es sich nun auch um den Gültigkeitsbereich des Satzes IV verhalten möge, soviel geht aus unseren Betrachtungen hervor, dass die Zahl der Invariantenschaaren einer Gruppe mit irgendwelchen Ordnungszahlen niemals grösser sein kann als der Grad der Gruppe.

Wir verlassen nunmehr die allgemeinen Betrachtungen, um uns sogleich der Eingangs genannten speciellen Gruppe zuzuwenden. Vielleicht wird sich ein anderes Mal Gelegenheit bieten, auch Beispiele allgemeineren Charakters von dem hier gewonnenen Standpunkte aus zu betrachten.

2.

Darstellung der Gruppe G_{16}.

Die wichtigsten Eigenschaften unserer Gruppe sind hauptsächlich von den Herren KLEIN und ROHN in einer Reihe von Abhandlungen dargelegt worden, die zumeist in den mathematischen Annalen erschienen sind[1]). Es würde uns viel zu weit führen, wollten wir die Ergebnisse, die ja auch als ziemlich bekannt gelten dürfen, auch nur in ihren Grundzügen wiederholen. Wir setzen diese Dinge als dem Leser bereits geläufig voraus, und beschränken uns darauf, die Formeln und Bezeichnungen zu erklären, von denen nachher Gebrauch gemacht werden soll.

Wir stellen die sechs KLEIN'schen Fundamentalcomplexe, oder die durch sie vermittelten dualistischen Transformationen, durch die (allerdings nicht ganz in derselben Bedeutung) zuerst von H. WEBER gebrauchten »Charakteristiken« (1)···(6) dar. Führen wir auf alle möglichen Arten zwei verschiedene dieser Transformationen hinter einander aus, so entstehen 15 involutorische collineare Transformationen mit den »Charakteristiken« (ik), die zusammen mit der identischen Transformation, die der Gleichförmigkeit halber mit (00) bezeichnet werden soll, die zu untersuchende Gruppe G_{16} bilden. Durch Ausführung von je dreien der Transformationen (i) hinter einander entstehen dann noch zehn weitere dualistische Transformationen, die Polarsysteme der zehn Fundamentalflächen, z. B. (123) = (456).

Wir wollen nun annehmen, dass alle sechs Fundamentalcomplexe reell sind. Dann werden neun von den Fundamentalflächen reelle geradlinige Flächen 2. Grades, die zehnte aber wird eine Fläche mit nur imaginären Punkten. Diese wollen wir mit (135) = (246) bezeichnen. Ferner sind von den 15 Fundamentaltetraedern sechs reell; sie bilden zwei zusammengehörige, der Fläche (135) = (246) zugeordnete Reihen von je drei sogenannten desmischen Tetraedern. Eines von diesen, das Tetraeder, dessen Gegenkantenpaare die Axen der Transformationen (12), (34), (56) sind, wählen wir als Grundtetraeder eines Coordinatensystems $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$. Bezeichnen wir die zugehörigen Liniencoordinaten in bekannter Weise mit p_{ik}

1) Die ziemlich ausgedehnte Litteratur findet man grösstentheils angeführt bei HESS, Nova Acta Bd. 50, S. 99 u. ff. (Halle 1890).

(so dass z. B. $p_{23} = x_2' x_3'' - x_3' x_2''$, $p_{01} = x_0' x_1'' - x_1' x_0''$), und mit $2X_i$ die Verbindungen:

$$(1)\quad \begin{cases} 2X_1 = p_{23} + p_{01}\,, & 2X_2 = p_{23} - p_{01} \\ 2X_3 = p_{31} + p_{02}\,, & 2X_4 = p_{31} - p_{02} \\ 2X_5 = p_{12} + p_{03}\,, & 2X_6 = p_{12} - p_{03}\,, \end{cases}$$

so wird $X_i = 0$ die Liniengleichung des Fundamentalcomplexes (i); und $X_i' = -X_i$ wird die Gleichung der dualistischen Transformation (i) in den Complexcoordinaten X_j. Die zwischen den Liniencoordinaten bestehende quadratische Identität nimmt die Form an:

$$(2)\quad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 - X_6^2 = 0\,.$$

Mit Hülfe der Formeln (1) berechnen wir leicht die Ausdrücke der von den Transformationen (i) erzeugten Gruppe G_{32} in Tetraedercoordinaten. Zunächst finden sich die Ausdrücke der Transformationen (i) selbst. Hieraus ergibt sich dann die zur Fläche (135) = (246) gehörige Transformation: $u_j' = x_j$, oder $x_j' = u_j$ $(j = 0, 1, 2, 3)$. Setzt man dann diese wieder mit den Transformationen (i) zusammen, so entstehen die Ausdrücke der Transformationen (35), (51), (13) und (46), (62), (24). Wir vereinigen beide Arten von Transformationen in der folgenden, wohl ohne Weiteres verständlichen Tabelle:

(3)

	(1)	(3)	(5)	(2)	(4)	(6)	
$u_0' =$	x_1	x_2	x_3	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$= x_0'$
$u_1' =$	$-x_0$	$-x_3$	x_2	x_0	$-x_3$	x_2	$= x_1'$
$u_2' =$	x_3	$-x_0$	$-x_1$	x_3	x_0	$-x_1$	$= x_2'$
$u_3' =$	$-x_2$	x_1	$-x_0$	$-x_2$	x_1	x_0	$= x_3'$
	(35)	(51)	(13)	(46)	(62)	(24)	

Hier darf man x_j und u_j, und gleichzeitig x_j' und u_j' vertauschen, ohne dass die Beziehung der Formeln zu den Transformationen (i), (ik) geändert wird. Die Transformationen (00), (35), (51), (13) stellen für sich eine Gruppe dar, eine sogenannte

Vierergruppe, gebildet von *Schiebungen* der Fläche (135) = (246), d. h. von Transformationen, die jede Erzeugende der einen Schaar dieser Fläche, nämlich jede den Complexen (1), (3), (5) gemeinsame Gerade in sich selbst überführen. Eine ähnlich beschaffene Gruppe bilden die Transformationen (00), (46), (62), (24); und beide Gruppen zusammen erzeugen die Gruppe G_{16}, in der Weise, dass jede Transformation von G_{16} auf eine einzige Art in zwei Factoren zerlegt werden kann, die jenen beiden Gruppen angehören.

Man bildet so eine der Tafel (3) analoge Tafel, die alle noch nicht angeschriebenen Transformationen (ik) und die zu den neun übrigen Fundamentalflächen gehörigen dualistischen Transformationen enthält.

Wir theilen diese Ausdrücke nicht mehr mit, sondern geben statt dessen sogleich die quadratischen Formen an, die, gleich Null gesetzt, die zehn Fundamentalflächen bedeuten. Wir stellen die zur Fläche (ikl) gehörige Form durch das Zeichen $\mathfrak{X}_{ikl}$ dar, führen aber daneben noch eine andere Bezeichnung $a_{\lambda\mu}$ durch nur zwei Indices ein, von der wir ebenfalls Gebrauch machen werden.

$$(4)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{X}_{135} = 2\mathfrak{X}_{246} = a_{00} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ 2\mathfrak{X}_{235} = 2\mathfrak{X}_{146} = a_{11} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ 2\mathfrak{X}_{145} = 2\mathfrak{X}_{236} = a_{22} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ 2\mathfrak{X}_{136} = 2\mathfrak{X}_{245} = a_{33} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \\ 2\mathfrak{X}_{134} = 2\mathfrak{X}_{256} = a_{23} = \quad 2(x_2 x_3 + x_0 x_1) \\ 2\mathfrak{X}_{165} = 2\mathfrak{X}_{243} = a_{32} = \quad 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ 2\mathfrak{X}_{635} = 2\mathfrak{X}_{241} = a_{31} = \quad 2(x_3 x_1 + x_0 x_2) \\ 2\mathfrak{X}_{132} = 2\mathfrak{X}_{546} = a_{13} = \quad 2(x_3 x_1 - x_0 x_2) \\ 2\mathfrak{X}_{125} = 2\mathfrak{X}_{346} = a_{12} = \quad 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) \\ 2\mathfrak{X}_{435} = 2\mathfrak{X}_{216} = a_{21} = \quad 2(x_1 x_2 - x_0 x_3)\,. \end{cases}$$

Der Zahlenfactor 2 ist den Grössen $\mathfrak{X}_{ikl}$ hinzugefügt worden, um in gewissen Formeln des § 6 Brüche zu vermeiden. — Genau ebenso lauten die entsprechenden Formen in den Ebenencoordinaten u_j. Wir bezeichnen diese Formen, die besonders hinzuschreiben wohl überflüssig ist, mit $2\,\mathfrak{U}_{ikl} = 2\,\mathfrak{U}_{i'k'l'} = \mathfrak{a}_{\lambda\mu}$.

Wir untersuchen nun das Verhalten der quadratischen

Formen $a_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{a}_{\lambda\mu}$ gegenüber den Transformationen (3). a_{00} (und ebenso $\mathfrak{a}_{00}$) wird offenbar von keiner dieser Transformationen geändert; die anderen Grössen $a_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{a}_{\lambda\mu}$ aber erleiden Vorzeichenwechsel, die sich besonders einfach darstellen, wenn wir uns der quadratischen Anordnung

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

bedienen. Die in (3) angeführten Transformationen werden dann in den Veränderlichen $a_{\lambda\mu}$ oder $\mathfrak{a}_{\lambda\mu}$ durch die folgenden Vorzeichenwechsel ausgedrückt:

(5)

(35)	(51)	(13)	(46)	(62)	(24)
$+--$	$-+-$	$--+$	$+++$	$---$	$---$
$+--$	$-+-$	$--+$	$---$	$+++$	$---$
$+--$	$-+-$	$--+$	$---$	$---$	$+++$

Wir knüpfen hieran einige für das Folgende wichtige Bemerkungen über die analytische Darstellung unserer Gruppe. Die Formeln (3) enthalten nur Transformationen von der Determinante $+1$; und diese erzeugen, beliebig wiederholt, bei Auffassung der Coordinaten x_j als absoluter Grössen, eine Gruppe nicht von 16, sondern von 32 verschiedenen Transformationen, da auch die geometrisch bedeutungslose Transformation $x_j' = -x_j$ aus ihnen hergeleitet werden kann. Diese Gruppe G'_{32} lässt den Ausdruck a_{00}, wie gesagt, völlig ungeändert; und hierin besteht das Charakteristische unserer Darstellungsweise: Die Gruppe G'_{32} ist die einzige reelle von zehn derartigen Gruppen, die dadurch entstehen, dass man an Stelle des Ausdrucks a_{00} irgend einen der Ausdrücke $a_{\lambda\mu}$ treten lässt.

Ausser diesen Gruppen gibt es noch sechs weitere, die die entsprechende Eigenschaft in Bezug auf einen der Ausdrücke X_j haben, und diese Gruppen sind wieder unter einander gleichartig. Alle diese Gruppen sind enthalten in einer Gruppe von 64 Transformationen, die entstehen, wenn man zu den Formeln (3) noch die Transformation $x_j' = \sqrt{-1}\, x_j$ hinzufügt. Anders aber als die Coordinaten x_j verhalten sich die Grössen X_i, $a_{\lambda\mu}$.

Diese werden bei allen jenen Gruppen G'_{32} durch eine Gruppe von nur 16 Transformationen, also durch je eine mit G_{16} *holoëdrisch* isomorphe Gruppe unter einander vertauscht.

Aus dem Gesagten geht u. A. hervor, dass unserer Darstellung gegenüber thatsächlich nur die Fläche (135) = (246) ausgezeichnet ist, und dass die anderen Flächen sich gleichartig verhalten, wiewohl ihre den Formeln (4) zu entnehmenden Gleichungen ein verschiedenes Ansehen haben. Man bestätigt das sofort durch Uebergang zu einem der fünf übrigen reellen Fundamentaltetraeder, oder auch geometrisch durch Betrachtung der Gruppe von 1152 collinearen Transformationen, die die Fläche (135) = (246) in Ruhe lassen, die anderen Fundamentalflächen aber unter einander vertauschen.

Wir wollen nun die Coordinaten der Ecken der sechs reellen Tetraeder wirklich noch hinschreiben, um uns bei späteren Gelegenheiten auf diese Angaben stützen zu können. Sie ordnen sich, wie gesagt, in zwei Reihen von desmischen Tetraedern, *entsprechend den drei positiven und den drei negativen Gliedern, die in der Entwickelung der Determinante*

(12)	(14)	(16)
(32)	(34)	(36)
(52)	(54)	(56)

auftreten. Die Coordinaten der Ecken werden

(6)

	(12), (34), (56)				(32), (54), (16)				(52), (14), (36)			
$x_0=$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_1=$	0	1	0	0	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
$x_2=$	0	0	1	0	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
$x_3=$	0	0	0	1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1

	(16), (34), (52)				(36), (54), (12)				(56), (14), (32)			
$x_0=$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
$x_1=$	0	0	1	−1	1	−1	0	0	0	0	1	1
$x_2=$	1	−1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	−1
$x_3=$	0	0	1	1	0	0	1	−1	1	−1	0	0

Alle sechs Tetraeder sind unter einander gleichwerthig; in Bezug auf jedes von ihnen nimmt die Gruppe, auch was die Realitätsverhältnisse angeht, dieselbe Form an.

Wir bemerken, dass die in den Formeln (6) vorkommenden Transformationen (ik) gerade die sind, die in den Formeln (3) fehlen. Jede der auftretenden Verbindungen, z. B. (12), (34), (56) bildet zusammen mit der identischen Transformation eine Gruppe, die Gruppe der Spiegelungen an den Kantenpaaren des zugehörigen Tetraeders. Je zwei solche Gruppen, die zwei Tetraedern *derselben* Reihe entsprechen, bestimmen eine Zerlegung der Gruppe G_{16}, ähnlich der vorhin (S. 135) betrachteten. Jede Transformation von G_{16} kann nämlich auf eine einzige Weise in zwei Factoren zerspalten werden, deren jeder einer von zwei solchen Gruppen angehört.

Wir werden von diesen Bemerkungen alsbald Gebrauch zu machen haben.

3.

Das Formensystem der Gruppe G_{16}.

Die quaternären Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen können nach Clebsch zurückgeführt werden auf Formen, die nur einen Punkt x — im Grade l —, eine Linie X — im Grade m —, und eine Ebene u — im Grade n enthalten, und diese können dann weiter auf Normalformen reducirt werden. Hier ist es zweckmässig, die letzte Reduction bei Seite zu lassen. Unsere Aufgabe soll demnach darin bestehen, alle Invarianten mit gegebenen Ordnungszahlen $[l, m, n]$ aufzufinden.

Wir behaupten nun zunächst:

Wenn $l+n$ ungerade ist, so gibt es keine Invarianten mit den Ordnungszahlen l, m, n.

Zum Beweise betrachten wir die beiden Transformationen:

$$S \quad \begin{cases} x_0' = x_0, & x_1' = x_1, & x_2' = -x_2, & x_3' = -x_3, \\ u_0' = u_0, & u_1' = u_1, & u_2' = -u_2, & u_3' = -u_3, \end{cases}$$

$$T \quad \begin{cases} x_0' = x_2, & x_1' = x_3, & x_2' = x_0, & x_3' = x_1, \\ u_0' = u_2, & u_1' = u_3, & u_2' = u_0, & u_3' = u_1. \end{cases}$$

Wir wenden diese nach einander auf die Grundform $F(x^l, X^m, u^n)$ an und zwar einmal in der Reihenfolge $S\,T$, wodurch F' entstehen mag, und dann in der Reihenfolge TS, wodurch F''

aus F hervorgehen soll. Ist nun F eine Invariante, so muss $F' = F''$ sein. Andrerseits geht aber F' in F'' auch durch die Substitution $T^{-1}S^{-1}TS$ oder $x_i' = -x_i$, $u_i' = -u_i$ über; es wird also, wenn $l+n$ ungerade ist, auch $F' = -F''$; d. h. es ist in diesem Falle $F = F' = F'' = 0$.

Wenn dagegen $l+n$ gerade ist, so gibt es immer Invarianten; und zwar sind wir im Stande, die Gestalt einer solchen von vorn herein zu bezeichnen.

Betrachten wir nämlich die sechs Formen X_j [0, 1, 0], die zehn quadratischen Formen $a_{\lambda\mu}$ [2, 0, 0] und die zehn Formen $\alpha_{\lambda\mu}$ [0, 0, 2], die aus den $a_{\lambda\mu}$ dadurch hervorgehen, dass man u an Stelle von x schreibt, endlich die sechzehn bilinearen Formen [1, 0, 1], die, gleich Null gesetzt, die 1 + 15 collinearen Transformationen der Gruppe G_{16} bedeuten, so erkennen wir diese 42 Formen ohne Weiteres als Invarianten unserer Gruppe. Sie alle sind linear-unabhängig, und jede von ihnen ist, für sich allein genommen, eine Invariantenschaar im Sinne des § 1.

Nun lassen sich die Liniencoordonaten p_{ik} und die Producte $x_i x_\varkappa$, $x_i u_\varkappa$, $u_i u_\varkappa$ durch unsere Formen ausdrücken; durch jene Grössen aber kann man wiederum alle Formen $[l, m, n]$ darstellen, und zwar noch in mannigfacher Weise, wenn nur $l+n$ gerade ist. Es folgt also:

Jede beliebige Form mit den Ordnungszahlen $[l, m, n]$ kann, sofern $l+n$ gerade ist, als ganze rationale Function der genannten 42 Formen dargestellt werden. Insbesondere gilt dies von jeder Invariante der Gruppe G_{16}.

Die 42 Formen bilden also das, was man, im weitesten Sinne des Wortes, als ein »*vollständiges Formensystem*« der Gruppe zu bezeichnen hat.

Durch die Aufstellung eines solchen Formensystems ist im Allgemeinen noch nicht so viel gewonnen, wie man zunächst vielleicht glauben möchte. Die Frage ist vielmehr, wie sich die Producte der gefundenen Grundformen auf die verschiedenen Invariantenschaaren vertheilen, und wie man jede einzelne Schaar durch eine kleinste Zahl von unabhängigen Formen darstellen kann. Beides kann, bei unbestimmten Werthen der Zahlen $l, m, n,$ zu sehr umständlichen Rechnungen Anlass geben. In unserem Falle aber gestaltet sich die Antwort zunächst auf die erste Frage überraschend einfach.

Jede unserer 42 Formen definirt nämlich, gleich Null gesetzt

eine collineare oder dualistische Transformation des Raumes, dargestellt durch eine der 32 Charakteristiken (00), (*ik*), (*i*), (*ikl*). Einem Product von mehreren der 32 Grundformen kann man demnach ebenfalls eine bestimmte Charakteristik zuordnen, nämlich die »*Summe*« der Charakteristiken seiner Factoren, d. i. die Charakteristik des Products der Transformationen, die den einzelnen Factoren entsprechen. Zwei verschiedene Producte mit den Ordnungszahlen [*l*, *m*, *n*] gehören nun dann zu der nämlichen Schaar von Invarianten, wenn sie dieselbe Charakteristik haben[1]).

Um diesen Satz zu beweisen, braucht man nicht einmal zu untersuchen, welche Factoren denn die 42 Grundformen bei den Transformationen von G_{16} annehmen. Stellen wir nämlich die sechs dualistischen Transformationen (*i*) durch gleich Null gesetzte bilineare Formen dar, z. B. (1) durch die Formen

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_0 y_1 - x_1 y_0 ,$$
$$u_0 v_1 - u_1 v_0 + u_2 v_3 - u_3 v_2 ,$$

so werden die Formen (*ik*) bilineare Covarianten dieser Formen (*i*), und ebenso die quadratischen Formen (*ikl*) trilineare Covarianten. Wenn also X_i, X_k, X_l bei einer bestimmten Transformation von G_{16} die Factoren ε_i, ε_k, ε_l ($= \pm 1$) annehmen, so wird die Form (*ik*) bei derselben Transformation den Factor $\varepsilon_i\,\varepsilon_k$ erhalten, und jede der beiden Formen (*ikl*) den Factor $\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_l$. Der Factor, den irgend eine der 42 Grundformen annimmt, hängt also nur von ihrer Charakteristik ab, und folglich der Factor eines Products nur von der Charakteristik des Products.

---

1) Man kann dieses Kennzeichen noch in eine andere Form bringen, die zwar der geometrischen Betrachtung ferne liegt, aber an sich selbst von Interesse ist. Das Rechnen mit den Charakteristiken (*i*), (*ikl*) und (00), (*ik*) entspricht nämlich genau dem Rechnen mit den sogenannten eigentlichen Θ-Charakteristiken und den Gruppencharakteristiken, die man aus zwei mod. 2 zu nehmenden Zahlenpaaren bilden kann. Den sechs Fundamentalcomplexen können dabei die sechs ungeraden Charakteristiken

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

noch beliebig zugeordnet werden; dann gehört zu jeder unserer Formen eine bestimmte eigentliche oder Gruppen-Charakteristik. Zwei verschiedene Producte mit den Ordnungszahlen [*l*, *m*, *n*] gehören dann zur selben Schaar, wenn die Charakteristikensumme der Factoren beidemal dieselbe ist. Vergl. Weber, Crelle's Journal, Bd. 84. S. 340 u. ff. Staude, Math. Ann. Bd. 24, S. 281 u. ff. Bd. 25, S. 363.

Wir wollen dem hiermit bewiesenen merkwürdigen Satz ein geometrisches Gewand geben:

Jedem zulässigen Werthsystem der Ordnungszahlen $[l, m, n]$ *entsprechen sechzehn verschiedene Schaaren von Invarianten der Gruppe* G_{16}, *ausgenommen natürlich die Fälle* [2, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 2], *in denen nur* 10, 6, 10 *einzelne Invarianten vorhanden sind.*

Die Producte der 12 *Grundformen vertheilen sich auf diese Schaaren in der Weise, dass die den Factoren entsprechenden Transformationen, hinter einander ausgeführt, bei jeder einzelnen Schaar eine bestimmte, für die Schaar charakteristische Transformation ergeben.*

Wenn also $l + 2m + n$ *durch vier theilbar ist, so gibt es eine Schaar mit der Charakteristik* (0 0), *und fünfzehn Schaaren mit den Charakteristiken* (ik); *wenn aber* $l + 2m + n$ *nur durch zwei theilbar ist, so sind sechs Schaaren mit den Charakteristiken* (i) *und zehn Schaaren mit den Charakteristiken* (ikl) *vorhanden.*

Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, dass die einzelnen Schaaren, die durch Vertauschung der Charakteristiken (1) ... (6) in einander übergehen, natürlich auch durch die Transformationen der Gruppe G_{11520} von $16 \cdot 6!$ collinearen Transformationen unter einander vertauscht werden, die den Inbegriff der sechs Fundamentalcomplexe in Ruhe lassen, und dass die 16 Transformationen (i), (ikl) jede Invariantenschaar $[l, n, m]$ in die Schaar $[m, n, l]$ mit derselben Charakteristik überführen.

Daraus, dass ebenso viele linear-unabhängige Invarianten mit den Ordnungszahlen $[l, m, n]$ und $[n, m, l]$ vorhanden sind, als es überhaupt Formen mit diesen Ordnungszahlen gibt, können wir schliessen, dass der Satz IV, § 1 auf unsere Gruppe G_{16} anwendbar ist. Stellen wir nämlich eine beliebige Form $F(x^l, X^m, u^n)$ als Summe von Invarianten F_i dar, und ebenso $\Phi(u^l, X^m, x^n)$ als Summe von Invarianten Φ_k, so wird jedes Glied der ersten Reihe conjugirt zu jedem Glied der zweiten Reihe, mit Ausnahme von *höchstens* einem Glied (S. 131 oben). Es muss aber wirklich auch zu jedem Glied F_i ein Glied Φ_i gehören, das nicht identisch zu ihm conjugirt ist, da sonst in der Reihenentwickelung der Invariante $[F, \Phi]$ zu wenig Constante auftreten würden (vgl. S. 129). Ueberdies überzeugt man sich auch leicht, z. B. durch Betrachtung der erwähnten Gruppe G_{11520}, dass immer zwei solche Glieder *nicht* identisch conjugirt sind, die zu derselben Charakte-

ristik gehören. Der Satz IV, § 1 nimmt also in unserem Falle die folgende besondere Form an:

Jede der beiden Grundformen $F(x^l, X^m, u^n)$, $\Phi(x^n, X^m, u^l)$ *kann, wenn* $l+n$ *gerade ist, auf eine einzige Weise in eine Summe von* 16 (*bez.* 6, 10) *Gliedern zerlegt werden, die einzeln den verschiedenen Invarianten-Schaaren angehören.*

Je zwei Glieder beider Reihen, die verschiedene Charakteristiken haben, sind conjugirt, so dass in der Reihenentwickelung der bilinearen Invariante $[F, \Phi]$ *nur* 16 (*bez.* 6, 10) *Glieder vorkommen:*

$$[F, \Phi] = \sum_1^{16} [F_i, \Phi_i].$$

Man wird dies, in den nachher zu behandelnden besonderen Fällen, leicht durch Ausrechnung bestätigen.

Endlich mag noch folgende Bemerkung hervorgehoben werden:

Simultane Covarianten von solchen Grundformen, die Invarianten der Gruppe G_{16} *sind, sind ebenfalls Invarianten von* G_{16}, *deren Charakteristik leicht berechnet werden kann.*

Beispielsweise hat eine Grundform mit der Charakterisik (00), etwa eine Kummer'sche Fläche, nur Covarianten mit der Charakteristik (00), während eine Grundform mit einer anderen Charakteristik Covarianten mit derselben Charakteristik und ausserdem noch solche mit der Charakteristik (00) hat.

Mit den hiermit bewiesenen Sätzen ist unsere Aufgabe, wie gesagt, noch keineswegs erledigt. Wir können allerdings die allgemeinste Invariante von G_{16} nunmehr wirklich hinschreiben; aber wir erhalten, von ganz einfachen Fällen abgesehen, jede einzelne Invariante noch unendlich oft, wegen der identischen Relationen, die zwischen unseren 12 Grundformen bestehen. Solche Identitäten können, nach § 1, nur zwischen Invarianten derselben Schaar, also zwischen Producten mit gleicher Charakteristik stattfinden. Sie sind nicht schwer zu behandeln. Um nicht zu sehr in Weitläufigkeiten zu gerathen, wollen wir uns aber von jetzt an auf die nächstliegenden Fälle, auf die algebraischen *Flächen* und *Liniencomplexe* beschränken. Wir werden also nun zu untersuchen haben, wie viele und welche linear-unabhängige Flächen oder Complexe jede einzelne Invariantenschaar enthält.

Von beiden Aufgaben ist die die einfachere, die sich auf die Complexe bezieht. Denn zwischen den sechs Liniencoordi-

naten X_i besteht eine einzige quadratische Relation, die in § 2 angegebene Identität (2).

Ein verwickelteres System von Relationen findet zwischen den zehn Grössen $a_{\lambda\mu}$ statt. Aber auch diese Identitäten sind wohlbekannt. Die Ausdrücke $a_{\lambda\mu}$ sind ja nichts Anderes, als die *Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution.* Indem wir im Uebrigen auf § 1 und § 5 der Abhandlung: »Von der Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen« (Math. Ann. Bd. 39, S. 514 u. ff.) verweisen, beschränken wir uns hier darauf, die Vertheilung der genannten Relationen auf die sechzehn Schaaren von invarianten Flächen 4. O. kurz zu besprechen.

15 Relationen zwischen je drei Producten von zwei Grössen $a_{\lambda\mu}$ entsprechen den 15 unter einander gleichwerthigen Schaaren (ik) von Flächen 4. O. Die Schaar (12) z. B. enthält die drei Producte

$$\mathfrak{X}_{134} \cdot \mathfrak{X}_{156} = \mathfrak{X}_{256} \cdot \mathfrak{X}_{234} ,$$
$$\mathfrak{X}_{135} \cdot \mathfrak{X}_{164} = \mathfrak{X}_{261} \cdot \mathfrak{X}_{235} ,$$
$$\mathfrak{X}_{136} \cdot \mathfrak{X}_{145} = \mathfrak{X}_{245} \cdot \mathfrak{X}_{236} ,$$

und zwischen diesen besteht eine lineare Relation.

Zweitens gibt es 15 Relationen zwischen je vier Quadraten der Fundamentalflächen. Jede der Transformationen (ik) ist nämlich eine Schiebung (S. 135) in Bezug auf die vier Flächen, die nach Abzug der eben betrachteten sechs noch übrig sind. Diese vier Flächen enthalten die Axen der Transformation (ik); und zwischen den Quadraten der zugehörigen Formen besteht wiederum eine lineare Identität; in unserem Beispiel also zwischen den Quadraten

$$\mathfrak{X}^2_{123} , \quad \mathfrak{X}^2_{124} , \quad \mathfrak{X}^2_{125} , \quad \mathfrak{X}^2_{126} .$$

Aber von diesen 15 Relationen sind nur fünf unabhängig, so dass in der Flächenschaar (00), wie es sein muss, nur noch fünf linear-unabhängige Flächen übrig bleiben.

Wir gehen auf die hinlänglich bekannte merkwürdige Gruppirung der 10 Flächen a^2_{ik} und der 15 Fundamentaltetraeder nicht näher ein, und wenden uns nun sogleich zur Betrachtung der invarianten Liniencomplexe.

4.

Invariante Complexe.

Um abzuzählen, wieviele linear-unabhängige Complexe die einzelne invariante Schaar enthält, benutzen wir die Identität (2), § 2 dazu, den Grad etwa der Grösse X_6 in dem homogenen Ausdruck $F^m(X)$ auf Null oder Eins herabzudrücken. So gelangen wir zu dem folgenden Satz:

Die Schaar (00) *enthält, wenn m gerade,* $= 2\mu$ *ist,*

$$\frac{1}{12}(\mu+1)^2(\mu^2+2\mu+12)$$

linear-unabhängige Complexe

$$\Phi^\mu + X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 \cdot \Phi^{\mu-3},$$

und jede der Schaaren (ik)

$$\frac{1}{12}\mu(\mu+1)^2(\mu+2)$$

Complexe, (12) *z. B. die Complexe*

$$X_1 X_2 \cdot \Phi^{\mu-1} + X_3 X_4 X_5 X_6 \cdot \Phi^{\mu-2}.$$

Wenn ferner $m = 2\mu + 1$ *ist, enthält jede der Schaaren* (j)

$$\frac{1}{12}(\mu+1)(\mu+2)(\mu^2+3\mu+6)$$

Complexe, z. B. die Schaar (1) *die Complexe*

$$X_1 \cdot \Phi^\mu + X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 \cdot \Phi^{\mu-2}$$

und jede der Schaaren (ikl)

$$\frac{1}{12}\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)$$

Complexe, z. B. die Schaar $(123) = (456)$ *die Complexe*

$$X_1 X_2 X_3 \cdot \Phi^{\mu-1} + X_4 X_5 X_6 \cdot \Phi^{\mu-1}.$$

Φ^k *bedeutet hier überall eine homogene Function* k^{ten} *Grades der Grössen* $X_1^2 \cdots X_6^2$.

Man überzeugt sich sofort davon, dass die hingeschriebenen Complexe und die aus ihnen durch Vertauschung der Charakteristiken (1) ⋯ (6) hervorgehenden die Gesammtheit aller

$$\frac{(m+1)(m+2)^2(m+3)}{12}$$

linear-unabhängigen Complexe m^{ten} Grades ausmachen.

Die in den Ausdrücken unserer Invarianten auftretenden Formen Φ sind, wie der Ausdruck eines Complexes $F^m(X)$ überhaupt, nur bis auf Vielfache des für die Coordinaten X_i einer geraden Linie verschwindenden Ausdrucks

$$(1)\qquad P = X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 - X_6^2$$

bestimmt. Die hierdurch hervorgerufene Vieldeutigkeit in der analytischen Darstellung eines Liniencomplexes ist ein besonders bei Aufgaben der Invariantentheorie störender Uebelstand. Sie kann aber bekanntlich vermieden werden auf Grund eines von CLEBSCH aufgefundenen Satzes. Wir wollen dieses Theorem, das als Vorbild einer ganzen Reihe ähnlicher Sätze eine besondere Bedeutung gewinnt, hier in einer etwas abgeänderten Fassung wiedergeben:

Die Gleichung eines Liniencomplexes m^{ten} Grades lässt sich mit Hülfe der Identität $P = 0$ immer und nur auf eine Weise in eine solche Form $F^m(X) = 0$ bringen, dass die Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial X_4^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X_5^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial X_6^2} = 0$$

identisch erfüllt wird. Mit anderen Worten, der Complex lässt sich symbolisch darstellen als m^{te} Potenz eines speciellen linearen Complexes.

Man darf also schreiben

$$F = [AX]^m = [A_1 X_1 + \cdots + A_6 X_6]^m,$$

und dabei annehmen, dass der Ausdruck

$$[A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 + A_5^2 - A_6^2] \cdot [AX]^{m-2}$$

identisch verschwindet [1]).

Setzen wir nunmehr voraus, dass die Gleichung $F = 0$ eines Complexes m^{ten} Grades bereits in dieser sogenannten »*Normalform*« vorliegt, so gelangen wir zu einer ganz besonders einfachen Gestalt der Reihenentwickelung von F. Es gilt nämlich der folgende Satz:

---

1) s. CLEBSCH Math. Ann. Bd. 2, S. 1 u. ff. und die Abhandlung des Verfassers »Ueber quadratische Formen und Liniencomplexe« Sächs. Ber. 1890, S. 172 u. ff., wo der Zusammenhang des Satzes mit der Apolaritätstheorie dargelegt ist.

Zerlegt man die Form $F = [AX]^m$, *die in der Normalform gegeben sein soll, dadurch in Invarianten der Gruppe* G_{16}, *dass man alle Producte* $X_i X_k X_l \cdots$ *mit gleicher Charakteristik zusammenfasst, so hat jedes der so entstehenden sechzehn Entwickelungsglieder von selbst schon die Normalform, genügt also identisch der Differentialgleichung* (2).

Um dies einzusehen, denken wir uns F nach Invarianten von G_{16} entwickelt, $F = F_1 + \cdots + F_{16}$, und wenden beiderseits den Differentiationsprocess (2) an. Dann erhalten wir links Null, nach Voraussetzung, und rechts eine Summe, die mit $F_1'' + \cdots + F_{16}''$ bezeichnet werden mag. In dieser ist nun jedes Glied wieder eine Invariante von G_{16}, vom Grade $m-2$ in den X_i; und zwar hat F_k'' dieselbe Charakteristik wie F_k. Denn alle Producte der Grössen X_i, die in F_k'' vorkommen, entstehen aus den in F_k vorkommenden Producten dadurch, dass man Factoren von der Form $c . X_i^2$ unterdrückt; und dabei bleibt die Charakteristik eines Productes erhalten. Eine Summe von Invarianten, die verschiedenen Schaaren angehören, kann aber, wie wir gesehen haben, nur dann verschwinden, wenn alle einzelnen Summanden verschwinden.

Hiermit haben wir eine einfache, und was noch wichtiger ist, eindeutig bestimmte Darstellungsweise für die bei der Gruppe G_{16} invarianten Liniencomplexe gefunden. Zugleich haben wir damit eine Reihenentwickelung für die bilineare Invariante

$$[F, \Phi] = [A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3 - A_4 B_4 + A_5 B_5 - A_6 B_6]^m$$

zweier in der Normalform gegebener Complexe m^{ten} Grades

$$F = [A X]^m, \quad \Phi = [B X]^m .$$

Bei der zweiten Aufgabe, zu deren Behandlung wir uns nunmehr wenden, der Frage nach den invarianten Flächen, scheinen die Verhältnisse zunächst viel verwickelter zu liegen. Man möchte so einfache Ergebnisse, wie sie die Theorie der Complexe bietet, kaum erwarten. Wir werden aber in § 6 sehen, dass die obigen Sätze in der Theorie der Flächen dennoch ihr genaues Gegenstück haben, und dass die invarianten Flächen sich in der That eben so leicht und eben so erschöpfend behandeln lassen wie die invarianten Complexe.

5.

Invariante Flächen.

Um zu erkennen, wieviele unabhängige Flächen jede einzelne Invariantenschaar enthält, sehen wir von den in § 3 gewonnenen Ergebnissen zunächst gänzlich ab, und bestimmen die Invariantenschaaren selbst noch ein zweites Mal, indem wir dem in § 1 vorgezeichneten Gedankengang folgen.

Den zurückzulegenden Weg theilen wir zweckmässiger Weise noch in zwei Abschnitte, indem wir erst die Invarianten der Gruppe von vier Transformationen aufsuchen, die zu einem Fundamentaltetraeder gehört (S. 138). Die Invarianten von G_{16} selbst stellen sich dann als Durchschnitt der Invarianten-Mannigfaltigkeiten dar, die zwei verschiedenen, passend gewählten Untergruppen dieser Art entsprechen.

Wir fragen zuerst nach allen Flächen l^{ter} O., die bei *den* linearen Transformationen von G_{16} in Ruhe bleiben, die alle Kanten unseres Coordinatentetraeders einzeln in sich selbst überführen, d. h. nach den Invarianten der Gruppe

(1)

	(00)	(12)	(34)	(56)
$x_0' =$	x_0	x_0	x_0	x_0
$x_1' =$	x_1	x_1	$-x_1$	$-x_1$
$x_2' =$	x_2	$-x_2$	x_2	$-x_2$
$x_3' =$	x_3	$-x_3$	$-x_3$	x_3

Diese sind so einfach, dass man sie unmittelbar hinschreiben kann. Jedem Werthe von l entsprechen vier Schaaren von Invarianten, die zusammen alle $\binom{l+3}{3}$ linear-unabhängigen Flächen l^{ter} O. enthalten; nämlich, wenn l *gerade* ist, eine Schaar mit

$$\frac{1}{24}(l+2)(l^2+4l+12)$$

linar-unabhängigen Flächen:

$$(2) \qquad \Omega^{\frac{l}{2}} + x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot \Omega^{\frac{l}{2}-2}$$

und drei Schaaren mit je

$$\frac{1}{24} l(l+2)(l+4)$$

unabhängigen Flächen, z. B.

$$(3) \qquad x_0 x_1 \cdot \Omega^{\frac{l}{2}-1} + x_2 x_3 \cdot \Omega^{\frac{l}{2}-1};$$

und wenn l ungerade ist, vier Schaaren mit je

$$\frac{1}{24}(l+1)(l+2)(l+3)$$

Flächen, z. B.

$$x_0 \cdot \Omega^{\frac{l-1}{2}} + x_1 x_2 x_3 \cdot \Omega^{\frac{l-3}{2}}.$$

Ω^k ist hier zur Abkürzung gesetzt für eine homogene Function k^{ten} Grades der Grössen x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Die gefundenen Flächen bilden, beiläufig bemerkt, bei Deutung der Grössen $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, $\frac{x_3}{x_0}$ als rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten, die Gesammtheit aller algebraischen *Flächen mit drei Symmetrieaxen*; denn wenn eine räumliche Figur drei und nicht mehr Symmetrieaxen hat, so bilden diese immer ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz.

Um nun die Invarianten der Untergruppe von G_{16} zu finden, die zu einem anderen Fundamentaltetraeder gehört, etwa der Gruppe (00), (32), (54), (16), brauchen wir gar keine neue Untersuchung anzustellen; denn jede dieser Gruppen geht aus der Gruppe (1) durch eine bekannte lineare Substitution hervor, z. B. die angeführte Gruppe

(4)

	(00)	(45)	(61)	(23)
$x_0' =$	x_0	x_1	x_2	x_3
$x_1' =$	x_1	x_0	x_3	x_2
$x_2' =$	x_2	x_3	x_0	x_1
$x_3' =$	x_3	x_2	x_1	x_0

durch die involutorische Transformation

$$(5)\quad \begin{aligned} 2x_0' &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1' &= x_0 + x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2' &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_3' &= x_0 - x_1 - x_2 + x_3 . \end{aligned}$$

Führt man vermöge (5) in die Formeln (2) und (3) die neuen Veränderlichen x_i' ein, und lässt man die Accente nachher wieder weg, so entstehen die Ausdrücke

$$(6)\quad \Phi^{\frac{l}{2}} + x_0 x_1 x_2 x_3\, \Phi^{\frac{l}{2}-2},$$

$$(7)\quad a_{11}\, \Phi^{\frac{l}{2}-1} + a_{32}\, \Phi^{\frac{l}{2}-1},$$

worin Φ^k zur Abkürzung geschrieben ist für eine homogene Function k^{ten} Grades der Grössen a_{00}, a_{23}, a_{31}, a_{12} (S. 135).

Die Formen (6) und die drei aus (7) durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehenden Formen stellen alle Invarianten der Gruppe (4) dar, die einem geraden Werthe der Zahl l entsprechen.

Deuten wir die Grössen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ jetzt als Tetraedercoordinaten, bezogen auf ein regelmässiges Tetraeder, dessen Mittelpunkt der Einheitspunkt ist, so haben wir von Neuem die Flächen gerader Ordnung mit drei Symmetrieaxen vor uns. Diese Axen verbinden jetzt die Mitten von je zwei gegenüberliegenden Kanten des Coordinatentetraeders.

Wir haben nun die vier Flächenschaaren (6) und (7) mit den vier Flächenschaaren (2) und (3) zum Durchschnitt zu bringen; oder wir haben alle Ausdrücke von der Form (6), (7) aufzusuchen, die bei den Transformationen der Gruppe (1) bis auf einen Factor ungeändert bleiben, und also Invarianten von G_{16} sind.

Wir betrachten zuerst die Ausdrücke (6), oder, indem wir l auch 2λ ersetzen, Ausdrücke von der Form

$$(8)\quad \Phi^{\lambda}(a_{00}, a_{23}, a_{31}, a_{12}) + x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot \Phi^{\lambda-2}(a_{00}, a_{23}, a_{31}, a_{12})$$

Zunächst sind a_{00}, a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2, $a_{23} a_{31} a_{12}$ und $x_0 x_1 x_2 x_3$ solche Invarianten von G_{16}, die bei allen Transformationen der S. 136 besprochenen Gruppe G_{32}', oder bei den Transformationen (3), § 2 den Factor $+1$ annehmen.

Berücksichtigen wir nun die Identitäten

$$a_{23}\cdot a_{23}a_{31}a_{12} = a_{31}a_{12}\cdot a_{23}^2\,,$$
$$a_{31}a_{12}\cdot a_{23}a_{31}a_{12} = a_{12}\cdot a_{23}^2a_{31}^2\,,$$
$$a_{23}a_{31}a_{12}\cdot a_{23}a_{31}a_{12} = a_{23}^2a_{31}^2a_{12}^2\,,$$

und bezeichnen wir mit Ψ_i ganze Functionen der Grössen a_{00}, a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2, so erkennen wir, dass jedem Ausdruck (8) auf eine und nur eine Weise die Gestalt

$$\begin{aligned}&[\Psi_0+x_0x_1x_2x_3\cdot\Psi_0'+a_{23}a_{31}a_{12}\cdot\Psi_0''+x_0x_1x_2x_3\cdot a_{23}a_{31}a_{12}\Psi_0''']\\+&[a_{23}\cdot\Psi_1+x_0x_1x_2x_3\cdot\Psi_1'+a_{31}a_{12}\cdot\Psi_1''+x_0x_1x_2x_3\cdot a_{31}a_{12}\Psi_1''']\\+&[a_{31}\cdot\Psi_2+x_0x_1x_2x_3\cdot\Psi_2'+a_{12}a_{23}\cdot\Psi_2''+x_0x_1x_2x_3\cdot a_{12}a_{23}\Psi_2''']\\+&[a_{12}\cdot\Psi_3+x_0x_1x_2x_3\cdot\Psi_3'+a_{23}a_{31}\cdot\Psi_3''+x_0x_1x_2x_3\cdot a_{23}a_{31}\Psi_3''']\end{aligned}$$

ertheilt werden kann. Hier ist aber jedes der in Klammer eingeschlossenen Glieder bereits eine Invariante von G_{16}.

In derselben Weise haben wir sodann jeden der drei Ausdrücke von der Form (7) zu behandeln. Es ergibt sich z. B. für den ersten unter ihnen, den wir nunmehr so schreiben:

$$9)\quad a_{11}\cdot\Phi^{\lambda-1}(a_{00},a_{23},a_{31},a_{12})+a_{32}\cdot\Phi^{\lambda-1}(a_{00},a_{23},a_{31},a_{12})$$

die Zerlegung

$$\begin{aligned}&[a_{11}\cdot\Psi_0+a_{32}a_{23}\cdot\Psi_0'+a_{32}a_{31}a_{12}\cdot\Psi_0''+a_{11}a_{23}a_{31}a_{12}\cdot\Psi_0''']\\+&[a_{32}\cdot\Psi_1+a_{11}a_{23}\cdot\Psi_1'+a_{11}a_{31}a_{12}\cdot\Psi_1''+a_{32}a_{23}a_{31}a_{12}\cdot\Psi_1''']\\+&[a_{11}a_{31}\cdot\Psi_2+a_{32}a_{12}\cdot\Psi_2'+a_{11}a_{23}a_{12}\cdot\Psi_2''+a_{32}a_{23}a_{31}\cdot\Psi_2''']\\+&[a_{11}a_{12}\cdot\Psi_3+a_{32}a_{31}\cdot\Psi_3'+a_{11}a_{23}a_{31}\cdot\Psi_3''+a_{32}a_{23}a_{12}\cdot\Psi_3'''].\end{aligned}$$

Der Grad der einzelnen Functionen Ψ_i in Bezug auf deren verschiedene Argumente ist so zu bestimmen, dass der Grad des ganzen Ausdrucks in x gleich 2λ wird.

Hiermit sind wir bereits am Ziele. Wir haben die in jeder einzelnen Invariantenschaar vorhandenen Flächen durch eine kleinste Zahl von linear-unabhängigen Flächen ausgedrückt, und haben zugleich Mittel gefunden, einen beliebigen Ausdruck $F^{2\lambda}(x)$ als Summe von Invarianten darzustellen. Wir legen hier auf diese Reihenentwickelungen kein Gewicht, da wir im nächsten Paragraphen ein ungleich vollkommeneres Verfahren zu ihrer Herstellung kennen lernen werden. Wohl aber mögen wir hervorheben, wie viele linear-unabhängige Flächen in den verschiedenen Schaaren vorhanden sind.

$l = 2\lambda, \quad \lambda$ *gerade.*

Die Schaar (00) *enthält*

$$\frac{1}{12}(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+12)$$

linear-unabhängige Flächen $F^l(x) = 0$, *und jede der fünfzehn Schaaren* (ik)

$$\frac{1}{12}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

unabhängige Flächen.

$l = 2\lambda, \quad \lambda$ *ungerade.*

Jede der sechs Schaaren (i) *enthält*

$$\frac{1}{12}(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+3)$$

und jede der zehn Schaaren (ikl)

$$\frac{1}{12}(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+3)$$

linear-unabhängige Flächen.

Der allgemeine Ausdruck einer Fläche der Schaar (00) z. B. wird

$$(10) \quad \begin{cases} \Phi^{\frac{\lambda}{2}}(a_{00}^2, a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2) + x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-1} \\ + a_{00} a_{23} a_{31} a_{32} \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-2} + x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot a_{00} a_{23} a_{31} a_{12} \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-3}. \end{cases}$$

Hier kann man noch mit Hülfe der Formel

$$(11) \quad \begin{cases} (a_{00}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2 + 32\, x_0 x_1 x_2 x_3)^2 \\ = (a_{00} + a_{23} + a_{31} + a_{12})(a_{00} + a_{23} - a_{31} - a_{12}) \cdot \\ \cdot (a_{00} - a_{23} + a_{31} - a_{12})(a_{00} - a_{23} - a_{31} + a_{12}) \end{cases}$$

das Product $a_{00} a_{23} a_{31} a_{12}$ beseitigen, und so den Ausdruck (10), natürlich unter Verwendung anderer Functionen Φ, auf die Form bringen

$$(12) \quad \begin{cases} \Phi^{\frac{\lambda}{2}}(a_{00}^2, a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2) + x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-1} \\ + (x_0 x_1 x_2 x_3)^2 \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-2} + (x_0 x_1 x_2 x_3)^3 \cdot \Phi^{\frac{\lambda}{2}-3}. \end{cases}$$

Alle Formen der Schaar (00) *lassen sich demnach als ganze rationale Functionen der fünf Formen* a_{00}^2, a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2, $x_0 x_1 x_2 x_3$ *darstellen. Die letzte von diesen ist dabei auf die dritte Potenz zu beschränken, da die vierte Potenz sich mit Hülfe einer leicht aus* (11) *herzuleitenden Identität durch die niederen Potenzen ausdrücken lässt*[1].

Um dieses Ergebniss mit den Resultaten des § 3 auch formal in volle Uebereinstimmung zu bringen, hat man nur noch das Product $16 x_0 x_1 x_2 x_3$ durch einen der Werthe

$$a_{23}^2 - a_{32}^2 = a_{31}^2 - a_{13}^2 = a_{12}^2 - a_{21}^2$$

zu ersetzen.

6.

Invariante Flächen (Fortsetzung).

Stellt man eine Form $F^{2\lambda}(x)$ als Summe von Invarianten dar, so kann der Ausdruck jedes Entwickelungsgliedes mit Hülfe der zwischen den Grössen $a_{\lambda\mu}$ bestehenden Identitäten noch in mannigfacher Weise abgeändert werden. Die hierin liegende Unbestimmtheit haben wir in § 5 dadurch vermieden, dass wir aus jeder Invariantenschaar eine kleinste Zahl von Flächen herausgehoben haben, durch die jede andere nur noch auf eine Weise dargestellt werden kann. Die Auswahl der unabhängigen Flächen selbst ist indessen noch in hohem Grade willkürlich, und das von uns herausgegriffene System hat nichts Ausgezeichnetes gegenüber anderen Systemen von linear-unabhängigen Flächen.

Nunmehr wollen wir auf unsere Aufgabe ein anderes Verfahren anwenden, das tiefer aus dem Wesen der Sache geschöpft ist, und zugleich zu einfacheren und eleganteren Ergeb-

---

1) Die erste Hälfte des Satzes ist (ohne Beweis) gelegentlich bereits von Herrn Maschke angegeben worden (Math. Ann. Bd. 30, S. 503.) Er sagt, die Functionen seiner fünf Formen φ, ψ_2, ψ_3, ψ_4, χ seien bereits sämmtliche Invarianten der Gruppe, meint aber nur die (auf S. 123) besprochenen »absoluten« Invarianten. Dass er dabei nur die Schaar (00) und nicht auch die Schaar (135) = (246) erhält, liegt daran, dass er seiner Untersuchung die auf S. 136 erwähnte Gruppe von 64 Transformationen zu Grunde gelegt hat, statt unserer Gruppe G'_{32}. —

Die grundsätzliche Einführung der Formen $\mathfrak{X}_{ikl}$ (statt der Tetraedercoordinaten) und der Charakteristikenbezeichnung dürfte sich wohl auch in der Theorie der von Herrn Maschke behandelten umfassenderen Gruppe als nützlich erweisen.

nissen führt, als das im vorigen Paragraphen benutzte. Wir wollen nämlich zeigen, dass man eben mit Hülfe jener Relationen eine jede Invariante in eine bestimmte Form setzen kann, aus der alle Mehrdeutigkeit und Willkür verschwunden ist. Der Satz, der dies ermöglicht, kann als eine Eigenschaft der Coefficienten einer orthogonalen Substitution ausgesprochen werden, wie folgt:

Jeder homogenen, nicht identisch verschwindenden ganzen Function $\mathfrak{F}^{\lambda}(a_{ik})$ *der (homogen geschriebenen) Coefficienten* a_{ik} *einer orthogonalen Substitution kann mit Hülfe der zwischen diesen Grössen bestehenden quadratischen Relationen auf eine und nur eine Weise eine solche Gestalt ertheilt werden, dass sie einem gewissen System von partiellen Differentialgleichungen 2. O. genügt.*

Diese Differentialgleichungen gehen aus den genannten Relationen dadurch hervor, dass man jeden Coefficienten a_{ik} *durch das Differentiationssymbol* $\frac{\partial}{\partial a_{ik}}$ *ersetzt*[1]).

Dieser Satz ist eine sehr specielle Folgerung eines allgemeinen Princips der Invariantentheorie, das nicht nur den in § 4 besprochenen Satz CLEBSCH's, sondern auch eine ganze Reihe von den Herren LINDEMANN, FR. MEYER und Anderen aufgestellter Sätze umspannt. Wir übergehen hier den Beweis der Eindeutigkeit der genannten Darstellung, und begnügen uns, zu zeigen, wie eine vorgelegte Function $\mathfrak{F}^{\lambda}(a_{ik})$ in der besprochenen Weise geschrieben werden, oder, wie wir sagen wollen, wie sie in die »*Normalform*« übergeführt werden kann.

Um eine vorgelegte Function $\mathfrak{F}^{\lambda}(a_{ik})$ *auf die Normalform zu bringen, ersetze man zunächst die Grössen* a_{ik} *durch die in* § 2 *mitgetheilten* EULER*'schen Ausdrücke* (S. 135). *Dadurch verwandelt sie sich in eine Function der Veränderlichen* x, *die symbolisch geschrieben werden möge*

---

1) Eine vermöge jener Relationen verschwindende Function der Grössen a_{ik} genügt dagegen *niemals* allen im Texte genannten Differentialgleichungen. Betrachtet man nämlich die Grössen a_{ik} zunächst als ganz unabhängige Veränderliche, so gilt der allgemeinere Satz: Jede Function $\mathfrak{F}^{\lambda}(a_{ik})$ kann auf eine und nur eine Weise in zwei Summanden zerlegt werden, von denen der erste die im Text genannten Differentialgleichungen befriedigt, während der zweite verschwindet, wenn man die Grössen a_{ik} durch die Coefficienten einer beliebigen orthogonalen Substitution ersetzt. — Vgl. die demnächst in den Math. Annalen erscheinende Abhandlung des Verfassers »Ueber Systeme von Kegelschnitten.«

(1) $F^{2\lambda}(x) = (\alpha x)^{2\lambda} = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^{2\lambda}$.

Nunmehr bilde man zehn Ausdrücke ω_{ik}, die aus den Coefficienten a_{ik} dadurch hergeleitet werden, dass man überall α_i an Stelle von x_i schreibt.

Ersetzt man sodann in

(2) $$\{\omega_{00} a_{00} + \cdots + \omega_{33} a_{33}\}^{\lambda}$$

die Producte $2\lambda^{\text{ten}}$ Grades der Symbole α durch ihre aus (1) zu entnehmenden Werthe, so wird dieser Ausdruck $= 2^{2\lambda} \cdot \mathfrak{F}^{\lambda}(a_{ik})$. Er hat die Normalform, d. h. er genügt identisch den genannten Differentialgleichungen.

Bei dem einfachen Beweise und in unseren ferneren Betrachtungen bedienen wir uns statt der Bezeichnung durch das Symbol $a_{\lambda\mu}$ der in § 2 eingeführten Bezeichnung der Fundamentalflächen durch drei Indices, und dem entsprechend wollen wir auch für $\omega_{\lambda\mu}$ ein anderes Zeichen $2\mathfrak{A}_{ikl}$ einführen.

Dann wird, wie die Ausrechnung zeigt,

(3) $$\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\} = \Sigma\, \mathfrak{A}_{ikl}\mathfrak{X}_{ikl} = (\alpha x)^2, \quad \text{folglich}$$

(4) $$\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^{\lambda} = (\alpha x)^{2\lambda} = F^{2\lambda}(x) = \mathfrak{F}^{\lambda}(a_{\lambda\mu}).$$

Es genügt aber $\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^{\lambda}$ den besprochenen Differentialgleichungen, da zwischen den Symbolen $\omega_{\lambda\mu}$ oder $2\mathfrak{A}_{ikl}$ nach ihrer Definition dieselben quadratischen Relationen bestehen, wie zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Wir sind hiernach im Stande, die Gleichung einer beliebigen Fläche $2\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung durch drei Fundamentalflächen $\mathfrak{X}_{ikl}$ so auszudrücken, dass sie sogleich in der Normalform erscheint; und dasselbe gilt von der Gleichung einer Fläche $2\lambda^{\text{ter}}$ Classe, wobei natürlich an Stelle der Grössen $a_{\lambda\mu}$ oder $2\mathfrak{X}_{ikl}$ die Grössen $\mathfrak{a}_{\lambda\mu}$ oder $2\mathfrak{U}_{ikl}$ auftreten. (§ 2, S. 135.) Für die Rechnung mit diesen Ausdrücken ist wichtig der folgende Satz, der als ein sogenanntes Apolaritätstheorem aus der Geometrie eines Raumes von neun Dimensionen aufgefasst werden kann:

Ist $\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^{\lambda} = \{\Sigma\mathfrak{A}_{ikl}\mathfrak{X}_{ikl}\}^{\lambda}$ die Normalform einer Fläche $2\lambda^{ter}$ Ordnung $F = (\alpha x)^{2\lambda}$, und ebenso $\{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^{\lambda} = \{\Sigma\mathfrak{U}_{ikl}\mathfrak{Q}_{ikl}\}^{\lambda}$ die Normalform einer Fläche $2\lambda^{\text{ter}}$ Classe $\Phi = (u\pi)^{2\lambda}$, so hat die bilineare Invariante

$$[F, \Phi] = (\alpha\pi)^{2\lambda}$$

ausgedrückt in den Symbolen dieser Normalformen den Werth

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\}^{\lambda} = \{\Sigma\mathfrak{A}_{ikl}\mathfrak{Q}_{ikl}\}^{\lambda} = [\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^{\lambda}, \{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^{\lambda}].$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Formel.

Hiermit haben wir nun die Grundlage für eine einfache Darstellung der Reihenentwickelung einer beliebigen Form $F^{2\lambda}(x)$ oder $\Phi^{2\lambda}(u)$ nach Invarianten der Gruppe G_{16}. Es gilt nämlich, als genaues Analogon eines in § 4 (S. 146) aufgestellten Satzes, das folgende Theorem:

Ist eine Function der Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ oder $2\mathfrak{X}_{ikl}$ einer orthogonalen Substitution in die Normalform $\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^\lambda$ gesetzt, und wird sie sodann dadurch in Invarianten der Gruppe G_{16} zerlegt, dass man alle die Producte der Grössen $\mathfrak{X}_{ikl}$ zusammenfasst, die die nämliche Charakteristik haben, so hat jedes der sechzehn Entwickelungsglieder von selbst schon die Normalform.

Der Beweis ist der auf S. 146 durchgeführten Betrachtung so ähnlich, dass wir ihn hier wohl übergehen können. Bei Flächen 4. O. $F^4(x) = \{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^2 = 0$ z. B. hat man nach diesem Satze die Reihenentwickelung

$$(5)\quad \begin{aligned} \{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^4 = [\Sigma\mathfrak{A}^2_{ikl}\mathfrak{X}^2_{ikl}] + 2\,[\mathfrak{A}_{134}\mathfrak{A}_{156}\cdot\mathfrak{X}_{134}\mathfrak{X}_{156} + \\ + \mathfrak{A}_{135}\mathfrak{A}_{164}\cdot\mathfrak{X}_{135}\mathfrak{X}_{164} + \mathfrak{A}_{136}\mathfrak{A}_{145}\cdot\mathfrak{X}_{136}\mathfrak{X}_{145}] + \cdots\cdot \end{aligned}$$

Der erste Klammerausdruck, aus zehn Gliedern bestehend, ist eine Invariante von der Charakteristik (00), der zweite eine Invariante von der Charakteristik (12), u. s. w. Jedes Glied genügt, für sich allein genommen, den besprochenen Differentialgleichungen. — Ein weniger durchsichtiges Bildungsgesetz haben die in die Normalform gesetzten unsymbolischen Ausdrücke. So leitet man z. B. aus (5) die folgende Darstellung aller invarianten, zur Charakteristik (00) gehörigen Flächen 4. O. her:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\,a^2_{00}+(\varrho_0+\varrho_1-\varrho_2-\varrho_3)\,a^2_{11} \\ &+(\varrho_0-\varrho_1+\varrho_2-\varrho_3)\,a^2_{22}+(\varrho_0-\varrho_1-\varrho_2+\varrho_3)\,a^2_{33} \\ &+2(\varrho_1+\varrho_4)\,a^2_{23}+2(\varrho_2+\varrho_4)\,a^2_{31}+2(\varrho_3+\varrho_4)\,a^2_{12} \\ &+2(\varrho_1-\varrho_4)\,a^2_{32}+2(\varrho_2-\varrho_4)\,a^2_{13}+2(\varrho_3-\varrho_4)\,a^2_{21}\,. \end{aligned}\right.$$

$$\varrho_0:\varrho_1:\varrho_2:\varrho_3:\varrho_4$$

sind hier beliebige Verhältnissgrössen.

Um noch eine *Anwendung* der mitgetheilten Betrachtung zu geben, wollen wir die Gleichung der KUMMER'schen Fläche, die als Singularitätenfläche zu einem invarianten quadratischen Complex [mit der Charakteristik (00)] gehört, auf ihre Normalform

bringen. Die fragliche Gleichung ist in einer für unseren Zweck brauchbaren Gestalt von Herrn Rohn angegeben worden (vgl. Reichardt, Acta Leop. 1887, S. 395, wo ein Zahlencoefficient verbessert ist). Führt man nun die (S. 153, 154) angezeigte Rechnung aus, so kommt man zu folgendem Ergebniss:

Die Gleichung der Singularitätenfläche des Complexes

$$c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2 + c_3 X_3^2 + c_4 X_4^2 + c_5 X_5^2 + c_6 X_6^2 = 0 \tag{7}$$

lautet in der Normalform

$$\sum [\Omega_{ikl} + 2 c_i c_k c_l + 2 c_{i'} c_{k'} c_{l'}]\, \mathfrak{X}_{ikl}^2 = 0\,. \tag{8}$$

Hier sind die Indices i', k', l' die drei Indices, die i, k, l zur Gesammtheit der Indices 1 ... 6 ergänzen, und Ω_{ikl} ist die Summe der zwanzig Producte $c_\varrho c_\sigma c_\tau$, in die jedes einzelne Glied mit dem positiven oder negativen Vorzeichen einzutragen ist, je nachdem die Charakteristikensumme

$$(135) + (ikl) + (\varrho\sigma\tau)$$

zu einer Fundamentalfläche oder zu einem Fundamentalcomplex gehört (gerade oder ungerade ist).

Der Ausdruck Ω_{135}, der der Fläche ohne reelle Punkte (135) = (246) zugeordnet ist, besteht demnach aus lauter positiven Gliedern, während die anderen Ausdrücke Ω_{ikl} zweimal sechs positive und zweimal vier negative Glieder enthalten.

Die gefundene Gleichungsform der Kummer'schen Fläche setzt sich zwar aus einer ziemlich grossen Zahl von Summanden zusammen, hat aber dafür ein ganz einfaches Bildungsgesetz. Sie enthält keine Beziehung mehr zu einem bestimmten Tetraeder, das man immer noch auf mehrere Arten würde auswählen können; die Fläche ist nur auf das mit ihr invariant verknüpfte natürliche Coordinatensystem bezogen, das von den zehn Fundamentalflächen gebildet wird. Diese selbst sind völlig bestimmt, ihre Gleichungen aber allerdings nur bis auf numerische Factoren, in deren Auswahl man, auch bei Beschränkung auf die einfachsten Annahmen, immer noch einen gewissen Spielraum hat. Da wir über diese Factoren in § 2 in bestimmter Weise verfügt haben, so ist es nicht zu verwundern, dass in der Formel (8) eine Fläche, die Fläche (135) = (246) ausgezeichnet ist, insofern sie die Vorzeichen der einzelnen Glieder beeinflusst. Abgesehen von dieser einen überhaupt nicht zu vermeidenden

Unregelmässigkeit sind alle Fundamentalflächen in völlig symmetrischer Weise benutzt. (Vgl. § 2, S. 137.)

Der Ausdruck (8) genügt, als Function der Grössen c_i betrachtet, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} - \frac{\partial f}{\partial c_2} + \frac{\partial f}{\partial c_3} - \frac{\partial f}{\partial c_4} + \frac{\partial f}{\partial c_5} - \frac{\partial f}{\partial c_6} = 0\,,$$

ändert sich also nicht, wenn man $c_1 \ldots c_6$ durch $c_1 + \lambda$, $c_2 - \lambda$, $c_3 + \lambda$, $c_4 - \lambda$, $c_5 + \lambda$, $c_6 - \lambda$ ersetzt.

Da nun je zwei einander ergänzende Producte $c_\varrho c_\sigma c_\tau$ und $c_{\varrho'} c_{\sigma'} c_{\tau'}$ mit demselben Vorzeichen gepaart auftreten, so folgt, dass sich die linke Seite von (8) nur um einen von den Veränderlichen $\mathfrak{X}_{ikl}$ freien Factor ändert, wenn man die Parameter $c_1 \ldots c_6$ durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Beide Bemerkungen ergeben verbunden den von Herrn F. Klein aufgefundenen Satz, wonach alle Complexe der sogenannten confocalen Schaar

$$\frac{X_1^2}{c_1+\lambda} + \frac{X_2^2}{c_2-\lambda} + \frac{X_3^2}{c_3+\lambda} + \frac{X_4^2}{c_4-\lambda} + \frac{X_5^2}{c_5+\lambda} + \frac{X_6^2}{c_6-\lambda} = 0$$

die gleiche Singularitätenfläche haben.

7.

Invarianten der Untergruppen von G_{16}.

Durch unsere Untersuchung haben wir, ohne gerade darauf ausgegangen zu sein, noch eine weitergehende Aufgabe gelöst, nämlich die, alle Formen zu finden, die bei den Transformationen von G_{16} mehr als einen und weniger als sechzehn wesentlich verschiedene Werthe annehmen; mit anderen Worten, wir sind in den Stand gesetzt, die Invarianten der Untergruppen von G_{16} zu finden.

Denken wir uns zunächst etwa eine Form F mit den Ordnungszahlen $[l, m, n]$, unter der Annahme, dass $l+n$ gerade ist, nach Invarianten entwickelt, so wird die Verschiedenheit der aus F durch die Transformationen von G_{16} hergeleiteten Formen nur daher rühren können, dass die einzelnen Entwickelungsglieder bei einer oder einigen Transformationen von G_{16} nicht alle denselben Factor erhalten. Unsere Charakteristikenbezeichnung setzt uns aber in den Stand, alle Invariantenschaaren

von vorn herein zu übersehen, die bei einer gegebenen Transformation (ik) den gleichen Factor annehmen. Eine Summe von Formen dieser Schaaren ist eine Invariante der aus den zwei Transformationen (00), (ik) bestehenden Untergruppe von G_{16}; und es ist klar, wie man, für den Fall eines geraden Werthes von $l+n$, die Invarianten aller Untergruppen von G_{16} dadurch bestimmen kann, dass man mehrere der so gefundenen Formenschaaren zum Durchschnitt bringt.

Die Gruppe G_{16} enthält überhaupt nur wenige Untergruppen: Fünfzehn Gruppen gebildet von zwei Transformationen, fünfzehn den Fundamentaltetraedern entsprechende Gruppen von vier Transformationen, zweimal zehn weitere Gruppen vom Grade vier, die den Erzeugenden-Schaaren der Fundamentalflächen entsprechen, endlich fünfzehn Gruppen vom Grade acht.

Wir stellen, die umgekehrte Reihenfolge innehaltend, die Invarianten aller dieser Gruppen in je einem typischen Beispiel auf, indem wir die einzelnen Invarianten-Schaaren von G_{16} durch ihre Charakteristiken bezeichnen, und durch deren Einschliessung in Klammern andeuten, wie die Invarianten der Untergruppen aus ihnen abzuleiten sind. Jede der aufgezählten symbolischen Summen kann als ein kurzer Ausdruck für die Reihenentwickelung einer Grundform F angesehen werden, die nach Invarianten der gerade besprochenen Untergruppe von G_{16} fortschreitet. Die Anzahl der Glieder ist immer gleich dem Grade der Gruppe.

I.

(00), (12), (34), (35), (36), (45), (46), (56)

$$(l+2m+n\equiv 0 \text{ mod. } 4)$$

$$[(00)+(12)]$$

$$+[(13)+(23)]+[(14)+(24)]+[(15)+(25)]+[(16)+(26)]$$

$$+[(34)+(56)]+[(35)+(46)]+[(36)+(45)]$$

$$(l+2m+n\equiv 2 \text{ mod. } 4)$$

$$[(1)+(2)]$$

$$+[(3)+(123)]+[(4)+(124)]+[(5)+(125)]+[(6)+(126)]$$

$$+[(134)+(234)]+[(135)+(235)]+[(136)+(236)] .$$

II.

(00), (35), (51), (13)

$(l + 2m + n \equiv 0 \text{ mod. } 4)$

[(00) + (24) + (46) + (62)]
+ [(35) + (12) + (14) + (16)]
+ [(51) + (32) + (34) + (36)]
+ [(13) + (52) + (54) + (56)]

$(l + 2m + n \equiv 2 \text{ mod. } 4)$

[(2) + (4) + (6) + (246)]
+ [(1) + (146) + (162) + (124)]
+ [(3) + (346) + (362) + (324)]
+ [(5) + (546) + (562) + (524)]

III.

(00), (12), (34), (56)

$(l + 2m + n \equiv 0 \text{ mod. } 4)$

[(00) + (12) + (34) + (56)]
+ [(35) + (36) + (45) + (46)]
+ [(51) + (52) + (61) + (62)]
+ [(13) + (14) + (23) + (24)]

$(l + 2m + n \equiv 2 \text{ mod. } 4)$

[(135) + (136) + (145) + (146)]
+ [(1) + (2) + (134) + (156)]
+ [(3) + (4) + (356) + (312)]
+ [(5) + (6) + (512) + (534)]

IV.

(00), (12)

$(l + 2m + n \equiv 0 \text{ mod. } 4)$

[(00) + (12) + (34) + (35) + (36) + (45) + (46) + (56)]
+ [(13) + (14) + (15) + (16) + (23) + (24) + (25) + (26)]

$(l + 2m + n \equiv 2 \text{ mod. } 4)$

[(1) + (2) + (134) + (135) + (136) + (145) + (146) + (156)]
+ [(3) + (4) + (5) + (6) + (123) + (124) + (125) + (126)].

Hiernach sind noch übrig die Invarianten, die einem ungeraden Werthe von $l+n$ entsprechen. Solche gibt es aber in den Fällen I und II überhaupt nicht (vgl. § 3, S. 138). In den Fällen III und IV sind sie vorhanden. Den Fall III haben wir, allerdings unter der besonderen Annahme $m=n=0$, bereits in § 5 behandelt; die dort festgehaltene Beschränkung kann aber leicht aufgehoben werden. Der Fall IV endlich bietet gegenüber den allgemeinen Betrachtungen des § 1 überhaupt kein besonderes Interesse dar. —

Wir haben in der durchgeführten Untersuchung zur Unterscheidung der einzelnen Invariantenschaaren zwei verschiedene Charakteristikenbezeichnungen verwendet, je nachdem die Zahl $l+2m+n \equiv 2$ oder $\equiv 0$ mod. 4 war. Man kann indessen noch andere Standpunkte einnehmen, von denen aus sich eine *gleichförmige* Charakteristikenbezeichnung für beide Fälle darbietet.

Man wird nämlich durch verschiedene geometrische Betrachtungen dahin geführt, als einfachstes Raumelement unter Umständen nicht den Punkt oder die Ebene, sondern ein *Paar* solcher Gebilde anzusehen, die sich in der dualistischen Transformation eines Polarsystems oder eines Nullsystems entsprechen. Dann wird die dualistische Transformation des Polarsystems oder des Nullsystems selbst als nicht wesentlich verschieden von der identischen Transformation betrachtet, und es kommt daher der Unterschied zwischen collinearen und dualistischen Transformationen und Figuren überhaupt ganz in Wegfall: Object der Formentheorie sind nur noch Formen mit *zwei* Arten von Veränderlichen, deren eine der Figur eines Punktes und seiner Polarebene (Nullebene) entspricht, während die andere zwei in dem Polarsystem (Nullsystem) einander zugeordnete Gerade bedeutet.

Wenden wir dies an auf die Theorie der Gruppe G_{16}, so können wir zunächst die dualistische Transformation einer der zehn Fundamentalflächen, etwa der Fläche (135) = (246) der identischen Transformation zuordnen; mit anderen Worten: wir können die bisher mit u_i und x_i bezeichneten Grössen identificiren. Wir haben dann alle unsere Charakteristiken nur noch nach dem Modul (135) = (246) zu nehmen, und erhalten so für die 10 Fundamentalflächen und die 6 Fundamentalcomplexe eine neue Bezeichnung:

	a_{00} : (00)	
a_{11} : (12)	a_{12} : (32)	a_{13} : (52)
a_{21} : (14)	a_{22} : (34)	a_{23} : (54)
a_{31} : (16)	a_{32} : (36)	a_{33} : (56)
X_1 : (35)	X_3 : (51)	X_5 : (13)
X_2 : (46)	X_4 : (62)	X_6 : (24)

Diese Charakteristikenbezeichung ist, wenn man von den Realitätsverhältnissen absieht, eine von zehn gleichberechtigten Arten der Bezeichnung [1]).

Zweitens können wir etwa die dualistische Transformation (1) der identischen Transformation zuordnen, indem wir die Grössen u_0, u_1, u_2, u_3 identificiren mit x_1, $-x_0$, x_3, $-x_2$.

So entsteht eine von sechs gleichberechtigten Charakteristikenbezeichnungen durch zwei Indices, bei der der Complex $X_1 = 0$ die Charakteristik (00), jeder andere Complex $X_j = 0$ die Charakteristik $(1j)$ und die Fläche $\mathfrak{X}_{1k\lambda} = 0$ die Charakteristik $(k\lambda)$ erhält.

Nimmt man eine dieser neuen Charakteristikenbezeichnungen an, so vereinfachen sich die auf S. 158 und S. 159 entworfenen Tafeln I, II, III, IV, indem nun die Unterscheidung der beiden Fälle $l + 2m + n \equiv 0,2$ mod. 4 überflüssig wird.

In ähnlicher Weise, wie es hier bei der Gruppe G_{16} geschehen ist, kann man überhaupt aus den Invarianten einer Gruppe die zu denselben Ordnungszahlen gehörigen Invarianten ihrer Untergruppen herleiten, wenn eine dem Satz IV, § 1 entsprechende Reihenentwickelung vorhanden ist, in der das letzte (dort mit F_0 bezeichnete) Glied fehlt.

Für alle Gruppen aber, auf die der Satz IV überhaupt anwendbar ist — vielleicht also für alle endlichen Gruppen von getrennten linearen Transformationen — ergibt sich eine Einschränkung der Hauptaufgaben der Formentheorie. Man braucht, wenn es sich um eine solche Gruppe handelt, nicht bei der Reduction beliebiger Grundformen auf Normalformen stehen zu bleiben, sondern es genügt, Invarianten der Gruppe zu betrachten und ausserdem solche Normalformen, die zu allen Invarianten mit den dualistisch entsprechenden Ordnungszahlen conjugirt sind.

Marburg, den 2. April 1892.

1) Vgl. STAUDE, Math. Ann. Bd. 24, S. 300.

G. Scheffers, *Verzerrung bei perspectiver Abbildung ebener Figuren*. Vorgelegt v. d. w. Mitgliede A. MAYER. Mit 5 Figuren.

Die Untersuchung der Verzerrungen perspectiver Zeichnungen bietet im einfachsten Fall der Abbildung *ebener* Gebilde mancherlei Anregendes. Zweck dieser Zeilen ist, auf rein synthetischem Wege einige hierauf bezügliche Sätze zu entwickeln.

Zunächst seien einige Bezeichnungen als feststehend eingeführt: Das Projectionscentrum heisse O, die Bildtafel **T**, die abzubildende Ebene **E**, ihre Spurlinie s und ihre Fluchtlinie f. Den Hauptpunkt, d. h. den Fusspunkt des Lotes von O auf **T**, bezeichne ich mit H, die Distanz OH mit d und die Projection eines beliebigen Punktes P der Ebene **E** auf die Tafel **T** mit P'. Die vorkommenden Strecken sollen immer absolut, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen angenommen werden.

Sind nun die Ebenen **T** und **E** durch das Centrum O perspectiv auf einander bezogen, so wird diese Beziehung bekanntlich nicht gestört, wenn die Ebene **E** um die Spurlinie s und gleichzeitig das Centrum O — und zwar um denselben Winkel nach derselben Richtung hin — um die Fluchtlinie f gedreht wird. Insbesondere kann man diese räumlich vermittelte Zuordnung durch eine ebene ersetzen, wenn man die Ebene **E** durch Drehung um s gänzlich in die Tafel **T** hineinklappt, wobei O gleichzeitig in einen Punkt O_1 der Tafel übergeht. Man construirt O_1 sehr einfach (siehe Fig. 1): Er liegt zunächst auf dem Lote von H auf f, das f in Q treffe. Durch H wird die Parallele zu f gezogen, auf ihr von H aus die Distanz d abgetragen, etwa bis $\overline{O}$, und darauf um Q der Kreis mit dem

Radius $Q\bar{O}$ geschlagen. Er schneidet HQ in dem gewünschten Punkte O_1. Es giebt noch einen zweiten Schnittpunkt O_2, der

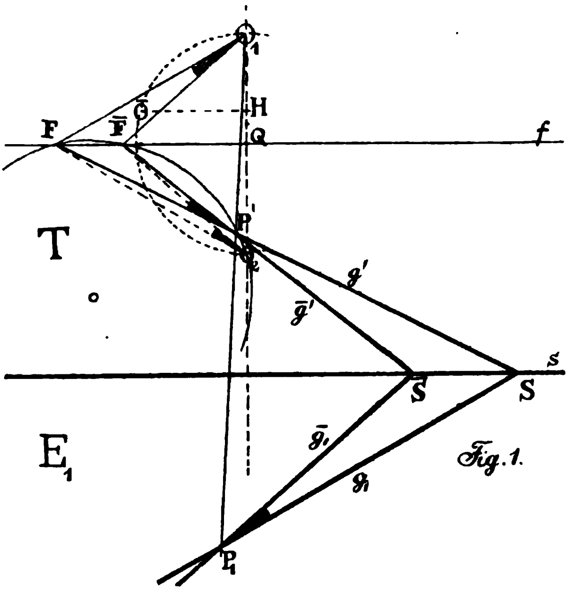


Fig. 1.

der Umklappung der Ebene **E** in die Tafel in entgegengesetztem Sinne zugehört.

Durch die Umklappung geht ein Punkt P von **E** in einen Punkt P_1 über, der in **T** liegt. Die zugehörige Projection P' findet man dadurch, dass man irgend eine Gerade g_1 durch P_1 zieht, die s in ihrem Spurpunkte S trifft, zu ihr die Parallele durch O_1 legt, die f in ihrem Fluchtpunkte F trifft, und endlich SF mit dem Projectionsstrahl $O_1 P_1$ in P' zum Schnitt bringt.

Wir werden künftig zum Theil in der umgeklappten Ebene **E**, die wir jetzt $\mathbf{E}_1$ nennen, und die mit **T** zusammenfällt, anstatt in der ursprünglichen Ebene **E** operiren. Dabei bezeichnen wir in $\mathbf{E}_1$ gelegene (also umgeklappte) Gebilde durch angehängten Index 1.

Zwei Geraden g_1 und $\bar{g}_1$ von $\mathbf{E}_1$ bilden einen Winkel, der gleich dem Winkel $FO\bar{F}$ ist, den ihre Fluchtpunkte F und $\bar{F}$ in O_1 bestimmen, denn es ist $O_1F \parallel g_1$, $O_1\bar{F} \parallel \bar{g}_1$.

Schneiden sich die Geraden in P_1, und ist P' die Projection von P_1, so bildet sich dieser Winkel ab als Winkel $FP'\overline{F}$. Er ist dem Originalwinkel daher nur in zwei Fällen gleich: Liegen P' und O_1 auf derselben Seite von f, so muss $P'O_1F\overline{F}$ ein Kreisviereck sein, liegen P' und O_1 auf verschiedenen Seiten von f, so muss — da O_2 Spiegelpunkt von O_1 hinsichtlich f ist — das Viereck $P'O_2F\overline{F}$ ein Kreisviereck sein. Es muss also jedesmal P' auf dem Kreise liegen, der durch die beiden Fluchtpunkte F und $\overline{F}$ sowie durch denjenigen Punkt O_1 bez. O_2 geht, der auf derselben Seite von f liegt wie P'.

Lassen wir P' diesen Kreis durchlaufen, so ist der Winkel $FP'\overline{F}$ stets dem Originalwinkel gleich. Dabei wird in Wirklichkeit die Gerade g_1 wie die Gerade $\overline{g}_1$ parallel verschoben, da ihre Fluchtpunkte F und $\overline{F}$ fest angenommen werden. Also:

Wird in der Ebene **E** *ein Winkel beständig parallel mit sich und zwar derart bewegt, dass sein perspectives Bild ihm immer gleich an Grösse ist, so beschreibt die Projection seines Scheitels einen Kreis.*

Da nun die Beziehung zwischen den beiden Ebenen **E** und **T** eine durchaus gegenseitige ist, so folgt, dass die Bahn des Scheitels auch in der Ebene **E** ein Kreis ist. *Dieser Kreis projicirt sich demnach wieder zum Kreis.* Wir haben eben den bekannten Fall des *Wechselschnittes* vor uns.

Ferner folgt: In jedem Punkte der Ebene giebt es unendlich viele Winkel, die sich in wahrer Grösse projiciren, insbesondere stets einen und im Allgemeinen nur einen rechten Winkel, dessen Projection wieder ein Rechter ist. Zwei Punkte der Ebene haben jedoch die Eigenschaft, dass *jeder* Winkel, dessen Scheitel in einem der Punkte liegt, im Bilde die wahre Grösse behält. Es sind dies die Punkte U_1 und U_2 von **E**, die sich in die Punkte O_1 und O_2 abbilden. Es sind also die Schnittpunkte der Ebene **E** mit den beiden vom Centrum O ausgehenden Strahlen, die mit **E** und **T** gleiche Winkel bilden, d. h. die auf den Halbirungsebenen der von **E** und **T** gebildeten Raumwinkel senkrecht stehen.

Wir gehen nun zu *unendlich kleinen* Winkeln über: Rücken die Geraden g_1 und $\overline{g}_1$ einander sehr nahe, so gilt dasselbe von ihren Fluchtpunkten F und $\overline{F}$. Der sehr kleine von g_1 und $\overline{g}_1$ ge-

bildete Winkel bleibt im Bilde ungeändert, wenn P' mit dem auf derselben Seite von f wie P' liegendem Punkte O_1 bez. O_2 — sagen wir mit O_2 — auf einem Kreise durch F und $\bar{F}$ gelegen ist. Wird der Winkel infinitesimal, so *berührt* der Kreis die Fluchtlinie f in F.

Suchen wir also in einem Punkte P' die Richtung $P'F$ der Schenkel eines infinitesimalen Winkels mit dem Scheitel P', der seinem Originale gleich sein soll, so müssen wir F bestimmen als Berührpunkt eines der Kreise durch P' und O_2 mit f. Es giebt im Allgemeinen zwei solche Berührpunkte.

Es giebt daher in jedem Punkte P der Ebene **E** zwei Richtungen derart, dass ein Winkel, der P zum Scheitel hat, und dessen beide Schenkel einer dieser Richtungen infinitesimal benachbart sind, im Bilde seine wahre Grösse behält (natürlich bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung). Jedem Punkte P der Ebene **E** sind hierdurch zwei »*Richtungen ohne Winkelverzerrung*« zugeordnet. Geht man beständig einer derselben nach, so beschreibt man eine Curve. Diese Curve hat dann die Eigenschaft, dass ihr Contingenzwinkel überall in wahrer Grösse abgebildet wird, dass also zwei beliebige Tangenten der Curve im Bilde denselben Winkel einschliessen wie im Original.

Die Art dieser Curven ist leicht zu erkennen:

Es mögen nämlich (in Fig. 2) P' und $\bar{P}'$ im Bilde **T** benachbarte Punkte der Curve sein, sodass die Tangente $P'F$ von P' durch $\bar{P}'$ geht. Die Tangente in $\bar{P}'$ habe den Fluchtpunkt $\bar{F}$. Alsdann liegen, wie wir wissen, F, $\bar{F}$, $\bar{P}'$ und O_2 auf einem Kreise, da $\sphericalangle F\bar{P}'\bar{F}$ seinem Originale gleich sein soll. Mithin ist

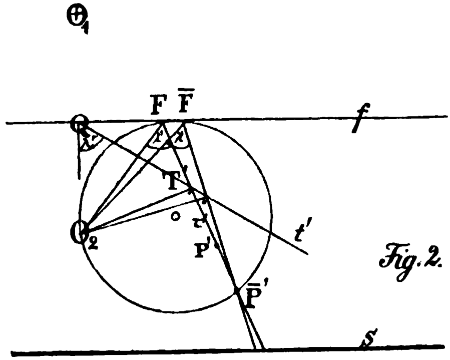


Fig. 2.

auch $\sphericalangle O_2FP' = \sphericalangle O_2\bar{F}\bar{P}'$. Die Curventangente $P'F$ bildet somit beständig denselben Winkel mit der Geraden von O_2 nach

ihrem Fluchtpunkt F. Daher wird die abgebildete Curve eingehüllt durch den freien Schenkel eines starren Winkels λ', dessen Scheitel f durchläuft, während sein anderer Schenkel beständig durch O_2 geht. Legt man insbesondere λ' in Q an O_2Q an, so ergiebt sich eine Tangente t', die besondere Bedeutung hat. Schneidet sie nämlich eine beliebige Tangente τ', die f in F treffe, in T', so ist $\sphericalangle O_2FT' = \lambda' = \sphericalangle O_2QT'$, d. h. O_2, Q, F, T' liegen auf einem Kreis. Da aber $\sphericalangle O_2QF = 1R$ ist, so gilt dasselbe von $\sphericalangle O_2T'F$. Mit anderen Worten:

Die gesuchte Curve wird eingehüllt vom freien Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel sich auf einer beliebigen Geraden t' durch Q hinbewegt, während sein anderer Schenkel beständig durch O_2 geht. Eine solche Curve ist aber bekanntlich eine *Parabel* mit der Scheiteltangente t' und dem Brennpunkt O_2.

Nun wissen wir, dass durch jeden Punkt P' zwei solche Curven gehen. In der That giebt es stets zwei Parabeln durch P', die O_2 zum Brennpunkt haben und deren Scheiteltangenten durch Q gehen. Liegt P' auf der andern Seite von f, so tritt O_1 an die Stelle von O_2.

Also haben wir erkannt:

Es giebt in der Ebene **E** *eine Schaar von Curven, deren Con-*

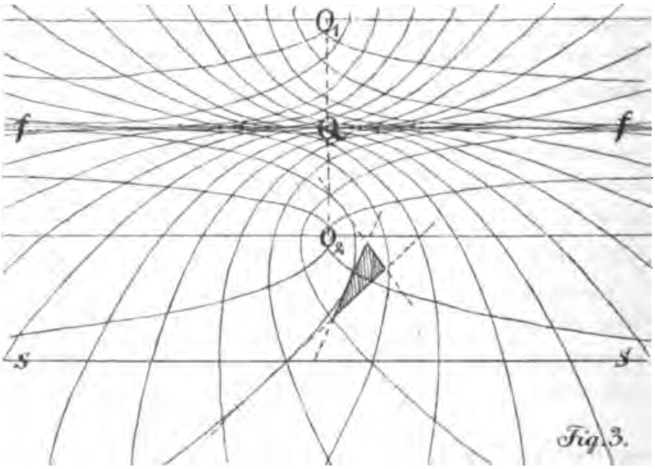


Fig. 3.

tingenzwinkel im Bilde **T** *die Originalgrösse haben. Die Gesammtheit dieser Curven bildet sich ab als die Schaar aller Parabeln,*

die O_1 oder O_2 zum Brennpunkt haben und deren Scheiteltangenten durch Q gehen. Durch jeden Punkt gehen zwei reelle Parabeln der Schaar. (Siehe Fig. 3.)

Da die Beziehung zwischen den Ebenen E und T wechselseitig ist, so folgt auch sofort:

Diese Curven sind auch im Originale Parabeln. Sie haben in der Ebene E *zu Brennpunkten einen der beiden früher erwähnten Punkte U_1 und U_2, in denen* E *von OO_1 und OO_2 getroffen wird, und zu Scheiteltangenten die Geraden durch den Mittelpunkt von U_1U_2.*

Sind g' und $\bar{g}'$ zwei Geraden in T, die denselben Winkel bilden wie die Geraden g und $\bar{g}$ der Ebene E, deren Projectionen sie sind, so muss — wie bemerkt — ihr Schnittpunkt P' mit ihren Fluchtpunkten F und $\bar{F}$ auf einem Kreise durch O_1 bez. O_2 — sagen wir durch O_2 — liegen. Daraus folgt, dass die Fusspunkte T' und $\bar{T}'$ der Lote von O_2 auf g' und $\bar{g}'$ auf einer Geraden durch Q liegen. Denn es liegen O_2, T', F, Q ebenso wie O_2, $\bar{T}'$, $\bar{F}$, Q je auf einem Kreise. Also ist

$$\sphericalangle O_2QT' = \sphericalangle O_2FT' ,$$

$$\sphericalangle O_2Q\bar{T}' = \sphericalangle O_2\bar{F}\bar{T}' ,$$

während die rechtsstehenden Winkel gleich sind als Periperiewinkel über O_2P' im Kreise durch O_2, P', F, $\bar{F}$. Die Punkte Q, T' und $\bar{T}'$ liegen also wirklich auf einer Geraden, und es sind g' und $\bar{g}'$ Tangenten einer der oben besprochenen Parabeln. Somit folgt:

Bilden zwei Geraden im Bilde denselben Winkel wie im Original, so müssen sie beide Tangenten einer der besprochenen Parabeln und zwar ein und derselben Parabel sein.

Die Aufgabe:

In der Perspective ein Dreieck zu zeichnen, das seinem Original ähnlich ist,

ist hiermit sofort gelöst (siehe Fig. 3): Jedes Tangentendreieck einer der besprochenen Parabeln ist ein solches, und ausser ihnen giebt es keine. Aus einem bekannten Parabelsatze folgt also:

Ein Dreieck hat im Bilde dann und nur dann seine wahre Gestalt, wenn der ihm umschriebene Kreis durch O_1 oder O_2 geht

und die Fusspunkte der Lote von O_1 bez. O_2 auf seine Seiten auf einer Geraden durch Q liegen.

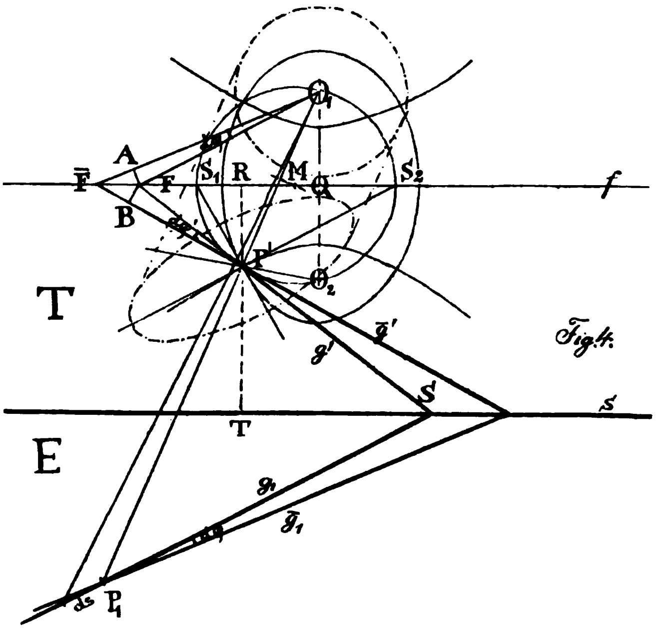
Die Winkel eines Polygons in der Ebene **E** werden nur dann nicht verzerrt, wenn seine Seiten sämmtlich Tangenten *einer* der Parabeln sind. Da alsdann seine Diagonalen sicher nicht Tangenten derselben Parabel sein können, so schliessen wir:

Fin Polygon mit mehr als drei Seiten kann niemals mit sich selbst ähnlich abgebildet werden.

Es giebt also auch keine Curve, die ihrem Bilde überall in entsprechenden Punkten ähnlich wäre.

Bekanntlich lässt sich ein Kreis wieder als Kreis abbilden, dabei sind jedoch entsprechende Stücke einander nicht ähnlich, wohl aber die Kreise im Ganzen genommen.

Suchen wir jetzt die *Curven, längs deren die Contingenzwinkel die grösste Verzerrung erfahren.*



Es sei (in Fig. 4) P' irgend ein abgebildeter Punkt; durch ihn seien zwei infinitesimal benachbarte Geraden g' und $\overline{g}'$ mit

den Fluchtpunkten F und $\overline{F}$ gezogen. In Wirklichkeit bilden dann g und $\overline{g}$ den Winkel $FO_1\overline{F}$, der mit $d\varphi$ bezeichnet werde, während ihr Winkel im Bilde, $\sphericalangle FP'\overline{F}$, gleich $d\varphi'$ sei. Fällt man von F auf $O_1\overline{F}$ und $P'\overline{F}$ die Lote mit den Fusspunkten A und B, so ist:

$$AF = O_1 F d\varphi\ , \qquad BF = P'F d\varphi'\ ,$$

also

$$\sin O_1\overline{F}F = \frac{AF}{F\overline{F}} = \frac{O_1 F d\varphi}{F\overline{F}}\ , \qquad \sin P'\overline{F}F = \frac{P'F d\varphi'}{F\overline{F}}\ .$$

Das Lot von P' auf f habe den Fusspunkt R. Da jetzt bis auf unendlich kleine Grössen:

$$\sin O_1\overline{F}F = \frac{O_1 Q}{O_1 F}\ , \qquad \sin P'\overline{F}F = \frac{P'R}{P'F}$$

ist, so folgt also:

$$\frac{O_1 Q}{O_1 F} = \frac{O_1 F}{F\overline{F}} d\varphi\ , \qquad \frac{P'R}{P'F} = \frac{P'F}{F\overline{F}} d\varphi'\ ,$$

sodass kommt:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{O_1 F^2}{P'F^2} \cdot \frac{P'R}{O_1 Q}\ .$$

Lassen wir F auf f entlang laufen, so variirt dies Verhältniss. Weil $P'R$ und $O_1 Q$ ungeändert bleiben, so erreicht $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ mithin ein Maximum oder Minimum — ohne Rücksicht auf's Vorzeichen — überall da, wo der Bruch $\frac{O_1 F}{P'F}$ ein Maximum oder Minimum annimmt. Dies ist da der Fall, wo sich der Bruch $\frac{O_1 F}{P'F}$ bei infinitesimaler Aenderung von F nicht ändert, also da, wo für den benachbarten Punkt $\overline{F}$ auf f:

$$\frac{O_1\overline{F}}{P'\overline{F}} = \frac{O_1 F}{P'F}$$

oder

$$P'F : P'\overline{F} = O_1 F : O_1\overline{F}$$

ist. Die Punkte P' und O_1 liegen folglich dann auf der Curve

aller Punkte, deren Abstandsverhältniss von F und $\overline{F}$ einen gewissen constanten Werth hat, d. h. auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf $F\overline{F}$ oder f gelegen ist. Da dieser Kreis durch P' und O_1 geht, ist er leicht zu construiren: Sein Mittelpunkt M ist der Schnittpunkt von f mit dem Mittellote von $O_1 P'$. Er trifft f in den Punkten F, für die $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ein Maximum oder Minimum erreicht. Diese Punkte mögen S_1 und S_2 heissen.

Suchen wir die Curven, längs deren die Contingenzwinkel am meisten verzerrt werden, so haben wir also von P' aus beständig einer der beiden zugeordneten »*Richtungen grösster Winkelzerzerrung*« $P'S_1$ oder $P'S_2$ nachzugehen. Dabei beschreiben wir eine Curve. Weil O_2 Spiegelpunkt von O_1 hinsichtlich f ist, so halbiren die Curventangenten $P'S_1$ und $P'S_2$ die von $P'O_1$ und $P'O_2$ gebildeten Winkel.

Die gesuchten Curven sind demnach Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten O_1 und O_2. Da die Beziehung zwischen den Ebenen T und E wechselseitig ist und $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ ein Maximum oder Minimum erreicht, wenn $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ein Minimum oder Maximum erreicht, so folgern wir:

Es giebt in der Ebene E *eine Schaar von Curven, längs deren die Contingenzwinkel überall die grösstmögliche Verzerrung erfahren. Es sind dies alle confocalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten U_1 und U_2. Sie bilden sich wieder als confocale Ellipsen und Hyperbeln ab und ihre Brennpunkte U_1 und U_2 als die Brennpunkte O_1 und O_2 der Bildcurven.*

Es ergab sich oben als das Verhältniss des abgebildeten Winkels $d\varphi'$ zum Originalwinkel $d\varphi$ der Ausdruck:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{O_1 F^2}{P'F^2} \cdot \frac{P'R}{O_1 Q} .$$

Hierbei war P' der Scheitel von $d\varphi'$, F der Fluchtpunkt eines der infinitesimal benachbarten Schenkel dieses Winkels und R der Fusspunkt des Lotes von P' auf f.

Anstatt nun die Curven ohne Winkelverzerrung oder die Curven grösster Winkelverzerrung aufzusuchen, können wir uns

noch ein anderes auf die Winkelverzerrung bezügliches Problem stellen:

Halten wir P' fest, während F auf f sich entlang bewegt, so wird sich $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ändern. Tragen wir beständig den Werth dieses Verhältnisses auf $P'F$ von P' aus auf, so erhalten wir eine Curve, deren Radienvectoren von P' aus ein Bild geben von der Art der Verzerrung nach den verschiedenen von P' ausgehenden Richtungen hin. Wir können diese Curve die *Winkelverzerrungscurve für den Scheitel* P' nennen.

Es ist jedoch zweckmässig, zunächst nur die Grösse $\frac{P'F}{O_1F} = \varrho'$ auf den Radienvectoren von P' aus abzutragen. Alsdann ist:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{1}{\varrho'^2} \cdot \frac{P'R}{O_1Q},$$

und hier ist bei festem P' der Factor $\frac{P'R}{O_1Q}$ constant. ϱ' lässt sich leicht construiren: Nachdem wir eine beliebig gewählte Längeneinheit auf O_1F von O_1 aus abgetragen haben bis X, ziehen wir durch X die Parallele zu O_1P', die $P'F$ in Y' schneide. Dann ist:

$$\frac{P'Y'}{O_1X} = \frac{P'F}{O_1F},$$

also, da $P'X$ die Einheit ist:

$$P'Y' = \varrho'.$$

Der Ort von X ist ein Kreis um O_1. Der Ort von Y' ist also hiernach eine zu diesem Kreise affine Figur, d. h. eine *Ellipse*. (Vgl. Fig. 4.) Ihre Axenrichtungen sind die Richtungen grösster Winkelverzerrung, daher liegen die Axen auf den oben construirten Geraden $P'S_1$ und $P'S_2$, die ja in der That auf einander senkrecht stehen. Tragen wir nun auf der Geraden $P'F$ die reciproken Werthe der Quadrate der Radienvectoren der Ellipse noch multiplicirt mit $\frac{P'R}{O_1Q}$ ab, so ergiebt sich die gewünschte Winkelverzerrungscurve, eine *Curve vierten Grades* mit P' als Mittelpunkt.

Wir wenden uns jetzt zur *Streckenverzerrung*.

In der umgeklappten Ebene E wird ein Punkt P_1 angenommen, dessen Projection P' sei. Ferner legen wir durch P_1 eine Gerade g_1, die s in dem Spurpunkt S treffe. Ihren Fluchtpunkt nennen wir F. F, P', S liegen auf der Projection g' von g_1. (Fig. 4.) Von P_1 aus tragen wir eine infinitesimale Strecke ds auf g_1 ab und bestimmen ihre Projection ds', indem wir die Gerade von O_1 nach dem Endpunkte von ds mit $P'S$ zum Schnitte bringen. Alsdann ist offenbar:

$$\frac{ds' \sin SP'P_1}{ds \sin SP_1P'} = \frac{O_1P'}{O_1P_1}$$

oder, da:

$$\frac{\sin SP'P_1}{\sin SP_1P'} = \frac{\sin O_1P'F}{\sin P'O_1F} = \frac{O_1F}{P'F}$$

ist:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{P'F}{O_1F} \cdot \frac{O_1P'}{O_1P_1} .$$

Wenn wir wie früher den Fusspunkt des Lotes von P' auf f mit R und überdies den Fusspunkt dieses Lotes auf s mit T bezeichnen, so ist:

$$\frac{O_1P'}{O_1P_1} = \frac{P'F}{FS} = \frac{P'R}{RT},$$

daher:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{P'F}{O_1F} \cdot \frac{P'R}{RT}$$

und also:

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 \cdot \frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{P'R^2}{O_1Q \cdot RT} .$$

Halten wir den Punkt P' fest und variiren wir F auf f, so bleibt der rechtsstehende Ausdruck constant. Es besteht also zwischen $\frac{ds'}{ds}$ und $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ für alle von einem Punkte P' ausgehenden Richtungen eine Relation von der Form

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 \cdot \frac{d\varphi'}{d\varphi} = \text{Const.}$$

Auch ist, wenn ϱ' der Radiusvector der oben construirten Ellipse ist:

$$\frac{ds'}{ds} = \varrho' \cdot \frac{P'R}{RT} .$$

Wenn wir also $\frac{ds'}{ds}$ als Radiusvector auftragen, so ergiebt sich eine zur früheren Ellipse ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse mit dem Mittelpunkt P' als Aehnlichkeitspunkt. Diese Ellipse giebt Aufschluss über die Streckenverzerrungen. Wir können sie die *Streckenverzerrungscurve für den Punkt P'* nennen. Dass sich hier eine Ellipse ergiebt, ist übrigens von vornherein selbstverständlich. Lässt man nämlich ds um P_1 drehen, so beschreibt der Endpunkt dieser Strecke einen Kreis. Seine Projection ist eine Ellipse, der Ort der Endpunkte der von P' ausgehenden Strecken ds'. Diese unendlich kleine Ellipse ist nur durch eine ähnliche Ellipse von endlichen Dimensionen ersetzt worden.

Aus den früheren Ergebnissen folgern wir noch:

Die Curven, längs deren die Strecken die grösste Verzerrung erleiden, sind ebenfalls die früher erwähnten confocalen Ellipsen und Hyperbeln, denn $\frac{ds'}{ds}$ hat ein Maximum oder Minimum, wenn $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ein Minimum oder Maximum hat.

Die Curven ohne Streckenverzerrung sind transcendent, man kann nämlich rechnerisch einsehen, dass in ihre Gleichungen elliptische Integrale eingehen. Es verlohnt sich daher ihre Untersuchung nicht. Natürlich lassen sich aber für jeden Punkt P' die beiden Richtungen ohne Streckenverzerrung construiren. Unsere Formeln geben die Mittel dazu sofort an die Hand. Doch will ich hierauf nicht weiter eingehen.

Wenden wir uns schliesslich zu den *Krümmungsverzerrungen.*

Ist ds das Bogenelement und $d\varphi$ der zugehörige Contingenzwinkel einer Curve, so ist bekanntlich das zugehörige Krümmungsmaass

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds} .$$

In der Abbildung ist das Krümmungsmaass:

$$\varkappa' = \frac{d\varphi'}{ds'} ,$$

demnach

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} : \frac{ds'}{ds},$$

d. h., da

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{O_1 F^2}{P' F^2} \cdot \frac{P'R}{O_1 Q}, \quad \frac{ds'}{ds} = \frac{P'F}{O_1 F} \cdot \frac{P'R}{RT}$$

ist:

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{O_1 F^3}{P'F^3} \cdot \frac{RT}{O_1 Q}.$$

Also erreicht die Verzerrung der Krümmung auch da ein Maximum oder Minimum, wo $\frac{d\varphi'}{d\varphi}$ ein solches hat. Mithin:

Die Curven grösster Verzerrung der Krümmung sind ebenfalls die mehrfach erwähnten confocalen Ellipsen und Hyperbeln.

Suchen wir *die Curven ohne Verzerrung der Krümmung.* Ist P' ein Punkt einer solchen — in der Bildebene T — und $P'F$ die Tangente, so muss nach der letzten Formel längs der Curve

$$\frac{O_1 F}{P'F} = \sqrt[3]{\frac{O_1 Q}{RT}}$$

sein. Der rechtsstehende Ausdruck ist von der Lage des Punktes P' und seiner Tangente unabhängig. Er ist eine der Ebene E anhaftende Zahl γ. Um nun die Curven zu finden, für die

$$\frac{O_1 F}{P'F} = \gamma$$

ist, verfahren wir so (Fig. 5): Wir teilen $O_1 Q$ im Punkte V so, dass

$$\frac{VQ}{O_1 Q} = \frac{1}{\gamma}$$

ist und ziehen durch den Theilpunkt V die Parallele p zu f. Alsdann wählen wir F beliebig auf f und bringen $O_1 F$ mit p zum Schnitt in W. Sodann haben wir:

$$\frac{WF}{O_1 F} = \frac{VQ}{O_1 Q} = \frac{1}{\gamma},$$

demnach

$$WF = \frac{O_1 F}{\gamma}.$$

Der zu F gehörige Punkt P' muss nun so liegen, dass

$$\frac{O_1 F}{P' F} = \gamma ,$$

also

$$P'F = WF$$

ist. Mithin liegt P' auf dem Kreis um F mit dem Radius FW. Variiren wir F auf f, so ergeben sich unendlich viele solche Kreise. Ist P' irgendwie angenommen, so muss die Tangente von P' nach dem Mittelpunkt F des durch P gehenden Kreises der Schaar gehen. Die gesuchten Curven sind folglich die *orthogonalen Trajectorien der Kreisschaar.*

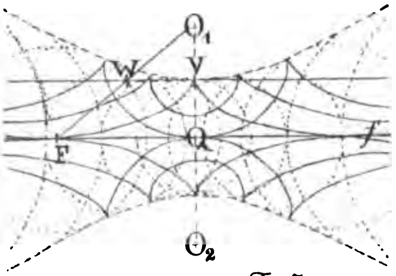


Fig. 5.

Diese Kreise besitzen als Enveloppe eine der mehrfach erwähnten confocalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten O_1 und O_2. Denn ist A' der Schnittpunkt zweier benachbarter Kreise der Schaar, so ist, wenn F und $\bar{F}$ die Kreismittelpunkte sind:

$$\frac{A' F}{O_1 F} = \frac{A' \bar{F}}{O_1 \bar{F}}$$

d. h. beim Variiren von F bleibt $\frac{A' F}{O_1 F}$ momentan constant; es erreicht also gerade ein Maximum oder Minimum und dies war für die oben construirten confocalen Ellipsen und Hyperbeln charakteristisch. Die Enveloppe kann eine Ellipse oder Hyperbel sein, je nachdem $\gamma \gtreqless 1$ ist. (In der Figur 5 ist $\gamma < 1$ gewählt.) Es ist diejenige Ellipse oder Hyperbel mit den Brennpunkten O_1 und O_2, die durch V geht.

Die orthogonalen Trajectorien der Kreisschaar, also die Curven ohne Verzerrung des Krümmungsmaasses, sind im allgemeinen transcendent und besitzen Spitzen in den Punkten, die sie mit jener Ellipse oder Hyperbel gemein haben.

In dem Falle aber, dass $\gamma = 1$ ist, d. h. V mit O_1 zusammenfällt, sind die Kreise alle Kreise durch O_1 und O_2 und die ortho-

gonalen Trajectorien derselben bekanntlich ebenfalls Kreise. Geometrisch ist dieser Specialfall dadurch charakterisirt, dass für ihn $O_1 Q = R T$ ist, also O_2, der Spiegelpunkt von O_1 hinsichtlich f auf s liegt, da RS die Breite der von f und s gebildeten Streifens ist. Stereometrisch gedeutet heisst dies: In diesem Specialfalle geht die eine Halbirungsebene der von den Ebenen **E** und **T** gebildeten Raumwinkel durch das Projectionscentrum O. Bei dieser Lage existiren also unendlich viele Kreise, die in wahrer Grösse abgebildet werden. —

Die confocalen Ellipsen und Hyperbeln, welche gleichzeitig die Curven grösster Verzerrung der Contingenzwinkel, der Bogenelemente und der Krümmungen sind, liefern einen nicht unwichtigen Anhaltepunkt für die Praxis: Soll eine ebene Curve perspectiv abgebildet werden, so wird sie um so weniger verzerrt werden, je weniger sie sich einer jener confocalen Ellipsen und Hyperbeln anschmiegt. Diese Curven spielen also eine ganz fundamentale Rolle bei der Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse.

Leipzig, im April 1892.

F. Schur, *Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Vorgelegt vom w. Mitgliede A. Mayer.

Im fünften Bande der Mathematischen Annalen hat Herr A. Mayer*) die Integration eines vollständigen Systems von q homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in n Veränderlichen zurückgeführt auf die Integration eines Systems von $n-q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die hierzu nöthige Reduction des vollständigen Systems auf die Mayer'sche Normalform erfordert nur algebraische Operationen. Wenn hiernach auch im allgemeinen Falle die Integrationsschwierigkeiten des Problems vom theoretischen Standpunkte aus auf das geringste Maass zurückgeführt sind, so dürfte es doch von Interesse und in besonderen Fällen sogar von Nutzen sein, dass ein zur Integration des vollständigen Systems dienendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung auch gefunden werden kann *ohne vorherige Reduction des vollständigen Systems auf die Mayer'sche Normalform.* Dabei wird die Anzahl der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Allgemeinen allerdings grösser als $n-q$ sein, dieselben können aber in besonderen Fällen leichter integrirbar sein als das Mayer'sche System. Das Mayer'che Theorem ergiebt sich nämlich als specieller Fall des folgenden Satzes:

Führt man in das vollständige System von q homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichungen:

---

*) S. auch diese Ber. 1891, p. 448 ff.

$$(1) \qquad \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial F}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0 \ (\mathfrak{b}=1 \ldots q) ,$$

wo die $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1 \cdots x_n)$ *und ihre ersten Differentialquotienten solche eindeutige, endliche und stetige Functionen von* $x_1 \cdots x_n$ *sind, welche die Identitäten:*

$$(2) \qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \left(\frac{\partial \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \sigma_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}(x) - \frac{\partial \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \sigma_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x) \right) = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{q} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x) \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$$

befriedigen, statt der $x_1 \cdots x_n$ *neue Veränderliche* $z_1 \cdots z_n$ *ein auf Grund der Gleichungen:*

$$(3) \qquad x_{\mathfrak{a}} = f_{\mathfrak{a}}(x_1^0 \cdots x_n^0 , z_1 \cdots z_q) \quad (\mathfrak{a}=1 \ldots n) ,$$

wo die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x_1^0 \cdots x_n^0, y_1 t \cdots y_q t)$ *bestimmt sind durch das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$(4) \qquad \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{q} \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1 \cdots x_n) y_{\mathfrak{b}}$$

und die Anfangsbedingungen, dass für $t = 0$ $x_{\mathfrak{a}}$ *in* $x_{\mathfrak{a}}^0$ *übergehe, und die* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *irgend welche einmal differentiirbare Functionen von* $z_{q+1} \cdots z_n$ *sind, welche nur die Auflösung des Systems* (3) *nach* $z_1 \cdots z_n$ *ermöglichen, so nimmt das vollständige System die Gestalt an:*

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial F}{\partial z_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial z_q} = 0 ,$$

so dass das allgemeine Integral desselben die Form:

$$(6) \qquad F(x_1 \cdots x_n) = \varphi(z_{q+1} \cdots z_n)$$

hat, wo φ *irgend eine einmal differentiirbare Function ihrer Argumente ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass die Functionen $f_{\mathfrak{a}}$ die Veränderlichen $y_1 \cdots y_q$ und t nur in der Verbindung $y_{\mathfrak{b}} t$ enthalten. Bezeichnen wir nämlich diese Functionen für den Moment mit $f_{\mathfrak{a}}(y_1 \cdots y_q, t)$, so lehrt die Division der Differentialgleichungen (4) durch irgend eine von Null verschiedene Constante c unmittelbar, dass:

$$(7) \qquad f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{y_1}{c} \cdots \frac{y_q}{c}, tc\right) = f_{\mathfrak{a}}(y_1 \cdots y_q, t) .$$

Daraus aber folgt:

(8)
$$f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{z_1}{a+t}\cdots\frac{z_q}{a+t}\,,\;a+t\right)=$$
$$f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{z_1}{a}\frac{a}{a+t}\cdots\frac{z_q}{a}\frac{a}{a+t}\,,\;a\frac{a+t}{a}\right)=f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{z_1}{a}\cdots\frac{z_q}{a}\,,\;a\right);$$

d. h. die Functionen $f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{z_1}{t}\cdots\frac{z_q}{t}\,,\;t\right)$ sind von t ganz unabhängig, wie zu beweisen war.

Was ferner die Umkehrbarkeit des Gleichungssystems (3) betrifft, so ist leicht zu sehen, dass man sich die $x_1^0 \cdots x_n^0$ immer als solche Functionen der $z_{q+1} \cdots z_n$ gewählt denken kann, dass die Functionaldeterminante $\left|\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial z_{\mathfrak{b}}}\right|$ nicht identisch, z. B. nicht für $t=0$ verschwinde. Für $t=0$ und $\mathfrak{b}=1\cdots q$ lehren nämlich die Differentialgleichungen (4), dass

$$\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial z_{\mathfrak{b}}}=\sigma_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x^0)\,,$$

für $t=0$ und $\mathfrak{b}>q$ aber wird

$$\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial z_{\mathfrak{b}}}=\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}^0}{\partial z_{\mathfrak{b}}}\,.$$

Da nun die Determinanten q^{ter} Ordnung der Matrix $\|\,\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)\,\|$ nicht sämmtlich identisch verschwinden, so wird man die $x_1^0 \cdots x_n^0$ in der That so als Functionen der $z_{q+1}\cdots z_n$ wählen können, dass die Determinante $\left|\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial z_{\mathfrak{b}}}\right|$ für $t=0$ nicht verschwindet. Für besondere Fälle ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass umgekehrt:

(9)
$$x_{\mathfrak{a}}^0=f_{\mathfrak{a}}(x_1\cdots x_n\,,\;-z_1\cdots -z_q)\;;$$

da nämlich die $f_{\mathfrak{a}}(f(x^0, y\,t), y\,s)$ sowohl als die $f_{\mathfrak{a}}(x^0, y\,(t+s))$ als Functionen von s die Differentialgleichungen (4) befriedigen und für $s=0$ in $f_{\mathfrak{a}}(x^0, y\,t)$ übergehen, so sind sie je einander gleich, woraus für $s=-t$ die Gleichungen (9) folgen.

Um endlich den Haupttheil des Satzes zu beweisen, führen wir $q\cdot q$ neue Functionen $\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)$ ein, welche durch das System linearer Differentialgleichungen:

$$(10)\qquad \frac{d\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{dt} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{q} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(f(x^0, yt))\, y_{\mathfrak{d}}\, \Psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t)$$

und die Anfangsbedingungen $\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = 0$ definirt sind, wo $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 0$ oder 1, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder von $\mathfrak{b}$ verschieden ist. Dann ist nämlich leicht zu zeigen, dass:

$$(11)\qquad \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}} - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, \Psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t) = 0\,.$$

Denn bezeichnen wir die linke Seite der Gleichungen (11) mit $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)$, so lehrt in Rücksicht darauf, dass die $\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}$ definirt sind durch das System linearer Differentialgleichungen:

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}\right) = \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(f(x^0, yt)) + \sum_{\mathfrak{e}=1}^{q}\sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{e}}(f(x^0, yt))}{\partial f_{\mathfrak{d}}(x^0, yt)}\, y_{\mathfrak{e}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{d}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}$$

und die Anfangsbedingungen $\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}\right)^0 = 0$, eine einfache Rechnung, dass wegen der Identitäten (2):

$$(13)\qquad \frac{d\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{dt} = \sum_{\mathfrak{e}=1}^{q}\sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{e}}(f(x^0, yt))}{\partial f_{\mathfrak{d}}(x^0, yt)}\, \varphi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(t)\, y_{\mathfrak{e}}\ ;$$

da nun $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = 0$ ist, so verschwindet hiernach $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)$ für jeden Werth von t.

Wir setzen nunmehr:

$$(14)\qquad \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{t} = \psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1^0 \cdots x_n{}^0, z_1 \cdots z_q)\,.$$

In der That enthalten die $\psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, weil sie den Differentialgleichungen:

$$(15)\qquad \frac{d\psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}}{dt} + \frac{1}{t}\,\psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = \frac{\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{t} + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{q} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(x)\, y_{\mathfrak{d}}\, \psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}$$

genügen, die Veränderlichen $y_1 \cdots y_q$ und t auch nur in den Verbindungen $y_{\mathfrak{b}}t$, was in derselben Weise wie oben bewiesen werden kann. Da

$$(16)\qquad \psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1^0 \cdots x_n{}^0, 0 \cdots 0) = \left(\frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{t}\right)^0 = \left(\frac{d\Psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{dt}\right)^0 = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,,$$

so ist ersichtlich, dass die Determinante $| \psi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x^0, z) |$ nicht identisch verschwindet.

Nun liefern die Gleichungen (11) die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$(17) \qquad \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial z_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, \psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x^0, z) \,. \qquad (\mathfrak{a}=1\ldots n,\ \mathfrak{b}=1\ldots q)\,.$$

Multipliciren wir dieselben mit $\frac{\partial z_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$ und summiren über $\mathfrak{a}$ von 1 bis n, so folgt:

$$(18) \qquad \delta_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} \frac{\partial z_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\, \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, \psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x^0, z) \,. \quad (\mathfrak{b}=1\ldots n,\ \mathfrak{b}=1\ldots q)\,.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $z_1 \cdots z_n$ in das vollständige System (1) geht dasselbe aber über in:

$$(19) \qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}=1}^{n} \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, \frac{\partial z_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\, \frac{\partial F}{\partial z_{\mathfrak{b}}} = 0 \,. \qquad (\mathfrak{c}=1\ldots q)\,.$$

Multipliciren wir diese q Gleichungen der Reihe nach mit $\psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x^0, z)$ und summiren über $\mathfrak{c}$ von 1 bis q, so erhalten wir, weil die Determinante $| \psi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x^0, z) |$ nicht identisch verschwindet, wegen (18) das äquivalente System:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial z_q} = 0 \,,$$

sodass unser Satz vollständig bewiesen ist.

Um hieraus das Mayer'sche Theorem zu erhalten, brauchen wir nur anzunehmen, dass das vollständige System (1) nach $\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_q}$ aufgelöst sei, d. h. dass für $\mathfrak{a} = 1 \cdots q$: $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sei. Dann gehen die ersten q Gleichungen des Systems (3) in $x_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}^0 + z_{\mathfrak{a}}$ über, und wir erreichen die Auflösbarkeit des Systems (3), wenn wir die $x_{\mathfrak{a}}^0$ für $\mathfrak{a} = 1 \cdots q$ Constanten und für $\mathfrak{a} > q$ den $z_{\mathfrak{a}}$ selbst gleichsetzen, sodass sich die bekannten $n - q$ Hauptlösungen in Beziehung auf $x_1 = x_1^0, \cdots, x_q = x_q{}^0$ ergeben in der Form:

$$(20) \qquad z_{\mathfrak{a}} = f_{\mathfrak{a}}(x_1 \cdots x_n,\ x_1^0 - x_1 \cdots x_q{}^0 - x_q)\,, \quad (\mathfrak{a}=q+1\cdots n)\,,$$

welche durch Integration eines Systems von $n - q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung gefunden werden können.

Man sieht ausserdem, dass jedesmal, wenn in dem System (1) eine der Grössen $\frac{\partial F}{\partial x_\mathfrak{a}}$ nur in einer der q Differentialgleichungen und mit dem Factor 1 behaftet vorkommt, die Anzahl der zu integrirenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (4) sich um 1 verringert. Ich hebe schliesslich noch hervor, dass unser Beweis, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, über die $\sigma_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ nichts voraussetzt, als dass sie für die in Betracht kommenden Werthe der $x_1 \cdots x_n$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente sind; denn die $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^\mathfrak{a}(x)$ sind ja rational aus diesen Functionen zusammengesetzt.

Auch der Eingangs aufgestellte Satz ist enthalten in einem allgemeineren Satze, der sich auf vollständige Systeme allgemeiner partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung bezieht. Um denselben aussprechen zu können, formuliren wir den von Herrn Lie aufgestellten Begriff des Integrals einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung: *Eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung*:

$$(21) \qquad F(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0$$

integriren heisst die Grössen $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ *als solche Functionen von* n *wesentlichen Parametern* $u_1 \cdots u_n$ *bestimmen, dass erstens die Gleichung* (21) *und zweitens die Differentialgleichungen*:

$$(22) \qquad \frac{\partial z}{\partial u_\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} p_\mathfrak{b} \frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial u_\mathfrak{a}}$$

identisch erfüllt sind.

Dann lautet der allgemeine Satz:

Um ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$(23) \quad F_1(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0, \cdots, F_q(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0,$$

wo die $F_\mathfrak{a}$ *solche nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen sind, für welche die Ausdrücke*:

$$[F_\mathfrak{a}, F_\mathfrak{b}] = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial p_\mathfrak{c}} \left(\frac{\partial F_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{c}} + p_\mathfrak{c} \frac{\partial F_\mathfrak{b}}{\partial z} \right) - \frac{\partial F_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{c}} \left(\frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{c}} + p_\mathfrak{c} \frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial z} \right) \right)$$

für alle Werthsysteme der $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ *verschwinden, welche*

die Gleichungen (23) *befriedigen, zu integriren, bestimme man die Grössen* $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ *und die Hülfsgrösse* p *als Functionen von* $u_1 = y_1 t, \cdots, u_q = y_q t$ *durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:*

(24) $$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{p} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} p_{\mathfrak{b}} \frac{\partial F}{\partial p_{\mathfrak{b}}}, \quad \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt} = \frac{1}{p} \frac{\partial F}{\partial p_{\mathfrak{a}}},$$

$$\frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt} = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + p_{\mathfrak{a}} \frac{\partial F}{\partial z}\right), \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z},$$

wo

(25) $$F = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} F_{\mathfrak{c}} y_{\mathfrak{c}},$$

und durch die Anfangsbedingungen, dass für $t = 0$: $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ *und* p *in* $z^0 x_1^0 \cdots x_n^0 p_1^0 \cdots p_n^0$ *und* -1 *übergehen, wo die* $z^0 x_1^0 \cdots p_n^0$ *solche Functionen von* $n - q$ *Parametern* $u_{q+1} \cdots u_n$ *sind, welche die Gleichungen* (22) *und* (23) *identisch befriedigen und bewirken, dass* $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ *von* n *wesentlichen Parametern* $u_1 \cdots u_n$ *abhängen; diese Anfangsbedingungen können immer ohne Integration erfüllt werden.*

Den Beweis dieses Satzes, der auf denselben Principien beruht wie der obige, will ich bei einer andern Gelegenheit geben. Man sieht, wie auch er die Erledigung des Integrationsgeschäftes ohne vorherige Reduction des Systems (23) auf die Jacobi'sche Form gestattet. Er liefert das Fundamentaltheorem der Lie'schen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung (in dem Sinne, wie Herr Mayer dasselbe a. a. O. S. 458 verstanden wissen will) als einen speciellen Fall.

SITZUNG VOM 13. JUNI 1892.

C. Neumann, *Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes.*

Herr Prof. Ostwald hat in seinem neuesten Werk (Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Auflage, 1892, Bd. II, Seite 37) ein gewisses Axiom aufgestellt über den Umsatz der Energie, d. i. über dasjenige Quantum von Energie, welches binnen einer gegebenen Zeit aus der potentiellen (distantiellen) Form in die kinetische Form übergeht. Auf Veranlassung meines hochgeehrten Collegen habe ich dieses Axiom einer näheren Untersuchung unterworfen, allerdings unter der beschränkenden Voraussetzung, dass das gegebene materielle System zu Anfang sich in *Ruhe* befindet, und dass die von dieser Ruhelage aus beginnende Bewegung nur während ihres *ersten Zeitelementes* in Betracht gezogen werden soll.

Es sei mir gestattet, auf diese Dinge hier näher einzugehen, und dabei statt der neueren Ostwald'schen Bezeichnungsweise diejenige eintreten zu lassen, welche in der Dynamik von Alters her üblich ist.

Ein aus beliebig vielen Massenpunkten m bestehendes und beliebig vielen Bedingungsgleichungen

$$(1.)\qquad \varphi_1 = 0\ ,\qquad \varphi_2 = 0\ ,\qquad \text{etc. etc.}$$

unterworfenes System bewege sich unter dem Einfluss von Kräften, die ein Potential F besitzen, so dass also in jedem Augenblick der Bewegung die Formel stattfindet:

$$(2.)\qquad T + F = C\ ,$$

wo T die lebendige Kraft des Systems vorstellt, während C eine Constante bezeichnet.

Wir wollen nun *voraussetzen*, das System befinde sich zu *Anfang* des unendlich kleinen Zeitelementes τ in *Ruhe*, und die

Gesammtheit all' derjenigen *virtuellen Bewegungen* in Betracht ziehen, welche alsdann während der Zeit τ, ohne Verletzung der Gleichungen (1.) und (2), überhaupt möglich sind. All' diese virtuellen Bewegungen werden zu *Anfang* der Zeit τ ein und dieselbe lebendige Kraft, nämlich die lebendige Kraft *Null* besitzen. Hingegen werden sie verschiedene lebendige Kräfte haben zu *Ende* der Zeit τ.

Wir stellen uns die Aufgabe, unter all' diesen virtuellen Bewegungen diejenige herauszugreifen, deren lebendige Kraft zu Ende der Zeit τ *am grössten* ist.

Nach unserer Voraussetzung befindet sich das gegebene System zu *Anfang* der Zeit τ in *Ruhe*. Demgemäss sind die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der einzelnen Punkte m des Systems zu *Anfang* der Zeit τ mit

$$x, y, z \quad \text{und} \quad 0, 0, 0\ ,$$

andererseits aber zu *Ende* dieser Zeit mit

$$x + \xi\,,\quad y + \eta\,,\quad z + \zeta \quad \text{und} \quad u, v, w$$

zu bezeichnen. Auch sind dabei die zwischen den unendlich kleinen Grössen ξ, η, ζ und u, v, w sofort sich ergebenden Relationen

$$\xi = \frac{u\tau}{2}\,,\quad \eta = \frac{v\tau}{2}\,,\quad \zeta = \frac{w\tau}{2}$$

zu notiren.

Die Gleichungen (1.) liefern alsdann für das Zeitelement τ folgende Gleichungen:

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\zeta\right) = 0\ ,$$

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\zeta\right) = 0\,,$$

etc. etc.,

die wir mit Rücksicht auf jene Relationen auch so schreiben können:

(3.)

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}w\right) = 0\ ,$$

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}v + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}w\right) = 0\,,$$

etc. etc.,

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Punkte m des gegebenen Systems. In analoger Art liefert die Gleichung (2.) für das Zeitelement τ die Formel:

$$(4.)\quad \sum \frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2} + \frac{\tau}{2} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w \right) = 0 .$$

Dabei sei bemerkt, dass der hier auftretende Ausdruck

$$(5.)\quad \sum \frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2}$$

die lebendige Kraft des Systems zu Ende der Zeit τ vorstellt.

Die vorhin genannten *virtuellen Bewegungen* sind, weil sie den Gleichungen (1.), (2.) entsprechen sollen, durch die Formeln (3.), (4.) charakterisirt. Und unter all' diesen virtuellen Bewegungen ist gegenwärtig also diejenige herauszugreifen, deren lebendige Kraft (5.) zu Ende der gegebenen Zeit τ *am grössten* ist. Oder mit andern Worten: Die den Formeln (3.), (4.) unterworfenen Geschwindigkeitscomponenten u, v, w sind so zu bestimmen, dass jene lebendige Kraft (5.) ein *Maximum* wird. Hieraus ergeben sich nach bekannter Regel für u, v, w die Gleichungen:

$$(6.)\quad mu = \lambda \left(mu + \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots ,$$

etc. etc. ,

d. i. die Gleichungen:

$$(7.)\quad (1-\lambda) mu = \frac{\lambda \tau}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots ,$$

etc. etc. ,

wo λ, λ_1, λ_2, $\cdots$ unbekannte Factoren sind.

Multipliciren wir, was die Gleichungen (7.) betrifft, die drei dem Punkt m entsprechenden Gleichungen respective mit u, v, w, und addiren, und summiren wir sodann über sämmtliche Punkte m des ganzen Systems, so gelangen wir mit Rücksicht auf (3.) zu folgender Formel:

$$(1-\lambda) \sum m(u^2+v^2+w^2) = \frac{\lambda \tau}{2} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w \right) .$$

Die Combination dieser Formel mit (4.) ergiebt aber sofort:

$$2(1-\lambda) = -\lambda$$

d. i.

$$\lambda = 2 .$$

Hierdurch gewinnen die Gleichungen (7.) die einfachere Gestalt

$$(8.) \qquad - mu = \tau \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots ,$$

etc. etc. ,

d. i. die Gestalt:

$$(9.) \qquad m \frac{u}{\tau} = - \frac{\partial F}{\partial x} + \varrho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varrho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots ,$$

etc. etc. ,

wo $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ (ebenso wie $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$) unbekannte Factoren vorstellen.

Die Gleichungen (9.) sind aber offenbar nichts Anderes als die bekannten dynamischen Differentialgleichungen, gebildet für das gegebene System mit Bezug auf das gegebene Zeitelement τ. Unter all' jenen virtuellen Bewegungen wird also diejenige, deren lebendige Kraft (5.) zu Ende des Zeitelementes τ *am grössten* ist, die Eigenschaft haben, identisch zu sein mit der unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte *wirklich* eintretenden Bewegung. Wir gelangen somit zu folgendem Satze:

Ein beliebigen Bedingungen unterworfenes materielles System bewege sich unter dem Einfluss gegebener Kräfte, die ein Potential besitzen.

Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bedingungen und mit der Formel des Princips der lebendigen Kraft verträglichen virtuellen Bewegungen eine vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ am grössten ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte während der Zeit τ in Wirklichkeit eintritt.

Dieser Satz aber repräsentirt das Ostwald'sche Axiom in der schon angedeuteten Einschränkung. Da nämlich das System zu Anfang der Zeit τ in Ruhe ist, so repräsentirt die zu Ende dieser Zeit vorhandene lebendige Kraft dasjenige Quantum von Energie, welches während der Zeit τ aus der potentiellen Form in die kinetische Form übergegangen ist.

Robert Behrend, *Ueber die Löslichkeit von Doppelverbindungen.* II.

In der ersten Abhandlung über die Löslichkeit von Doppelverbindungen [1]) habe ich experimentell nachzuweisen versucht, dass sich die Beeinflussung der Löslichkeit einer in Lösung dissociirten Doppelverbindung durch die Gegenwart eines Ueberschusses eines ihrer Bestandtheile auf Grund der Gesetze des chemischen Gleichgewichtes unter Zuhülfenahme der van 't Hoff-schen Hypothese über den Zustand der Körper in Lösungen in qualitativer und quantitativer Hinsicht erklären lässt.

Die Theorie derartiger Vorgänge ist bereits von W. Nernst (Z. f. physikal. Chem. 4. 372) entwickelt und für den Fall der electrolytischen Dissociation von ihm sowie später von Noyes (Z. f. physikal. Chem. 6. 241) experimentell bestätigt worden. Scheinbare Ausnahmen haben ihre Erklärung durch die Arbeiten von Le Blanc und Noyes (Z. f. physikal. Chem. 6. 385) gefunden.

Die Thatsache, dass die von Nernst und Noyes studirten electrolytisch dissociirten, sowie die von mir untersuchten hydrolytisch oder vielmehr alkohololytisch dissociirten Verbindungen ganz denselben Gesetzen des chemischen Gleichgewichtes gehorchen, könnte einerseits als eine weitere Stütze der ja durchaus noch nicht allgemein anerkannten Hypothese der electrolytischen Dissociation herangezogen werden; andererseits zeigt sie wiederum, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen chemischen und den sogenannten molekularen Verbindungen nicht

---

1) Diese Berichte 1892. 1.

besteht, dass derselbe vielmehr nur in der Festigkeit der Bindung zum Ausdruck kommt.

Zur weiteren Bestätigung der früher erhaltenen Resultate habe ich den Einfluss der Anwesenheit eines Ueberschusses von Pikrinsäure oder Phenantren auf die Löslichkeit des Phenantrenpikrates in Alkohol untersucht.

Reines Phenantrenpikrat lässt sich nur mit grossen Verlusten aus dem Phenantren des Handels erhalten, da sowohl das rohe wie das als »purissimum« bezogene Präparat sehr bedeutende Mengen anderer Kohlenwasserstoffe enthalten, welche ebenfalls schwerlösliche Pikrate liefern. Am besten löst man das Phenantren mit etwa 70 % der berechneten Menge Pikrinsäure in wenig heissem Benzol auf. Beim Erkalten scheiden sich anscheinend benzolhaltige derbe Krystalle ab, die so lange aus Alkohol umkrystallisirt werden müssen, bis sie in rein gelben Nadeln ausfallen, die keinen Stich in's Rothe mehr zeigen und den constant bleibenden Schmelzpunkt 143—144° (uncorr.) aufweisen.

Die verwendete Pikrinsäure wurde aus chemisch reinem Phenol in bekannter Weise dargestellt. Der Schmelzpunkt lag bei 120—121° (uncorr.).

Das Phenantren wurde aus reinem Pikrat durch Zerlegen mit Natronlauge gewonnen; es schmolz bei 98.5—99.5°.

Die Löslichkeitsbestimmungen wurden in der Weise ausgeführt, dass die zu untersuchenden Substanzen in warmem absolutem Alkohol gelöst wurden, worauf die Lösungen in gut verschlossenen Kölbchen acht Tage oder länger in einem Raume von möglichst constanter Temperatur, durch gute Verpackung gegen etwaige zeitweise Temperaturschwankungen geschützt, aufbewahrt wurden.

Von den Lösungen wurden alsdann je etwa 15 ccm entnommen, in tarirte Kölbchen gebracht, gewogen, und der Alkohol im Luftstrome bei etwa 60° verdunstet. Im Rückstande wurde die Pikrinsäure durch Titration, das Phenantren aus der Differenz bestimmt.

Beim Abdunsten des Alkohols geht stets etwas Phenantren mit über; der abdestillirte Alkohol opalisirt deutlich auf Zusatz von Wasser. Der Verlust ist indessen nicht bestimmbar, wie folgende Versuche zeigen.

0.4307 g Phenantren wurden in 15 ccm Alkohol gelöst

und der Alkohol in der beschriebenen Weise entfernt. Der Rückstand wog 0.4307 g.

0.0857 g Phenantren, in 12 ccm Alkohol gelöst, hinterliessen nach Verdunsten des Alkohols 0.0860 g.

Zur Bestimmung der Pikrinsäure wurden die Verdunstungsrückstände in je 20—25 ccm Alkohol gelöst und unter Anwendung von Phenolphtaleïn mit etwa $^1/_{10}$ normaler Kalknatronlauge titrirt. Um genaue Resultate zu erhalten, ist es durchaus nöthig in der Kälte zu titriren und nur bis zur eben eintretenden Rothfärbung Alkali zuzusetzen, dessen Ueberschuss dann durch ein bis zwei Tropfen Salzsäure zurücktitrirt wird.

Setzt man einen grösseren Ueberschuss von Alkali hinzu, so verbraucht man schon in der Kälte, namentlich aber beim Erwärmen, zu viel Alkali und findet demgemäss zu viel Pikrinsäure, und zwar um so mehr, je mehr Phenantren die Lösung enthält. Die hierbei eintretenden chemischen Vorgänge denke ich noch eingehender zu untersuchen.

Versuchsreihe A.

In je 100 ccm absolutem Alkohol wurden gelöst:

I. 11 g Pikrinsäure
II. 4 g Phenantren
III. 4 g Phenantrenpikrat
IV. 4 g Phenantrenpikrat und 11 g Pikrinsäure
V. 4 g Phenantrenpikrat und 4 g Phenantren.

Nach 7 Tagen, während welcher Zeit die Temperatur des Aufbewahrungsortes sich bis auf wenige Zehntelgrade constant bei 14.8° erhalten hatte, wurden Proben der Lösungen untersucht.

Reihe A α.

Nr. I. Lösung 11.291 g
Rückstand 0.6685 g
100 Theile der Lösung enthalten 5.921 Th. Pikrinsäure.

Nr. II. Lösung 10.725
Rückstand 0.3223
100 Th. enthalten 3.005 Th. Phenantren.

Nr. III.	Lösung	10.120	
	Rückstand	0.1832	
	100 Th. enthalten	1.81	Th. Pikrat
	100 » »	1.02	Th. Pikrinsäure
	100 » »	0.79	Th. Phenantren.

Nr. IV.	Lösung	9.368	
	Rückstand	0.5850	
	Pikrinsäure	0.5684	
	Phenantren	0.0166	
	100 Th. enthalten	6.245	Th.
	100 » »	6.068	Pikrinsäure
	100 » »	0.177	Phenantren.

Nr. V.	Lösung	10.68	
	Rückstand	0.3750	
	Pikrinsäure	0.0488	
	Phenantren	0.3262	
	100 Th. enthalten	3.511	Th.
	100 » »	0.46	Pikrinsäure
	100 » »	3.05	Phenantren.

Nach 16 Tagen wurden wieder Proben derselben Lösungen analysirt. Temperatur war auf 14.3° gefallen.

Reihe A β.

Nr. I.	Lösung	11.28	
	Rückstand	0.6650	
	100 Th. enthalten	5.90	Th. Pikrinsäure.

Nr. II.	Lösung	11.14	
	Rückstand	0.3291	
	100 Th. enthalten	2.954	Th. Phenantren.

Nr. III.	Lösung	10.04	
	Rückstand	0.1791	
	100 Th. enthalten	1.784	Th. Pikrat
	100 » »	1.004	Th. Pikrinsäure
	100 » »	0.780	Th. Phenantren.

N. IVa.	Lösung	9.57	
	Rückstand	0.5860	
	Pikrinsäure	0.5676	
	Phenantren	0.0184	
	100 Th. enthalten	6.123	Th.
	100 » »	5.931	Th. Pikrinsäure
	100 » »	0.192	Th. Phenantren.
Nr. IVb.	Lösung	9.62	
	Rückstand	0.5898	
	Pikrinsäure	0.5728	
	Phenantren	0.0170	
	100 Th. enthalten	6.131	Th.
	100 » »	5.954	Th. Pikrinsäure
	100 » »	0.177	Th. Phenantren.
Nr. IVa und b Mittel.			
	100 Th. enthalten	6.13	Th.
	100 » »	5.95	Th. Pikrinsäure
	100 » »	0.18	Th. Phenantren.
Nr. Va.	Lösung	9.25	
	Rückstand	0.3160	
	Pikrinsäure	0.0372	
	Phenantren	0.2788	
	100 Th. enthalten	3.42	Th.
	100 » »	0.40	Th. Pikrinsäure
	100 » »	3.02	Th. Phenantren.
Nr. Vb.	Lösung	8.49	
	Rückstand	0.2893	
	Pikrinsäure	0.0353	
	Phenantren	0.2540	
	100 Th. enthalten	3.41	
	100 » »	0.42	Pikrinsäure
	100 » »	2.99	Phenantren.
Nr. Va und b Mittel.			
	100 Th. enthalten	3.42	Th.
	100 » »	0.41	Th. Pikrinsäure
	100 » »	3.00	Th. Phenantren.

Die Versuche der Reihe A können insofern auf grösste Genauigkeit keinen Anspruch machen, als bei denselben die Titration der Pikrinsäure nicht unter Einhaltung der oben angegebenen Vorsichtsmassregeln ausgeführt ist, deren Nothwendigkeit erst später festgestellt wurde. Die Bestimmung der Gesammtlöslichkeit wird dadurch natürlich nicht beeinflusst, wohl aber kann die Löslichkeit des Phenantrens und der Pikrinsäure um einige Einheiten in der zweiten Decimale fehlerhaft sein. Ich führe die Versuche nur deshalb mit an, weil sie zeigen, dass nach 7 Tagen keine wesentlichen Aenderungen in dem Zustande der Lösungen mehr stattfinden.

Da es sich hier darum handelt, die in gleichem Volumen befindlichen wirksamen Mengen der betreffenden Substanzen zu finden, so hätten eigentlich die in 100 Volumtheilen gelösten Mengen bestimmt werden müssen, während die angegebenen Zahlen sich auf 100 Gewichtstheile Lösung beziehen. Ich habe diese Umrechnung unterlassen, weil sie keinen nennenswerthen Einfluss auf das Resultat der Versuche ausübt. Für etwa wünschenswerthe Umrechnungen habe ich das specifische Gewicht der Lösungen A I bis A V bestimmt.

Lösung I.	0.8255	bei 14° gegen Wasser von 14°.
» II.	0.8054	
» III.	0.8024	
» IV.	0.8265	
» V.	0.8074	
Alkohol	0.7994	

Bei den Versuchen der Reihen B und C sind alle Vorsichtsmassregeln eingehalten. Die stets ausgeführten Controlversuche zeigen meist nur Abweichungen von einigen Einheiten in der dritten Decimale; nur ausnahmsweise gehen die Abweichungen über eine Einheit in der zweiten Decimale hinaus. Die Mittelwerthe dürften zum weitaus grössten Theile auf wenige Einheiten der dritten Decimale, in welcher die direct gewogenen oder titrirten Zehntelmilligramme zum Ausdruck kommen, genau sein.

Reihe B.

Gelöst wurden in je 62 ccm Alkohol:

I.	1.4 g Pikrat			
II.	1.4 g	»	und 0.1 g	Pikrinsäure
III.	1.4 g	»	» 0.2 g	»
IV.	1.4 g	»	» 1.0 g	»
V.	1.4 g	»	» 4.0 g	»
VI.	1.4 g	»	» 2.2 g	Phenantren.

Die Temperatur betrug bei Beginn des Versuches 15.5°, schwankte vom 5. bis zum 11. Tage zwischen 16.5 und 17.5° (in zwei Nächten war sie für kurze Zeit auf 15.5° gefallen) und war dann vom 11. bis zum 14. Tage constant 17.5°.

Die Proben für die Analyse wurden am 14. Tage entnommen.

Nr. I a.	Lösung	10.258
	Rückstand	0.1915
Nr. I b.	Lösung	10.5375
	Rückstand	0.1971

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	1.866	1.050	0.816
b.	1.870	1.052	0.818
Mittel	1.868	1.051	0.817

Nr. II a.	Lösung	10.102
	Rückstand	0.1930
	Pikrinsäure	0.1172
	Phenantren	0.0758
Nr. II b.	Lösung	10.517
	Rückstand	0.2008
	Pikrinsäure	0.1217
	Phenantren	0.0791

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	1.911	1.161	0.750
b.	1.909	1.157	0.752
Mittel	1.910	1.159	0.751

Nr. III a.	Lösung	10.636
	Rückstand	0.2088
	Pikrinsäure	0.1358
	Phenantren	0.0730
Nr. III b.	Lösung	9.929
	Rückstand	0.1958
	Pikrinsäure	0.1286
	Phenantren	0.0672

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	1.962	1.276	0.686
b.	1.972	1.295	0.677
Mittel	1.967	1.285	0.682

Nr. IV a.	Lösung	9.56
	Rückstand	0.2692
	Pikrinsäure	0.2325
	Phenantren	0.0367
Nr. IV b.	Lösung	9.45
	Rückstand	0.2666
	Pikrinsäure	0.2328
	Phenantren	0.0338

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	2.816	2.432	0.384
b.	2.821	2.463	0.358
Mittel	2.819	2.448	0.371

Nr. V.

	a.	b.
Lösung	9.708	10.216
Rückstand	0.6155	0.6488
Pikrikinsäure	0.5981	0.6273
Phenantren	0.0174	0.0215

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	6.339	6.160	0.179
b.	6.351	6.141	0.210
Mittel	6.345	6.150	0.195

Nr. VI.

	a.	b.
Lösung	10.96	10.59
Rückstand	0.4050	0.3920
Pikrinsäure	0.0461	0.0450
Phenantren	0.3589	0.3470

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	3.695	0.421	3.274
b.	3.702	0.425	3.277
Mittel	3.699	0.423	3.276

Reihe C.

Gelöst in je 62 ccm Alkohol.

I. 4 g Pikrinsäure
II. 2.1 g Phenantren
III. 1.4 g Pikrat
IV. 1.4 g » und 0.5 g Phenantren
V. 1.4 g » » 0.9 g »
VI. 0.8 g » » 2.1 g »
VII. 0.8 g » » 4 g Pikrinsäure.

Temperatur während der Versuchsdauer constant 12.3°. Am achten Tage Proben für die Analyse entnommen.

Nr. I.

	a.	b.
Lösung	11.56	11.61
Rückstand	0.6400	0.6412

100 Theile enthalten:

	Pikrinsäure
a.	5.537
b.	5.525
Mittel	5.531

Nr. II.

	a.	b.
Lösung	11.23	11.26
Rückstand	0.3020	0.3033

100 Theile enthalten:

	Phenantren
a.	2.689
b.	2.694
Mittel	2.692

Nr. III.

	a.	b.
Lösung	10.46	10.93
Rückstand	0.1695	0.1772

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	1.621	0.912	0.709
b.	1.621	0.912	0.709
Mittel	1.621	0.912	0.709

Nr. IV.

	a.	b.
Lösung	11.57	11.62
Rückstand	0.2249	0.2266
Pikrinsäure	0.0617	0.0622
Phenantren	0.1632	0.1644

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	1.944	0.533	1.411
b.	1.950	0.536	1.414
Mittel	1.947	0.534	1.413

Nr. V.

	a.	b.
Lösung	11.285	11.419
Rückstand	0.2874	0.2913
Pikrinsäure	0.0464	0.0464
Phenantren	0.2410	0.2449

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	2.548	0.411	2.137
b.	2.551	0.406	2.145
Mittel	2.550	0.409	2.141

Nr. VI.

	a.	b.
Lösung	11.44	11.24
Rückstand	0.3570	0.3513
Pikrinsäure	0.0403	0.0400
Phenantren	0.3167	0.3113

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	3.121	0.352	2.769
b.	3.126	0.356	2.770
Mittel	3.124	0.354	2.770

Nr. VII.		a.	b.
	Lösung	11.09	10.62
	Rückstand	0.6397	0.6117
	Pikrinsäure	0.6237	0.5975
	Phenantren	0.0160	0.0142

100 Theile enthalten:

	Summe	Pikrinsäure	Phenantren
a.	5.771	5.626	0.145
b.	5.759	5.625	0.134
Mittel	5.765	5.626	0.139

Unter der Voraussetzung, dass das Phenantrenpikrat in alkoholischer Lösung vollständig dissociirt ist, müsste nach der Dissociationsgleichung

$$\frac{c}{c_1} = \frac{u_1 u_2}{u} = \text{const.},$$

in welcher u die Menge des nichtdissociirten Pikrates, wenn dasselbe nur in festem Zustande vorhanden ist, ebenfalls constant wird, das Product der direct gefundenen Mengen Pikrinsäure (u_1) und Phenantren (u_2) für dieselbe Temperatur constant sein. Das ist aber nicht der Fall und zwar deshalb nicht, weil das Pikrat nur theilweise dissociirt ist, wie auch die weiter unten mitzutheilende Molekulargewichtsbestimmung nach der Beckmann'schen Siedemethode zeigt.

Zwar ist die Menge des nicht dissociirten Pikrates constant, weil die Lösungen so hergestellt sind, dass sie stets mit Pikrat gesättigt sind, aber die in ihnen vorhandenen Mengen Pikrinsäure und Phenantren stellen nicht die wirksamen Mengen u_1 und u_2 dar, sondern die Summen von u_1 und u_2 und den in Form des Pikrates vorhandenen Mengen dieser Körper. Diese letzteren Mengen kann man aber auf Grund einer bereits früher[1]) mitgetheilten Ueberlegung bestimmen.

Löst man in einer gesättigten Lösung von Pikrinsäure Phenantrenpikrat auf, so kann dieselbe weitere Mengen Pikrinsäure nur in Gestalt des nichtdissociirten Pikrates aufnehmen. Diese Menge findet man also, wenn man die in der gesättigten Pikrinsäurelösung befindliche Menge Pikrinsäure (Versuch C I) von derjenigen abzieht, welche in einer mit Pikrinsäure und Pikrat

1) Diese Berichte 1892. 11.

gesättigten vorhanden ist (Versuch C VII). Ganz analog findet man die entsprechende Menge Phenantren. Ist die Ueberlegung richtig, so müssen die gefundenen Mengen Pikrinsäure und Phenantren im Verhältnisse ihrer Molekulargewichte stehen.

Es enthalten nun die Lösungen:

C VII	5.626 Th. Pikrinsäure		C VI	2.770 Th. Phenantren
C I	5.531 »	»	C II	2.692 » »
Differenz	0.095 »	»		0.078 » »

Es sind also in 100 Theilen alkoholischer Lösung bei 12.3° 0.173 Theile nichtdissociirtes Pikrat enthalten, denen nach Verhältniss der Molekulargewichte 0.097 Th. Pikrinsäure und 0.076 Th. Phenantren entsprechen, während 0.095 und 0.078 Th. gefunden wurden.

Da nach Versuch C III in 100 Th. Lösung bei 12° 1.621 Th. Pikrat enthalten sind, so folgt daraus, dass bei dieser Temperatur das Pikrat in gesättigter alkoholischer Lösung zu fast 90 % dissociirt ist. Von diesen 1.621 Theilen bestehen 0.912 aus Pikrinsäure und 0.709 aus Phenantren. Zieht man davon die als nichtdissociirtes Pikrat vorhandenen Mengen ab, so erhält man für u_1 und u_2 0.815 und 0.633. Setzt man weiter die nunmehr bekannten Grössen für u, u_1, und u_2 in die Dissociationsgleichung ein, so erhält man das Verhältniss der Geschwindigkeitsconstanten $\frac{c}{c_1}$ bei 12°

$$\frac{c}{c_1} = \frac{0.815 \times 0.633}{0.173} = 2.983.$$

In der folgenden Tabelle sind die sämmtlichen Versuchsresultate zusammengestellt. Spalte 2 enthält die Temperaturen der Versuchsreihen, 3 die Gesammtmenge der in 100 Theilen der Lösungen enthaltenen Substanz, 4 die Menge der Pikrinsäure, 5 die des Phenantrens, 6 die des nicht dissociirten Pikrates, 7 und 8 die Mengen von u_1 und u_2, d. h. die Gesammtmengen der Pikrinsäure und des Phenantrens vermindert um die als nichtdissociirtes Pikrat vorhandenen Mengen dieser Körper. Die letzteren Mengen sind natürlich, da die Lösungen stets mit Pikrat gesättigt sind, für dieselbe Temperatur constant. Spalte 9 enthält das Product $u_1 \cdot u_2$.

Für die Versuchsreihe B, die bei 17.5° angestellt ist, konnte die Menge von u nicht direct bestimmt werden, da keine Lös-

lichkeitsbestimmungen von Pikrinsäure und Phenantren vorlagen, indessen lässt sich u berechnen unter der Voraussetzung, dass sich das Verhältniss von $c : c_1$ zwischen 12.3° und 17.5° nicht wesentlich ändert. Da u überhaupt klein ist, dürfte das so gewonnene Resultat hinreichend genau sein. Wir haben unter dieser Voraussetzung

1) $$\frac{c}{c_1} = \frac{u_1 u_2}{u} = 2.983.$$

Nach Versuch Bı enthalten bei 17.5° 100 Theile Lösung 1.868 Pikrat, wovon $(1.868 - u)$ Theile dissociirt sind. Die entsprechende Menge Pikrinsäure u_1 ist demnach $(1.868 - u)\frac{229}{407}$ und die des Phenantrens u_2 $(1.868 - u)\frac{178}{407}$.

Diese Werthe in Gleichung 1) eingesetzt, geben

$$\left(\frac{1.868 - u}{407}\right)^2 \frac{229 \cdot 178}{u} = 2.983,$$

woraus $u = 0.220$ entsprechend 0.124 Pikrinsäure und 0.096 Phenantren.

Für die Reihe A, welche, wie erwähnt, keine ganz genauen Resultate aufweist, ist für u ein mittlerer Werth 0.19 angenommen, entsprechend 0.11 Pikrinsäure und 0.08 Phenantren.

Aus der umstehenden Tabelle ersieht man, dass das Product $u_1 \cdot u_2$ ziemlich constant ist beim Vorhandensein eines Ueberschusses von Pikrinsäure (Bı bis Bv). Während die Menge der Pikrinsäure auf das 6fache wächst, findet zuerst ein leichtes Steigen des Productes von 0.668 bis 0.681, dann ein Abfall bis 0.597 statt[1]). Dagegen ruft die Vermehrung des Phenantrens auf etwa das 4fache (Cııı bis Cvı) ein Steigen des Productes von 0.516 auf 0.693 hervor. Da dieses Ansteigen entschieden ausserhalb der Fehlergrenzen liegt und ausserdem ganz regelmässig erfolgt, so liegt der Gedanke nahe, dass das Phenantren selbst in der Lösung nicht vollständig in Einzelmoleküle aufgelöst, sondern zum Teil in Gestalt grösserer Molekularcomplexe vorhanden ist. Als wirksame Menge des Phenantrens kann aber nur der in Einzelmoleküle zerlegte Antheil betrachtet werden. Diesen Antheil kann man aber unter gewissen Voraussetzungen

1) Zum grössten Theil erklärt sich dieser Abfall aus der Vernachlässigung der verschiedenen specifischen Gewichte der Lösungen.

Tabelle I.

Nr.	t	Summe	Pikrin-säure	Phenan-tren	u	u_1	u_2	$u_1 \cdot u_2$
Aα I	14.8°		5.92					
» II	»			3.01				
» III	»	1.81	1.02	0.79	0.19	0.91	0.71	0.65
» IV	»	6.25	6.07	0.18	0.19	5.96	0.10	0.60
» V	»	3.51	0.46	3.05	0.19	0.35	2.97	1.04
Aβ I	14.3°		5.90					
» II	»			2.95				
» III	»	1.78	1.00	0.78	0.19	0.89	0.70	0.62
» IV	»	6.13	5.94	0.18	0.19	5.83	0.10	0.58
» V	»	3.42	0.41	3.00	0.19	0.30	2.92	0.88
B I	17.5°	1.868	1.051	0.817	0.220	0.927	0.721	0.668
» II	»	1.910	1.159	0.751	0.220	1.035	0.655	0.678
» III	»	1.967	1.285	0.682	0.220	1.161	0.586	0.681
» IV	»	2.819	2.448	0.371	0.220	2.324	0.275	0.639
» V	»	6.345	6.150	0.195	0.220	6.026	0.099	0.597
» VI	»	3.699	0.423	3.276	0.220	0.299	3.180	0.951
C I	12.3°		5.531					
» II	»			2.692				
» III	»	1.621	0.912	0.709	0.173	0.815	0.633	0.516
» IV	»	1.947	0.534	1.413	0.173	0.437	1.337	0.584
» V	»	2.550	0.409	2.141	0.173	0.312	2.065	0.645
» VI	»	3.124	0.354	2.770	0.173	0.257	2.695	0.693
» VII	»	5.765	5.626	0.139	0.173	5.529	0.063	0.348

berechnen; wenn man nämlich annimmt, dass das Product der wirksamen Mengen des Phenantrens und der Pikrinsäure thatsächlich constant ist und dass bei einer Verdünnung, wie sie in der gesättigten Lösung des reinen Pikrates besteht, das Phenantren vollständig in Einzelmoleküle zerfallen ist. In diesem Falle stellt das bei Versuch CIII erhaltene Product 0.516 die gesuchte Constante für die Temperatur von 12.3° dar. Ganz genau trifft natürlich die letztere Voraussetzung nicht zu, da sich auch in der Lösung des reinen Pikrates jedenfalls noch grössere Molekular-

aggregate des Phenantrens vorfinden. Dass deren Menge aber sehr gering ist, geht schon aus der sehr annähernden Constanz der Werthe von $u_1 \cdot u_2$ in der Reihe B hervor.

Unter den gemachten Voraussetzungen erhält man die Menge des monomolekularen Phenantrens ξ für die Lösungen Civ bis Cvi, wenn man das constante Product $u_1 \cdot u_2$ (Ciii) $= 0.516$ durch u_1 dividirt. Die Differenz $u_2 - \xi = x$ giebt die Menge des polymolekularen Phenantrens. Man erhält so

	u_1	u_2	$\frac{0.516}{u_1} = \xi$	$u_2 - \xi = x$	$\xi^3 : x$
Civ	0.437	1.337	1.180	0.157	10.48
Cv	0.312	2.065	1.635	0.430	10.16
Cvi	0.257	2.695	2.007	0.688	11.76

Die Mengen des monomolekularen und des polymolekularen Phenantrens müssen nun aber auch wieder im Dissociationsgleichgewicht mit einander stehen. Für den Zerfall einer Verbindung in n gleiche Moleküle lautet die Dissociationsgleichung $\frac{c}{c_1} = \frac{\left(\frac{\xi}{n}\right)^n}{x} = \text{const.}$; wo x die Menge der zerfallenden Verbindung, ξ diejenige der Zerfallsproducte bedeutet. Es muss demnach $\frac{\xi^n}{x}$ bei derselben Temperatur constant sein. Aus der letzten Spalte der eben angeführten kleinen Tabelle ergiebt sich, dass die dritten Potenzen von ξ dividirt durch x einen constanten Werth besitzen. Man darf daraus wohl schliessen, dass die grösseren Aggregate des Phenantrens aus 3 Einzelmolekülen bestehen.

Mit Hülfe der so in erster Annäherung erhaltenen Constante $\xi^3 : x$ kann man nun rückwärts für die übrigen Versuche die Mengen des trimolekularen und des monomolekularen Phenantrens annähernd berechnen. Man hat nur die in der ersten Tabelle unter u_2 gegebenen Werthe nach dem Verhältniss $\xi^3 : x = 10.5$ zu theilen. In Tabelle II sind die Resultate dieser Annäherungsrechnung für eine Reihe von Versuchen zusammengestellt; für Reihe B unter der Voraussetzung, dass sich der Quotient $\xi^3 : x$ innerhalb des Temperaturintervalles von 12.3° bis 17.5° nicht wesentlich ändert. Es ist das wohl zulässig, da die durch diese letzte Correctur bedingte Aenderung der Werthe nur von sehr geringem Betrage ist.

Tabelle II.

Nr.	t	Pikrinsäure	Phenantren	Pikrat u	Pikrins. in Form des Pikrat.	Pikrins. dissociirt u_1	Phenantr. in Form des Pikrates	x Phenantr. polymolekular	ξ Phenantr. monomolekular	$u_1 \cdot \xi$	$\xi^3 : x$
C VI	12.3°	0.354	2.770	0.173	0.097	0.257	0.076	0.688	2.007	0.516	11.32
C V	»	0.409	2.141	0.173	0.097	0.342	0.076	0.430	1.635	0.516	10.70
C IV	»	0.534	1.413	0.173	0.097	0.437	0.076	0.157	1.180	0.516	10.41
C III	»	0.912	0.709	0.173	0.097	0.815	0.076	0.022	0.641	0.498	10.40
B I	17.5°	1.051	0.847	0.220	0.124	0.927	0.096	0.032	0.689	0.639	10.26
B II	»	1.159	0.751	0.220	0.124	1.035	0.096	0.024	0.631	0.653	10.47
B III	»	1.285	0.682	0.220	0.124	1.161	0.096	0.018	0.568	0.660	10.47
B IV	»	2.448	0.371	0.220	0.124	2.324	0.096	0.002	0.273	0.634	10.47
B V	»	6.150	0.195	0.220	0.124	6.026	0.096	0.001	0.098	0.591	9.35

Die Tabelle II giebt somit einen wohl ziemlich genau zutreffenden Ueberblick über den Gleichgewichtszustand der alkoholischen Lösungen, welche Pikrinsäure und Phenantren in den verschiedensten Mengenverhältnissen neben einander enthalten, von der mit Phenantren gesättigten einerseits bis zu der mit Pikrinsäure gesättigten andererseits. Abgesehen ist dabei von dem Vorhandensein grösserer Molekularcomplexe der Pikrinsäure. Dass solche sich in der That, wenn auch nur in geringer Menge, vorfinden, wird durch die nicht ganz vollständige Constanz der Werthe $u_1 \cdot \xi$, wie auch durch die weiter unten mitzutheilende Molekulargewichtsbestimmung der Pikrinsäure höchst wahrscheinlich gemacht.

Für das Verhältniss der Geschwindigkeitsconstanten

für Phenantrenpikrat $\frac{c}{c_1} = \frac{u_1 \xi}{u}$ ergiebt sich jetzt aus C III für 12.3° die Zahl 2.879, während oben, wo die Anwesenheit trimolekularen Phenantrens vernachlässigt war, 2.983 gefunden wurde. Der wahre Werth liegt zwischen diesen beiden. Für 17.5° kann $\frac{c}{c_1}$ aus den Versuchen natürlich nicht abgeleitet werden, da für diese Temperatur u aus dem Werthe von $\frac{c}{c_1}$ bei 12° berechnet ist unter der Voraussetzung, dass sich $\frac{c}{c_1}$ innerhalb des fraglichen Temperaturintervalles nicht ändert.

Das Verhältniss der Geschwindigkeitsconstanten für trimolekulares Phenantren $\frac{c}{c_1} = \frac{\xi^3}{27x}$ ergiebt sich aus C III bis C VI im Mittel = 0.40.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle mit einigen Worten auf die Farbe der Pikratlösungen zurückzukommen. Anschütz[1] hat gelegentlich darauf hingewiesen, dass die Lösung das Naphtalinpikrates in Benzol und Eisessig viel intensiver goldgelb gefärbt ist als die der äquimolekularen Menge Pikrinsäure, trotzdem die Molekulargewichtsbestimmung die Dissociation des Pikrates erweist. Nach den oben mitgetheilten Versuchen dürfte sich diese Thatsache dadurch erklären, dass die Eisessig- oder Benzollösung des Naphtalinpikrates neben den dissociirten Antheilen noch geringe Mengen unverändertes Pikrat enthält, wenn auch in so geringer Menge, dass es durch die Molekulargewichtsbestimmung nicht sicher nachgewiesen werden kann.

Das Phenantrenpikrat verhält sich ganz analog. Löst man äquimolekulare Mengen Pikrat einerseits und Pikrinsäure andererseits in wenig Eisessig, so erscheint die Pikrinsäurelösung ganz licht schwefelgelb, die Pikratlösung dagegen intensiv goldgelb. Verdünnt man nun beide Lösungen mit Eisessig, so verschwindet der Unterschied der Färbung fast ganz, da jedenfalls die Dissociation des Pikrates jetzt weit vollständiger wird. Fügt man nun zu der ganz licht gefärbten Pikratlösung Phenantren, so nimmt dieselbe wieder eine goldgelbe Färbung an, indem durch das Phenantren die Dissociation des Pikrates wieder rück-

1) Annalen d. Chemie 253. 347.

gängig gemacht wird. Ganz dasselbe kann man an den alkoholischen Lösungen beobachten, nur tritt der Unterschied der Färbungen hier viel weniger deutlich hervor, da man einmal wegen der geringen Löslichkeit des Pikrates von vornherein mit verdünnten Lösungen arbeiten muss und andererseits alkoholische Pikrinsäurelösungen selbst ziemlich intensiv gefärbt sind.

Aus den beschriebenen Löslichkeitsversuchen liess sich schliessen, dass die Pikrinsäure in nicht zu concentrirter alkoholischer Lösung so gut wie vollständig in Einzelmoleküle zerfällt, während das Phenantren selbst in ziemlich verdünnter Lösung zum Teil aus trimolekularen Aggregaten besteht. Danach liess sich mit grosser Wahrscheinlichkeit erwarten, dass auch die Molekulargewichtsbestimmung durch Siedepunktserhöhung des Alkohols für die Pikrinsäure nahezu normale Werthe liefern würde, für das Phenantren dagegen zu hohe und mit der Concentration stark ansteigende. Der Versuch hat diese Erwartung vollauf bestätigt.

Pikrinsäure in Alkohol. Constante 11.5

g Alkohol	g Subst.	g Subst. auf 100 Alkohol	E	M.G.	M.G. berech.
11.61	0.2751	2.369	0.122	223	229
»	0.6598	5.682	0.285	229	
»	1.0215	8.796	0.429	236	
»	1.3834	11.910	0.566	242	

Selbst bei 12procentiger Lösung beträgt die Abweichung vom berechneten Molekulargewicht nur 5.7 %.

Phenantren. M.G. berechnet 178.

	g Alkohol	g. Subst.	g Sbst. auf 100 Alkohol	E	M.G.
1)	12.72	0.2471	1.943	0.122	183
2)	»	0.4813	3.784	0.227	192
3)	»	0.7205	5.663	0.329	198
4)	»	0.9608	7.554	0.418	206
5)	»	1.2007	9.441	0.507	214
6)	»	1.5263	11.990	0.610	226

Die Abweichung vom berechneten Molekulargewicht beträgt bei 12procentiger Lösung 27 %. Aber nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ stimmt das Resultat der Molekulargewichtsbestimmung mit dem der Löslichkeitsbestimmungen überein.

Aus dem gefundenen Molekulargewicht eines Körpers kann man nämlich die Mengen des Körpers berechnen, welche in Gestalt von Einzelmolekülen und von Molekularaggregaten vorhanden sind, wenn man die Zahl der Einzelmoleküle kennt, aus der die Aggregate bestehen. Bezeichnet man mit a die Menge der in der Volumeinheit vorhandenen Substanz, mit ξ die Menge der in Einzelmoleküle dissociirten, mit m das Molekulargewicht des Einzelmoleküls, mit μ das gefundene Molekulargewicht und mit n die einen Molekularcomplex bildende Zahl der Einzelmoleküle, so hat man

$$\frac{\xi}{m} + \frac{a - \xi}{n \cdot m} = \frac{a}{\mu}; \text{ woraus } \xi = \frac{\frac{a \cdot n \cdot m}{\mu} - a}{n - 1}.$$

Die Menge der polymolekularen Substanz x ist $= a - \xi$.

Unter der Annahme, dass das Phenantren nur trimolekulare Aggregate bildet, ergeben sich aus der mitgetheilten Molekulargewichtsbestimmung folgende Zahlen. Die Concentrationen sind auf 100 Gewichtstheile Lösung (richtiger wäre auch hier Volumtheile) umgerechnet.

	g Subst. auf 100 Lös.	M.G.	x	ξ	$\xi^3 : x$
1)	1.81	183	0.07	1.74	75
2)	3.64	192	0.39	3.25	88
3)	5.43	198	0.82	4.61	120
4)	7.03	206	1.43	5.60	123
5)	8.63	214	2.13	6.50	129
6)	10.71	226	3.42	7.29	113

Die Werthe von $\xi^3 : x$ sind auch hier innerhalb ziemlich weiter Concentrationsgrenzen annähernd constant. Bei grösserer Verdünnung fallen die Werthe, was vielleicht andeutet, dass auch bimolekulare Aggregate existenzfähig sind, aber ebensowohl seinen Grund in Fehlerquellen der Methode der Molekulargewichtsbestimmung haben kann.

Die Molekulargewichtsbestimmung des Phenantrenpikrates ergab folgende Zahlen. Die Nummern 1, 3, 5, 7, 8 einerseits und 2, 4, 6, 9, 10 andererseits rühren von getrennten Bestimmungen her. Man ersieht daraus, wie genau die Resultate der Beckmann'schen Methode sind.

	Alkohol	g Subst.	g Subst. auf 100 Alkohol	E	M.G.	M.G. ber.
1)	12.25	0.2010	1.641	0.086	219.5	407 bez. 203.5
2)	12.45	0.2127	1.708	0.090	218.3	
3)	12.25	0.4056	3.311	0.175	218	
4)	12.45	0.5193	4.173	0.216	222	
5)	12.25	0.6356	5.189	0.263	227	
6)	12.45	0.8095	6.504	0.315	237	
7)	12.25	0.8404	6.861	0.330	239	
8)	12.25	1.0536	8.602	0.396	250	
9)	12.45	1.0981	8.822	0.406	250	
10)	12.45	1.3411	10.770	0.477	260	

Das gefundene Molekulargewicht liegt entsprechend der nicht vollständigen Dissociation oberhalb des mittleren der Bestandtheile und wächst stark mit der Concentration. Auch hier lässt sich aus dem gefundenen Molekulargewicht die Menge des nichtdissociirten Pikrates und die Menge der dissociirten Bestandtheile berechnen. Die wirksame Menge des Pikrates ist in der folgenden Zusammenstellung mit u, die der Pikrinsäure mit u_1, die des Phenantrens mit u_2 bezeichnet.

	g Sbst. auf 100 Lösung	M.G.	u	u_1	u_2	$\frac{u_1 \cdot u_2}{u}$
1)	1.62	219.5	0.24	0.78	0.60	1.94
2)	1.68	218.3	0.22	0.82	0.64	2.39
3)	3.21	218	0.43	1.56	1.22	4.44
4)	4.01	222	0.67	1.88	1.46	4.10
5)	4.93	227	1.01	2.21	1.71	3.74
6)	6.13	237	1.77	2.45	1.91	2.64
7)	6.47	239	2.02	2.50	1.95	2.42
8)	7.92	250	2.95	2.80	2.17	2.06
9)	8.10	250	3.02	2.86	2.22	2.10
10)	9.79	260	4.25	3.12	2.42	1.77

Die Abweichungen der Werthe der letzten Spalte von einander rühren zum Theil jedenfalls von der Anwesenheit des trimolekularen Phenantrens her; möglicherweise auch daher, dass das Pikrat selbst wieder polymolekulare Aggregate vielleicht verschiedener Art bildet. Bemerkenswerth ist jedenfalls das starke Anwachsen der Werthe in der 3- bis 5procentigen Lösung, während oberhalb und unterhalb dieser Concentrationen

annähernd die gleichen Zahlen erhalten werden. Das anfängliche Abnehmen und spätere Zunehmen der gefundenen Werthe des Molekulargewichtes erinnert an ähnliche Anomalien, welche Pickering bei den Molekulargewichtsbestimmungen durch Gefrierpunktserniedrigung gefunden hat.

Im Anschluss an diese Rechnungen habe ich noch eine Reihe der von Beckmann (Zeitschrift f. physikal. Chem. VI. 437) ausgeführten Molekulargewichtsbestimmungen berechnet. Von den auf die Siedepunktserhöhung des Alkohols untersuchten Verbindungen sind alle berechnet worden, bei welchen sich stark von den berechneten abweichende Molekulargewichte ergeben haben. Von diesen zeigen ziemlich constante Werthe für $\xi^2 : x$ Naphtalin, Phenylbenzoat, Acetanilid, Borneol und Acetophenonoxim. Für das Benzil steigen die Werthe $\xi^3 : x$ mit der Concentration an, während die für $\xi^2 : x$ berechneten abnehmen; möglicherweise treten verschiedenartige Molekularaggregate neben einander auf. Beim Aethylbenzoat nehmen die für $\xi^2 : x$ berechneten Werthe mit der Concentration stark zu, während sie beim Phenylbenzoat recht constant erscheinen. Durch die Annahme grösserer Molekularaggregate lässt sich die Zunahme beim Aethylbenzoat nicht erklären.

Einige Berechnungen für von Beckmann in anderen Lösungsmitteln untersuchte Körper haben weniger einfache Resultate ergeben. Ich brauche wohl kaum darauf aufmerksam zu machen, dass die anscheinenden Gesetzmässigkeiten, welche bei diesen Berechnungen zu Tage treten, mit aller Vorsicht aufzunehmen sind. Im günstigen Falle gelten sie nur in erster Annäherung, indessen dürften sie doch zu einer eingehenderen Untersuchung anregen, zumal wir in der von Beckmann ausgearbeiteten Methode der Molekulargewichtsbestimmung durch Siedepunktserhöhung ein weit genaueres Hülfsmittel für eine solche Untersuchung besitzen, als man wohl allgemein anzunehmen geneigt ist.

Naphtalin in Alkohol. M.G. berechnet 128.

g Subst. in 100 Lösung	M. G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
2.32	148	0.63	1.69	4.53
3.98	155	1.39	2.59	4.76

Phenylbenzoat in Alkohol. M.G. ber. 198.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
3.37	215	0.52	2.75	14.5
6.09	222	1.32	4.77	17.2
8.61	233	2.59	6.02	14.0

Acetanilid in Alkohol. M.G. ber. 135.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
2.89	142	0.29	2.60	23.3
5.65	147	0.92	4.73	24.3
8.19	151	1.74	6.45	24.9
11.90	159	3.60	8.30	19.1

Acetophenonoxim in Alkohol. M.G. ber. 135.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
6.25	143	0.70	5.55	40.0
8.96	151	1.89	7.07	26.4
11.48	154	2.83	8.65	26.4

Borneol in Alkohol. M.G. ber. 154.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
3.24	161	0.28	2.96	3.13
5.52	164	0.67	4.85	3.51
8.66	171	1.73	6.93	2.78
13.09	179	3.65	9.44	2.44

Benzil in Alkohol. M.G. ber. 210.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$	x	ξ	$\xi^3 : x$
2.89	232	0.55	2.34	9.95	0.41	2.48	37.2
5.17	244	1.44	3.73	9.66	1.08	4.09	63.3
7.63	258	2.84	4.79	8.08	2.13	5.50	78.1
10.7	279	5.29	5.41	5.53	3.97	6.73	77.8
		M.G. x = 2 M.G. ξ			M.G. x = 3 M.G. ξ		

Aethylbenzoat in Alkohol.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
1.96	170	0.46	1.50	4.9
5.54	183	2.00	3.54	6.3
9.82	190	4.13	5.69	7.8
16.64	204	6.08	10.56	18.3

Naphtalin in Aethylacetat. M.G. ber. 128.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$
0.70	133	0.06	0.64	6.83
1.81	130	0.06	1.75	51.01
4.27	140	0.74	3.53	16.85
8.79	148	2.37	6.42	17.39
15.25	150	4.48	10.77	24.04

Naphtalin in Aether. M.G. ber. 128.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$	x	ξ	$\xi^3 : x$
6.62	132	0.41	6.21	94.06	0.30	6.32	841
12.46	143	2.62	9.84	36.96	1.96	10.50	590
19.73	152	6.22	13.51	29.34	4.67	15.06	731
		M.G. x = 2 M.G. ξ			M.G. x = 3 M.G. ξ		

Naphtalin in Aceton. M.G. ber. 128.

g Subst. in 100 Lösung	M.G.	x	ξ	$\xi^2 : x$	x	ξ	$\xi^3 : x$
5.60	134	0.50	5.10	52.0	0.38	5.22	374
11.23	145	2.64	8.59	28.0	1.98	9.25	400
18.74	155	6.53	12.21	22.8	4.90	13.84	541
		M.G. x = 2 M.G. ξ			M.G. x = 3 M.G. ξ		

Leipzig, I. chemisches Laboratorium der Universität.

INHALT.

Seite

E. Drechsel, Ueber die Spaltungsproducte des Caseïns . . . 115

E. Study, Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen. Vorgelegt von Herrn F. Engel 122

G. Scheffers, Verzerrung bei perspectiver Abbildung ebener Figuren. Mit 5 Figuren. Vorgelegt von Herrn A. Mayer 162

F. Schur, Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Vorgelegt von Herrn A. Mayer 177

C. Neumann, Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes. 184

Robert Behrend, Ueber die Löslichkeit von Doppelverbindungen. II. 188

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
DEC 23 1892
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

III.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1892.

HARVARD COLLEGE
DEC 23 1892
LIBRARY.

SITZUNG VOM 13. JUNI 1892.

W. Ostwald, *Studien zur Energetik*[1]). II. *Grundlinien der allgemeinen Energetik.*

1. Der erste Hauptsatz.

Die Begriffe, welche allein auf sämmtliche Gebiete der messenden Wissenschaften Anwendung finden, sind Raum, Zeit und Energie. Diese Bedeutung der beiden ersten ist seit Kant ausser Zweifel; dass die Energie ein Recht darauf besitzt, neben ihnen genannt zu werden, folgt daraus, dass sie vermöge des Gesetzes ihrer Umwandlung und quantitativen Erhaltung eine messbare Beziehung zwischen sämmtlichen Gebieten der natürlichen Erscheinungen ermöglicht; ihr ausschliessliches Recht, neben Raum und Zeit genannt zu werden, liegt darin begründet, dass ausser der Energie kein weiterer Allgemeinbegriff bekannt ist, welcher auf alle Gebiete Anwendung findet.

Während wir die Zeit als unbedingt fliessend, den Raum als unbedingt ruhend anschauen, finden wir die Energie in beiden Zuständen erscheinen; alles Geschehen ist in letzter Instanz nichts als eine Veränderung der Energie.

Die Energie kann an einem Orte kleiner werden und verschwinden, an einem anderen Orte wachsen. Erfahrungsgemäss ist die Verminderung der Energie an einem Orte stets mit einer numerisch gleichen Vermehrung an einem anderen Orte verbunden; den Ausdruck dieser Erfahrung bildet der *erste Hauptsatz der Energetik*, welcher vor nunmehr 50 Jahren von J. R. Mayer entdeckt worden ist, und lautet: *die Gesammtmenge der Energie ist constant.* Wenn an einem Orte Energie verschwindet, so muss zwar welche an einem anderen Orte erscheinen; es ist aber nicht nothwendig, dass dies in gleicher

1) Vgl. diese Berichte, 1891, S. 271.

Gestalt geschieht. Man drückt die Thatsache, dass eine andere Art Energie für die verschwundene erscheint, durch das Wort *Umwandlung* aus. Das fragliche Gesetz lautet dann folgendermassen: Wandelt sich eine bestimmte Menge der Energie A in eine andere Form B, und diese in die Form C um, so wird die gleiche Menge von C erhalten, als wenn A sich unmittelbar in C verwandelt hätte. Nennt man die bei der Umwandlung entstehenden Energiemengen äquivalent, so lässt sich der erste Hauptsatz aussprechen: *Zwei Energiemengen, welche einzeln einer dritten äquivalent sind, sind auch einander äquivalent.*

Wenn endlich eine Vorrichtung, in welcher durch irgend welche Vorgänge beständig Arbeit oder allgemein Energie ohne entsprechenden Verbrauch anderer Energie erzeugt werden könnte, ein *perpetuum mobile erster Art*[1]) genannt wird, lässt sich die erfahrungsmässige Grundlage des ersten Hauptsatzes kurz folgendermassen aussprechen:

Ein perpetuum mobile erster Art ist unmöglich.

Der analytische Ausdruck dieser Beziehungen ist ein sehr einfacher. Ist a die (in eigenem Maass gemessene) Menge der Energie A, welche verschwindet, und b die (wiederum in eigenem Maass gemessene) Menge der Energie B, welche entsteht, so gilt zunächst

$$a = f(A, B) b$$

welche Gleichung ausdrückt, dass beide Grössen a und b einander proportional sind. Der Factor $f(A, B)$ hängt von der Beschaffenheit der beiden Energieen A und B ab, und zwar ist er aus jedem Umwandlungsversuch zu bestimmen, bei welchem die Mengen a und b gemessen werden, indem

$$f(A, B) = \frac{a}{b}$$

ist.

Bestimmt man ebenso den Umwandlungsfactor $f(B, C)$ für die Energieen B und C, so folgt in gleicher Weise

$$f(B, C) = \frac{b}{c}.$$

Durch Multiplication folgt

1) Das Schema eines perpetuum mobile zweiter Art wird weiter unten dargelegt werden.

$$f(A, B) \cdot f(B, C) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}.$$

Nun ist definitionsgemäss $\frac{a}{c} = f(A, C)$ und wir haben

$$f(A, B) \cdot f(B, C) = f(A, C).$$

Dies ist der Ausdruck für die zweite Form des ersten Hauptsatzes.

Es ist offenbar am einfachsten, die willkürlichen Einheiten der Energie in ihren verschiedenen Formen so zu wählen, dass alle Factoren $f(A, B)$ u. s. w. gleich Eins werden; für die folgenden Erörterungen soll angenommen werden, dass dies geschehen ist. Als Bezugseinheit dient die der Bewegungsenergie. Dieselbe entspricht der Formel $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, die Einheit der Energie ist also gleich der doppelten Menge der in einem Gramm Masse, welche sich mit der Geschwindigkeit von 1 cm in der Secunde bewegt, enthaltenen Energie.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Umwandlung einer Energie gleichzeitig in mehrere andere stattfinden kann. Nennt man a die ursprüngliche, b', b'', b''' ... die umgewandelten Energiemengen, so kann man a in Summanden a_1, a_2, a_3 ... zerlegen, welche den Bedingungen entsprechen

$$a_1 = b',$$
$$a_2 = b'', \text{ etc.}$$

(wobei die eben gemachten Feststellungen bezüglich der Umwandlungsfactoren angenommen sind), und wir haben die Summe

$$a = b' + b'' + b''' + \cdots$$

Auf gleiche Weise können verschiedene Energiearten A sich in eine gleiche B, oder im allgemeinsten Falle verschiedene Arten A in verschiedene B verwandeln; die Gleichung lautet dann

$$\Sigma a = \Sigma b,$$

oder

$$\Sigma b - \Sigma a = 0.$$

Hierbei ist alle Energie als wesentlich positiv gerechnet; das positive Zeichen bezieht sich auf entstandene, das negative auf verschwundene Energiemengen.

2. Der zweite Hauptsatz.

Der erste Hauptsatz der Energetik bezweckt den Ausdruck der Thatsache, dass die Energie eine selbständige, in allen ihren Erscheinungsformen gleichartige Grösse ist, deren Gesammt-

betrag sich als unveränderlich erweist, und deren verschiedenartige Beschaffenheit sich daher am anschaulichsten unter der Ausdrucksform einer *wechselseitigen Umwandlung* der verschiedenen Arten der Energie darstellen lässt. Es entsteht nun, nachdem diese Umwandlungen in Bezug auf ihre Bilanz durch den ersten Hauptsatz geregelt sind, die Frage nach den Ursachen, welche das Eintreten solcher Umwandlung veranlassen oder verhindern. Die Beantwortung dieser Frage ist der Inhalt des *zweiten Hauptsatzes der Energetik.*

Wenn wir zunächst unsere Betrachtungen auf den einfachsten Fall beschränken, dass nur eine Art Energie vorhanden ist, so wird die einfachste Umwandlung, die möglich ist, darin bestehen, dass an einem Orte ein gewisser Betrag verschwindet, wobei dem ersten Haupsatze gemäss an einem anderen Orte der gleiche Betrag erscheinen muss. Die Erfahrung lehrt, dass in gewissen Fällen solche Uebergänge der Energie eintreten, in anderen nicht. Um diese Verhältnisse auszudrücken, werden wir der Energie eine bestimmte Eigenschaft zuschreiben, die wir, ohne weitere Voraussetzungen zu machen, ihre *Intensität* nennen wollen. Die Intensität der Energie soll in dem Falle als gleich angesehen werden, wenn kein Uebergang erfolgt; findet ein solcher statt, so soll der Energie in dem Gebiete, in welchem sie sich vermindert, eine höhere, in dem Gebiete, in welchem sie sich vermehrt, eine niedere Intensität zugeschrieben werden.

Wenn zwischen zwei Gebieten A und B kein Uebergang der Energie stattfindet, so soll dieser Zustand als der des *Gleichgewichts der Energie* bezeichnet werden.

Als allgemeinster Erfahrungssatz bezüglich der Uebergänge der Energie kann nun der folgende ausgesprochen werden:

Zwei Gebilde, die einzeln mit einem dritten im Energiegleichgewicht sind, sind auch unter einander im Gleichgewicht.

Ein anderer Ausdruck dieses Erfahrungssatzes ergiebt sich, wenn wir den oben definirten Begriff der Intensität benutzen; er lautet:

Zwei Intensitäten, die einzeln einer dritten gleich sind, sind unter einander gleich.

Die sehr ausgedehnte Erfahrung, auf welche dieser Satz begründet ist, tritt am deutlichsten ins Bewusstsein, wenn man den Satz als ungültig annimmt. Um eine Anschauung zu haben, betrachten wir die Energieform der Wärme. Wir bringen den

Körper *A* mit einem Körper *C* in Berührung, und ebenso einen anderen Körper *B* mit *C*, bis die Wärme zwischen *A* und *C*, sowie zwischen *B* und *C* nicht mehr übergeht. Wären alsdann *A* und *B* nicht im Gleichgewicht, so würde, wenn wir nunmehr *A* und *B* in Berührung bringen, ein Wärmeübergang erfolgen; wir nehmen an, dass *A* Wärme dabei verliert, welche nach *B* übergeht. Dadurch würde aber alsbald das Gleichgewicht zwischen *A* und *C*, sowie zwischen *B* und *C* gestört werden, Wärme würde von *C* nach *A* gehen, um den Verlust zu ersetzen, und von *B* würde der Ueberschuss nach *C* abfliessen. Dadurch ist wiederum das Gleichgewicht zwischen *A* und *B* gestört, und der Vorgang müsste sich bis ins Unbegrenzte wiederholen.

Nennen wir eine derartige Anordnung, bei welcher sich die Energie ohne äusseren Anlass in Bewegung setzt und darin erhält (während ihre Menge constant bleibt) ein *perpetuum mobile zweiter Art*, so können wir den fraglichen Erfahrungssatz auch folgendergestalt aussprechen:

Ein perpetuum mobile zweiter Art ist unmöglich.

Diese nur in der Form verschiedenen Sätze sind der Ausdruck des *zweiten Hauptsatzes der Energetik.* Beide Sätze sind als die zur Zeit allgemeinsten empirischen Naturgesetze anzusehen, welche sämmtliche Erscheinungen der natürlichen Welt regeln.

Der zweite Hauptsatz ist zunächst nur für den Uebergang einer Art Energie von einem Orte zum anderen ausgesprochen worden. Er gilt in angemessen veränderter Gestalt auch für die Umwandlung der verschiedenen Energiearten in einander, doch setzt sein Ausspruch für allgemeinere Bedingungen einige Untersuchungen und Begriffsbestimmungen voraus, zu denen wir jetzt übergehen wollen.

3. Die Factoren der Energie.

Die Intensität der Energie ist als eine Grösse definirt worden, welche in einem Raume abnimmt, welcher Energie verliert, und zunimmt, wo sich die Energie vermehrt. Durch die Thatsache des Energieüberganges lässt sich eine *Stufenleiter der Intensität* bestimmen, indem wir höhere, niedere und gleiche Werthe erkennen und unterscheiden können. Der Satz, dass zwei Intensitäten, die einer dritten gleich sind, es auch unter einander

sind, bedingt, dass diese Stufenleiter für eine gegebene Art der Energie eine *allgemeingültige* ist. Die Abstände dieser Stufen sind zunächst willkürlich; sie sollen so bestimmt werden, *dass gleichen Zu- oder Abnahmen der Energie in einem gegebenen Gebilde gleiche Zu- oder Abnahmen der Intensität entsprechen.* Unter dieser Voraussetzung kann man die in einem gegebenen Gebilde vorhandene Energie ihrerseits als proportional ihrer Intensität ansetzen. Nennen wir die Energie E, ihre Intensität i, so schreiben wir definitionsgemäss

$$E = c\,i,$$

wo c der Proportionalitätsfactor ist und die Zählung der Intensitäten bei $E = 0$ beginnt.

Die Grösse c misst die Energiemenge, welche bei gegebener Intensität i in einem Gebilde vorhanden ist. Sie kann daher passend als der *Capacitätsfactor* der Energie oder die *Capacität* des Gebildes für Energie bezeichnet werden.

Da die eben durchgeführte Entwicklung sich nur auf die in den beiden Hauptsätzen fixirten allgemeinen Eigenschaften der Energie stützt, so kann man als die Zerlegbarkeit in einen Intensitäts- und einen Capacitätsfactor gleichfalls als eine allgemeine Eigenschaft der Energie ansehen, welche bei der Untersuchung jeder Art Energie vorausgesetzt werden darf.

Der Erfahrung sind die absoluten Beträge der Energie eines gegebenen Gebildes im Allgemeinen nicht zugänglich. Die experimentelle Feststellung der Zahlenwerthe in der Gleichung $E = c\,i$ ist somit nicht ausführbar. Wohl aber dürfen die *Aenderungen* der Energie als messbar vorausgesetzt werden. Aus

$$E = c\,i$$

folgt

$$dE = c\,di + i\,dc.$$

Wird die Gleichung zerlegt in

$$dE = c\,di \quad (c \text{ constant}), \qquad \text{(a)}$$

$$dE = i\,dc \quad (i \text{ constant}), \qquad \text{(b)}$$

so wird die Möglichkeit ersichtlich, durch gleichzeitige Messung der Aenderungen dE und di, resp. dc auch die absoluten Werthe von c und i zu ermitteln. In dem Falle, dass beide Gleichungen (a) und (b) experimentell herstellbar sind, lässt sich c und i ermitteln, und somit auch ihr Product, der Gesammtbetrag der fraglichen Energie. Doch sind die Fälle häufig, in welchen

die in der einen oder der anderen Gleichung angenommenen Aenderungen nicht möglich sind; dann muss man auf die Bestimmung des entsprechenden Factors verzichten.

4. Die Arten der Energie.

Nicht zu dem Zwecke, eine vollständige Zusammenstellung aller Energiearten zu geben, sondern nur zu dem praktischen Behufe, für die nachfolgenden Erörterungen anschauliches Material zu liefern, ist die nachstehende vorläufige Tabelle der Energieformen hier mitgetheilt. Eine systematische Tabelle lässt sich nämlich erst entwerfen, nachdem die auffälligen und charakteristischen Verschiedenheiten der Energiearten und ihrer Factoren an der Hand der später darzulegenden allgemeinen Beziehungen der Energiefactoren untersucht und festgestellt worden sind, wobei sich denn auch die weitere Aussicht ergiebt, aus dem Vorkommen etwaiger Lücken in einer derartigen systematischen Tabelle auf die Möglichkeit und Beschaffenheit zur Zeit noch unbekannter Energieformen Schlüsse zu ziehen.

Von den sämmtlichen Energiearten lassen sich zunächst die *mechanischen* aussondern, zu deren Bestimmung ausser der Einheit der Energie selbst nur noch die Einheiten des Raumes (der Länge) und der Zeit erforderlich sind. Und zwar bilden sie die beiden Gruppen der *kinetischen* oder *Bewegungsenergie* und der *Raumenergie*, welche in die drei Unterabtheilungen der *Distanz-*, *Flächen-* und *Volum-Energie* zerfällt. Die mechanischen Energieen und ihre Factoren sind daher:

Energie	Capacität	Intensität
A. Bewegungsenergie	Masse	Geschwindigkeitsquadrat
	Bewegungsgrösse	Geschwindigkeit
B. Raumenergie		
a. Distanzenergie	Strecke	Kraft
b. Flächenenergie	Fläche	Flächenspannung
c. Volumenergie	Volum	Druck

Die Bewegungsenergie $m\frac{v^2}{2}$ lässt sich auf zwei Arten in Factoren zerlegen. Die wichtigste Zerlegung ist Masse und (halbes) Geschwindigkeitsquadrat, eine secundäre in Bewegungs-

grösse $m v$ und Geschwindigkeit $\frac{1}{2} v$, die unter bestimmten Umständen anwendbar ist, aber unter dem Nachtheile steht, dass beide Factoren von einander nicht unabhängig sind.

Die Raumenergie muss, wie geschehen, in drei Unterabtheilungen geschieden werden. Es ist eines der folgenreichsten Uebersehen in der Entwicklung der Wissenschaft, dass man die Distanzenergie für die einzige Form der Raumenergie gehalten, und daher ein Bedürfniss empfunden hat, die beiden anderen, ja auch alle nicht mechanischen Energiearten, überall auf die erste zurückzuführen.

Von weiteren Energiearten sind zu erwähnen:

Energie	Capacität	Intensität
C. Wärmeenergie	Wärmecapacität oder Entropie	Temperatur
D. Elektrische Energie	Elektricitätsmenge	Potential
E. Magnetische Energie	Menge des Magnetismus	Magnetisches Potential
F. Chemische Energie	Verbindungsgewicht	Chemisches Potential oder Affinität
G. Strahlende Energie	Absorptions- resp. Emissionsgrösse	Intensität der Strahlung

Zu dieser Tabelle sind noch folgende Erläuterungen zu machen.

C. Die Capacitätsgrösse der Wärmeenergie wird Wärmecapacität in dem Falle genannt, dass mit der Zuführung der Energie die Temperatur sich ändert; findet letzteres nicht statt, so ist der Name Entropie üblich.

F. Der Capacitätsfactor der chemischen Energie ist wie der der Wärme der Masse und dem Gewicht proportional; es ist aber aus dem gewählten Namen Verbindungsgewicht nicht zu schliessen, dass die chemische Capacität ihrem Wesen nach ein Gewicht sei. Sie ist dies so wenig, wie sie eine Masse ist; beiden ist sie nur proportional, und der Proportionalitätsfactor ist wechselnd mit dem, was man die Natur des Stoffes nennt. Im übrigen ist für den Capacitätsfactor der chemischen Energie ebensowenig, wie für irgend einen anderen Energiefactor der letzten Tabelle eine »Dimension« in den üblichen Einheiten von Länge, Zeit und Masse angebbar; alle entgegenstehenden Behauptungen beruhen auf willkürlichen Vernachlässigungen und somit auf Irrthum.

Der Intensitätsfactor der chemischen Energie, deren Zerlegung in Factoren von Willard Gibbs herrührt, entspricht am meisten dem (bisher allerdings ziemlich unklaren) Begriff der chemischen Affinität, ist aber weiter als dieser.

G. Was endlich die letztgenannte Energieart, die strahlende Energie anlangt, so nimmt sie insofern eine ganz besondere Stellung ein, als sie diejenige Form ist, in welcher die Energie nicht an die Materie gebunden erscheint. Wir werden später sehen, dass der thatsächliche Inhalt des Begriffs der Materie das Vorhandensein gegenseitiger, unveränderlicher Beziehungen zwischen den Factoren der verschiedenen Energiearten ist; die strahlende Energie ist also diejenige Form, welche solchen Beziehungen nicht unterworfen ist.

Den Capacitätsfactor der strahlenden Energie habe ich die Emissionsgrösse genannt; sein Werth wird im Allgemeinen durch das Product aus der strahlenden Fläche und einem specifischen Factor, dem Emissionscoefficienten, bestimmt. Der Intensitätsfactor der strahlenden Energie ist diejenige Grösse, welche an zwei Objecten gleich ist, wenn zwischen ihnen kein Energieaustausch durch Strahlung erfolgen soll. Sind zwei Körper einzeln mit einem dritten im Strahlungsgleichgewicht, so sind sie es auch unter einander. Dieser Satz ist die Grundlage des Kirchhoff'schen Gesetzes; dieses folgt mit Nothwendigkeit aus dem zweiten Hauptsatze der Energetik.

Im Allgemeinen ist die Intensitätsgrösse der Strahlung eine eindeutige Function der Temperatur, so dass beide gleichzeitig gleich oder in gleichem Sinne verschieden sind. Doch giebt es Fälle, nämlich wenn andere Energieformen ausser der Wärme in strahlende Energie übergehen, wo bei gleichen Temperaturen ganz verschiedene Intensitätsgrössen der Strahlung bestehen können, so dass diese keineswegs von der Temperatur allein abhängig ist.

Die strahlende Energie wird oft strahlende Wärme genannt. Es ist dies eine irreführende Bezeichnung, die daher rührt, dass warme Körper sehr leicht Energie in Form von strahlender Energie abgeben. Dies ist aber keine nothwendige Beziehung, da strahlende Energie auch aus anderen Formen, z. B. elektrischer und chemischer entstehen kann, ohne dass diese inzwischen in Wärme übergegangen wären. Ebenso verwandelt sich strahlende Energie (wie alle anderen Formen) besonders leicht, aber

keineswegs ausschliesslich in Wärme. Im Uebrigen folgen aber beide Energiearten ganz verschiedenen Gesetzen.

Zum Wesen der strahlenden Energie gehört, dass sie eine *periodische* Erscheinung (meist von äusserst kurzer Periode) ist.

5. Ermittelung der Energiefactoren.

Von den Factoren der Energie lässt sich die Intensität am leichtesten erkennen, da sie diejenige Eigenschaft ist, von welcher die Ruhe oder Bewegung der Energie, d. h. alles Geschehen abhängt. Wir sind daher mit dieser Grösse erfahrungsgemäss am frühesten vertraut, und zwar stets noch früher, als mit der betreffenden Art Energie selbst.

Haben wir ein Gebilde, welches fähig ist, von einer bestimmten Energieart (innerhalb gewisser Grenzen) beliebige Mengen zu enthalten, und an welchem die vorhandene Menge der Energie mit irgend einer messbaren Erscheinung so verbunden ist, dass man sie leicht erkennen kann, so haben wir ein Messinstrument für die *Intensität* der fraglichen Energie. Denn die Menge Energie, welche in diesem Instrument enthalten ist, wenn es mit einem anderweit gegebenen Gegenstand zum Energieaustausch und -gleichgewicht gebracht wird, ist ausschliesslich durch den Werth der Intensität bestimmt, welcher in letzterem herrscht, und ganz unabhängig von dem Gesammtbetrage der Energie in diesem.

Ein solches Instrument gestattet nun, Intensitätsgrössen wieder zu erkennen, sowie grössere und kleinere Intensitätswerthe von einander zu unterscheiden. Im Uebrigen enthält es, wenn es irgendwie eingetheilt ist, zunächst weder gleiche Intervalle der Intensität, noch auch den Anfangspunkt derselben, sondern es ist nur jedem Werth der Ablesung ein Werth der Intensität eindeutig zugeordnet.

Mit Hülfe eines solchen Intensitätsmessers lassen sich zunächst Capacitätsgrössen zahlenmässig bestimmen. Es werden an der Scala des Instrumentes zwei Intensitätsgrössen i_1 und i_2 gewählt, wobei $i_1 > i_2$ sei. Bringt man nun zunächst das auf seine Capacität zu untersuchende Gebilde durch geeignete Zu- oder Abfuhr von Energie auf die Intensität i_1 und misst alsdann die Energiemenge ΔE, welche es beim Uebergange auf die Intensität i_2 abgiebt, so ist

$$\Delta E = c\,(i_1 - i_2)$$

und daher

$$\frac{\Delta E}{i_1 - i_2} = c.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens an verschiedenen Objecten kann man eine Reihe von Capacitäten $c', c'', c''' \ldots$ bestimmen, deren Zahlenwerthe man kennt. Es ergiebt sich durch ein solches Verfahren eine *Scala der Capacität.*

Es seien zwei Capacitäten gewählt, deren Gleichungen sind

$$\frac{\Delta E'}{i_1 - i_2} = c',$$

$$\frac{\Delta E''}{i_1 - i_2} = c''.$$

Wird nun beim zweiten Object die Anfangsintensität so lange geändert, bis beim Uebergange auf den Schlusswerth i_2 dieselbe Energiemenge abgegeben wird, wie sie das erste Object zwischen i_1 und i_2 abgiebt, so haben wir die Gleichungen

$$\frac{\Delta E}{i_1 - i_2} = c', \quad \frac{\Delta E}{i_1'' - i_2} = c'',$$

wo i_1'' der neue Werth von i_1 für das zweite Object ist, und es gilt

$$\frac{c'}{c''} = \frac{i_1'' - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{\Delta i''}{\Delta i'}.$$

Die Intensitätsunterschiede $\Delta i'$ und $\Delta i''$ verhalten sich umgekehrt wie die Capacitäten. Hat man letztere beispielsweise im Verhältniss $c' : c'' = 1 : 2$ gewählt, so stellt die Reihe i_2, i_1'', i_1 eine äquidistante *Scala der Intensität* dar.

Durch Anwendung der Gleichungen

$$i = \frac{dE}{dc} \quad (i \text{ constant}),$$

$$c = \frac{dE}{dc} \quad (c \text{ constant}),$$

ergiebt sich die Bestimmung der Absolutwerthe von i und c, d. h. des Anfangspunktes der Zählung beider Scalen.

Dieses allgemeine Verfahren gilt nur unter der Voraussetzung, dass eine beliebige Variation der Intensitäten wie der

Capacitäten möglich sei. Indessen ist die physische Möglichkeit, die angegebenen Vorgänge durchzuführen, keineswegs bei jeder Art der Energie vorhanden. Es giebt Energiearten, bei denen eine Aenderung der Capacität, andere bei denen eine Aenderung der Intensität nicht möglich ist, endlich auch solche, bei welchen zwar beide geändert werden können, aber nur gleichzeitig in einer bestimmten Weise.

In diesem letzten Falle ist die Energie die Function einer Veränderlichen allein.

In dem Falle, dass durch eine Aenderung des Energieinhaltes keine Aenderung der Capacität bewirkt werden kann, dass also die Capacität ihrer Natur nach constant ist, gilt die Gleichung

$$dE = c\,di$$

und die Scala der Intensitäten ist einfach proportional der der Energiemengen. Die Scala der i lässt sich somit auf sehr einfache Weise bestimmen, dagegen nicht der Anfangspunkt der Zählung. Denn die dazu erforderliche Gleichung

$$i = \frac{dE}{dc}$$

ist nach der Voraussetzung experimentell nicht ausführbar.

Ein Beispiel derartiger Energieen ist die lebendige Kraft oder Bewegungsenergie, deren Capacitätsfactor *Masse* genannt wird. Die Masse ist keiner Aenderung durch Zu- oder Abfuhr von Energie fähig, die Gleichung $i = \frac{dE}{dc}$ ist also experimentell nicht herstellbar. Demgemäss ist es nicht möglich, von dem Intensitätsfactor der Bewegungsenergie $\frac{1}{2}v^2$ den absoluten Werth zu ermitteln; zugänglich sind uns nur die Aenderungen desselben [1]).

Ganz ähnlich verhält sich der andere Fall, dass i nicht veränderlich ist. Es gelingt dann leicht, den Absolutwerth der Intensitäten und ihre Scala zu bestimmen, für die Capacität sind aber nur die Unterschiede der Erfahrung zugänglich.

Ein derartiger Fall liegt beispielsweise bei der Gravitations-

---

1) Die ausserdem hier bestehenden, sehr bemerkenswerthen Verhältnisse werden an einem anderen Ort eingehender behandelt werden.

energie vor, wenn wir die Aenderung der Schwere mit der Höhe ausser Acht lassen. Wir haben die Gleichung

$$E = g . h \, ,$$

wo g das Gewicht, h die Höhe ist. Die Intensitätsgrösse, das Gewicht der Körper, ist unveränderlich, es ist somit nur möglich, die Capacität (die Höhe) zu ändern. Die einzige experimentell mögliche Gleichung ist

$$dE = g\, dh,$$

aus welcher ohne Weiteres die Intensitätsgrösse g und die Scala der h sich ergiebt; von wo ab aber die Höhe zu rechnen sei, ergiebt sich nicht, und ist auch hier wie in allen derartigen Fällen praktisch gleichgültig, da keine bekannte thatsächliche Beziehung durch eine Aenderung in der Wahl des Anfangspunktes geändert wird.

In dem Falle endlich, dass die Energie nur von einer einzigen Veränderlichen abhängig ist, lässt sich die eben dargelegte Ermittelung der Factoren nicht durchführen, da alsdann nothwendig die Intensität und die Capacität Functionen von einander sind, und eine Aenderung der Energie nach der einen, während die andere constant ist, nicht möglich ist. In diesem Falle ist man darauf angewiesen, beide Grössen einigermassen willkürlich zu wählen, und die Aufgabe besteht darin, die Wahl möglichst zweckmässig zu treffen. Meist wird wohl die einzige Veränderliche selbst als Capacitäts-, resp. Intensitätsgrösse aufgefasst werden können, wodurch die einfachste Darstellung der Verhältnisse erreicht wird.

In Formeln gestaltet sich dieser Fall so, dass die Energie als Function einer Veränderlichen r und irgend welcher Constanten, die unter dem Zeichen a zusammengefasst werden mögen, darzustellen ist:

$$E = \varphi(r, a).$$

Die einzige mögliche Veränderung der Energie ist

$$dE = \frac{d\varphi(r,a)}{dr} \cdot dr.$$

Je nachdem r die Rolle einer Capacitäts- oder Intensitätsgrösse übernehmen kann, ist $\frac{d\varphi(r,a)}{dr}$ als der Intensitäts-, resp. Capacitätsfactor aufzufassen.

Ein classisches Beispiel für diesen Fall bietet die Gravitationsenergie. Newton hat dargethan, dass sich die Bewegungen der Himmelskörper vollständig darstellen lassen, wenn man zwischen ihnen eine Kraft annimmt, welche proportional dem Product specifischer Constanten der einzelnen Körper und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist. In unserer Sprache heisst dies, dass die Gravitationsenergie als eine Distanzenergie aufzufassen ist, deren Aenderung mit der Entfernung dem fraglichen Gesetz folgt. Nennt man $a_1\,a_2$ die beiden Körperconstanten und r die Entfernung, so ist nach dem Vorhergegangenen

$$\frac{d\varphi(a_1 a_2, r)}{dr} = \frac{a_1 a_2}{r^2},$$

woraus

$$E = \varphi(a_1 a_2, r) = C - \frac{a_1 a_2}{r}$$

als Werth der Gravitationsenergie folgt; C ist die Integrationsconstante, deren Betrag aus der angegebenen Beziehung nicht bestimmt werden kann.

6. Die gegenseitigen Beziehungen der Energiefactoren.

Die verschiedenen Energieformen, mit denen wir bekannt sind, stehen unter einander in einem Zusammenhange, der sich darin äussert, dass man Factoren bestimmter Energiearten nicht ändern kann, ohne gleichzeitig Factoren anderer Energiearten zu ändern. Es stehen mit anderen Worten häufig die Factoren verschiedener Energiearten in gegenseitiger functioneller Beziehung.

Von den bekannten Beziehungen der Energiefactoren ist die der Proportionalität die häufigste. Insbesondere ist der Capacitätsfactor der Bewegungsenergie, die *Masse*, eine Grösse, welche vielen anderen proportional ist, und welcher viele andere proportional sind. Durch diesen Umstand ist es gekommen, dass man dieser Grösse, die nur dem Gebiet der Bewegungsenergie angehört, eine allgemeine Bedeutung zugeschrieben und sie in ganz verfehlter Weise als dritte Grundeinheit für die Bestimmung der »Dimensionen« der physikalischen Grössen eingeführt hat.

Da die einander proportionalen Energiefactoren, wie Masse, Gewicht, Volum, Wärmecapacität, Capacität für chemische Energie stets räumlich ungetrennt erscheinen, so hat man die Gewohnheit angenommen, sie alle in einem Träger oder Gefäss der Energie enthalten sein zu lassen, dem man den Namen *Materie* gegeben hat. Thatsächlich lernen wir von der sogenannten Materie nichts kennen, als die erwähnten Energiegrössen, und wenn man sich merkt, dass dieselben stets räumlich ungetrennt auftreten, so ist der Inhalt erschöpft, welchen die Hypothese von einem Träger der Energie, der etwas von der Energie Verschiedenes ist, vermittelt. Es erscheint überflüssig, für eine so einfache Thatsache eine besondere Hypothese aufzustellen; auch lässt sich nicht verkennen, dass dieselbe ausserordentlich hemmend auf die Ausbildung klarer Vorstellungen über das Wesen der Energie gewirkt hat.

Die »Materie« ist demnach nichts, als eine räumlich unterscheidbare zusammenhängende Summe von Energiegrössen. Diejenigen Factoren dieser Energieen, welche unter einander und der Masse proportional sind, pflegt man die Grundeigenschaften der Materie zu nennen, wobei man die mechanischen (Masse, Gewicht, »Undurchdringlichkeit« oder Volum) bevorzugt, obwohl z. B. die Fähigkeit chemischer Umwandlung nicht weniger aller uns bekannten »Materie« zukommt, wie jene. Die anderen Energiefactoren, welche jenen erfahrungsmässig nicht nothwendig proportional sind, wie Geschwindigkeit, Temperatur, electrisches Potential u. s. w., pflegt man vorübergehende Eigenschaften oder Zustände der Materie zu nennen. Wenn in Zukunft der Ausdruck Materie, materielles Object, Object gebraucht wird, so soll von der Hypothese eines Trägers abgesehen und nur die Thatsache der räumlichen und functionellen Vereinigung von Energiegrössen gemeint sein.

Neben diesen constanstanten Verbindungen von Energiefactoren giebt es noch willkürliche; Vorrichtungen, welche eine solche Verbindung bewerkstelligen, heissen Maschinen. Die »elementaren Potenzen« der älteren Mechanik, wie Hebel, Rolle, schiefe Ebene u. s. w. stellen besonders einfache Fälle derartiger Verbindungen verschiedener Energiefactoren dar, doch sind auch Cylinder und Kolben der Dampfmaschine, Anker und Magnet der Dynamomaschine u. s. w. Beispiele solcher Verbindungen. Das Wesen der willkürlichen Verbindungen besteht darin, dass

es möglich ist, den Proportionalitätsfactor der beiden in gegenseitiger Abhängigkeit stehenden Energiefactoren beliebig innerhalb gewisser Grenzen zu ändern.

Die grosse Bedeutung solcher nothwendiger oder willkürlicher gegenseitiger Beziehungen der Energiefactoren liegt nun darin, dass sie die Ursache und nothwendige Bedingung für die gegenseitigen Umwandlungen der Energiearten in einander sind. Denn ändert man irgend eine Energiemenge, und damit ihre Factoren, so ist eine gleichzeitige Aenderung der anderen Factoren gegeben, und damit auch die Nothwendigkeit, dass der Betrag der anderen Energieen sich ändert. Durch den ersten Hauptsatz der Energetik sind diese gleichzeitigen Aenderungen dem Gesetze unterworfen, dass ihr Gesammtbetrag Null ist.

7. Bedingung des Energiegleichgewichtes.

Das Gleichgewicht eines Gebildes mit einer einzigen Art Energie ist dadurch bedingt, dass die Intensität dieser Energie überall gleich ist. Daraus folgt, dass ein *endliches* Gebilde, welches dieser Bedingung entspricht, nicht möglich ist, indem an den Grenzen desselben, wo irgend welche andere Gebilde mit anderen Energieen vorhanden sind, die Intensität der ersten Energie im Allgemeinen einen anderen Werth haben wird.

Es muss daher möglich sein, da endliche Gebilde mit ruhender Energie erfahrungsmässig existiren, vorhandene Intensitätsunterschiede einer Energie *A* unwirksam zu machen oder zu *compensiren*. Diese Compensation erfolgt durch die im vorigen Artikel auseinandergesetzte Verknüpfung der Energiefactoren.

Ist an der Stelle, wo die Intensität der Energie *A* eine Aenderung erfährt, mit demjenigen Energiefactor, welcher willkürlich verändert werden kann, ein Factor einer anderen Energie *B* so verbunden, dass er eine entsprechende Aenderung erfahren muss, so bedingt eine Aenderung der Energie *A* nothwendig eine solche der Energie *B*. Sind nun die Bedingungen derart, dass bei einer virtuellen Aenderung der correlativen Factoren einerseits ebensoviel Energie der Art *A* verschwindet, als andererseits von *B* vermöge der vorausgesetzten Beziehung entstehen muss, und umgekehrt, so befindet sich das Gebilde im Gleichgewicht.

Der Beweis für diesen überaus wichtigen Satz ergiebt sich

aus der Ueberlegung, was geschieht, wenn die fragliche Gleichheit nicht besteht. Man sieht alsbald ein, dass alsdann nothwendig eine solche Verschiebung eintreten muss, dass die Menge der verschwindenden Energie grösser ist, als die der entstehenden, da anderenfalls Energie geschaffen werden müsste, während hier nur der Ueberschuss der verschwindenden Energie für andere Umwandlungen verfügbar bleibt.

Denken wir nun, dass die Bedingungsgleichung unendlich wenig von der Gleichheit der umgewandelten Energieen abweicht, derart, dass die von A verschwindende Menge etwas grösser ist, als die von B entstehende. Alsdann wird nothwendig der Vorgang in dem Sinne erfolgen, dass A sich in B umwandelt. Bei einer unendlich kleinen Abweichung von der Gleichheit im entgegengesetzten Sinne wird sich B in A umwandeln. Da somit durch unendlich kleine Aenderungen der Sinn, in welchem die Maschine geht, umgekehrt werden kann, so folgt nach dem Gesetz der Stetigkeit, dass dazwischen, nämlich bei vollkommener Gleichheit der entstehenden und verschwindenden Energieen, Gleichgewicht besteht.

Die Gleichung für das Gleichgewicht zweier an einander grenzender Energieen A und B lautet demgemäss, wenn wir die entstehenden und verschwindenden Energieen mit entgegengesetzten Vorzeichnen rechnen:

$$\varDelta A + \varDelta B = 0,$$

wobei die beiden $\varDelta$ nicht willkürlich, sondern durch eine Bedingungsgleichung von der Gestalt

$$\varDelta f_A = K \varDelta f_B$$

verbunden sind, in der f_A und f_B Factoren der Energieen A und B, und K der durch die Maschine gegebene Transformationscoefficient dieser beiden Factoren ist.

Bei der Anwendung dieses Satzes ist es wesentlich, die Voraussetzungen desselben einzuhalten. Diese sind das Aneinandergrenzen oder die Coexistenz zweier Energiegebiete und das Bestehen einer Maschinengleichung, die unabhängig vom ersten Hauptsatz selbst ist. Denn der erste Hauptsatz verlangt unter allen Umständen, dass die entstehenden und verschwindenden Energiemengen einander gleich sind, der Gleichgewichtssatz aber verlangt diese Gleichheit für die mit einander durch die Maschinengleichung verbundenen Energiearten. Ist die

letztere Bedingung nicht erfüllt, so wird eine Bewegung eintreten, die jedenfalls dem ersten Hauptsatze unterworfen bleibt; da aber die Menge der verschwindenden Energie, beispielsweise $\varDelta A$, grösser ist, als die der entstehenden $\varDelta B$, so muss der Ueberschuss in Gestalt einer *dritten* Energieart, $\varDelta C$, auftreten, die bei rein mechanischen Gebilden aus naheliegenden Gründen stets Bewegungsenergie ist; bei allgemeinen Gebilden erscheint der Ueberschuss in letzter Instanz als Wärme.

Es ist leicht, diese Ueberlegung auf den Fall des Gleichgewichts mehrerer Energiearten auszudehnen, die durch Maschinengleichungen mit einander verknüpft sind. Es muss dann einfach die Summe der entstehenden und verschwindenden Energieen (beide mit entgegengesetztem Zeichen gerechnet) gleich Null sein, also in Zeichen

$$\Sigma \varDelta E = 0.$$

Die Gleichung gilt nicht nur, wenn sämmtliche Energieen mit einander durch Maschinengleichungen verknüpft sind, sondern bedingt nicht mehr, als dass *jede* Energieart mit mindestens einer anderen in einer solchen Beziehung stehe. Denn bei nicht allseitiger Verknüpfung gelten für die untereinander verknüpften Einzelgruppen von Energiearten unabhängige Gleichungen von der Gestalt

$$\Sigma_1 \varDelta E = 0,$$
$$\Sigma_2 \varDelta E = 0, \text{ u. s. w.},$$

deren Summe

$$\Sigma \varDelta E = 0$$

die frühere Gestalt hat. Für die Anwendung wird man indessen stets die einzelnen Gleichungen $\Sigma_n \varDelta E = 0$ benutzen, indem man diejenigen Energiegrössen, welche bei der zu untersuchenden Aenderung constant bleiben, aus der Gleichung fortlässt, wenn sie auch im Gebilde vorhanden sind.

Beim Ansatz der Gleichung $\Sigma \varDelta E = 0$ wird es sich stets als nothwendig erweisen, die verschiedenen Energieen in ihre Factoren zu zerlegen, damit die Elimination derjenigen Factoren bewerkstelligt werden kann, deren Beziehung durch die Maschinengleichung gegeben ist. Es erfolgen dann Gleichungen zwischen den anderen Factoren, welche als das Ergebniss der Rechnung, die specielle Gleichgewichtsbeziehung der in Zusammenhang gebrachten Grössen, anzusehen sind.

8. Das verallgemeinerte Intensitätsgesetz.

Die Maschinengleichung, durch welche verschiedene Arten Energie in ihren Aenderungen von einander abhängig gemacht werden, betrifft erfahrungsmässig nur die Capacitätsfactoren[1]). Die Maschinengleichung hat demgemäss allgemein die Gestalt

$$c_1 = Kc_2$$

und bei der virtuellen Bewegung der Maschine sind die Aenderungen der Energie in der Gestalt $c\,di$ auszudrücken.

Haben wir daher die Gleichung zwischen zwei Energieen, die sich im Gleichgewicht befinden, so wird aus $dE_1 + dE_2 = 0$

$$c_1 di_1 + c_2 di_2 = 0$$

oder

$$\frac{c_1}{c_2} di_1 + di_2 = 0.$$

Aus der Maschinengleichung ergiebt sich

$$\frac{c_1}{c_2} = K,$$

woraus

$$Kdi_1 + di_2 = 0 \text{ oder } Kdi_1 = -di_2.$$

Es findet zwischen zwei Energieen Gleichgewicht statt, wenn die Intensität der einen der reducirten Intensität der anderen entgegengesetzt gleich ist. Unter reducirter Intensität ist hierbei die mit dem Maschinenfactor multiplicirte Intensität verstanden.

Die Analogie dieses Satzes mit dem früher für eine einzige Energie ausgesprochenen, dass im Zustande der Ruhe überall die Intensität gleich sein muss, ist evident.

Auch in dieser Gestalt ist die Gleichgewichtsbedingung vielfach nützlich, denn sie führt jedesmal, wo an irgend einer Energieart sich ein Sprung der Intensität zeigt, zu der Nothwendigkeit, dass irgend eine andere, mit jener ersten durch eine Maschinengleichung verknüpfte Energie vorhanden ist. Wenn, was sehr häufig der Fall sein wird, die Maschinengleichung bekannt ist, so ergiebt sie gleichzeitig Sinn und Betrag des Intensitätssprunges jener zweiten Energie.

---

1) Ich möchte diesen Satz mit einigem Vorbehalt aussprechen. Ich habe zwar noch keine Ausnahmen von ihm gefunden, meine Untersuchungen kann ich aber noch nicht vollständig genug nennen, um mir genügende Sicherheit über diesen Punkt zu geben.

9. Die Wärme.

Infolge der grossen Freiheit, mit welcher die Ab- und Zufuhr der Wärme an gegebenen Gebilden erfolgt, ist es möglich, die beiden Gleichungen des § 5 experimentell auszuführen, und somit für die Capacitäts- wie für die Intensitätsgrösse derselben die vollständigen Werthe zu finden.

Zunächst ist es bekannt, dass bei den sogenannten vollkommenen Gasen, insbesondere beim Wasserstoff, die Wärmecapacität (bei constantem Volum, also ohne äussere Arbeit) unabhängig von der Temperatur ist, d. h. dass die im Gase enthaltene Energie proportional der Temperatur des Gasthermometers ist. Nennen wir letztere t, so stellt demnach ein vollkommenes Gas in weitem Umfange den Fall

$$\frac{dQ}{dT} = c \quad (c \text{ constant})$$

dar, indem die Stufen dt des Gasthermometers gleich denen des absoluten oder energetischen Thermometers dT gesetzt werden können. Diese Beziehung ist auszudrücken durch

$$dT = dt$$

oder

$$T = t + k,$$

wo k die Integrationsconstante bedeutet, deren Werth zunächst noch unbekannt ist.

Um den Anfangspunkt der unbekannten Scala $T = t + k$ zu finden, benutzen wir die weitere Eigenschaft eines vollkommenen Gases, dass sein gesammter Energieinhalt bei constanter Temperatur constant, d. h. vom Volum nicht abhängig ist. Es geht dies aus dem bekannten Versuch von Gay-Lussac und Joule hervor, nach welchem ein zusammengepresstes Gas beim Ausströmen in einen leeren Raum insgesammt weder Wärme aufnimmt, noch welche abgiebt. Nun besteht diese gesammte Energie aus der im Gase enthaltenen Wärme und der Volumenergie. Letztere nimmt, wenn das Gas sich bei constanter Temperatur sich von v_0 auf v ausdehnt, um den Betrag $\int_{v_0}^{v} p\,dv$ ab; ersetzt man aus der Gasgleichung p durch $\frac{R(273 + t)}{v}$, so

ist die Abnahme der Volumenergie durch $R(273+t)\,ln\frac{v}{v_0}$ gegeben; um eben so viel muss, da die Gesammtenergie constant ist, die Wärmeenergie zunehmen.

Schreiben wir somit U für die gesammte und Q für die Wärmeenergie, so ist

$$Q = U + R(273+t)\,ln\frac{v}{v_0} + C,$$

wo C die durch v_0 bestimmte Integrationsconstante ist, welche noch eine Function der Temperatur sein kann; wir denken sie uns mit U vereinigt, welche Grösse gleichfalls nur eine Temperaturfunction ist, und schreiben einfacher

$$Q = U_1 + R(273+t)\,ln\frac{v}{v_0}.$$

Um nun die Gleichung

$$\frac{dQ}{dc} = T \quad (T \text{ constant})$$

auszuführen, differenziren wir Q für constantes t und erhalten

$$dQ = \frac{R(273+t)}{v}dv.$$

Andererseits ergiebt sich noch $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT} = c$ (c constant)

$$\frac{dQ}{dT} = U_1' + R\,ln\frac{v}{v_0} = c$$

und hieraus

$$dc = R\frac{dv}{v} \quad (T \text{ constant}).$$

Dividirt man beide Grössen dQ und dc durcheinander, so folgt

$$\frac{dQ}{dc} = T = 273 + t.$$

Die um 273° vermehrte, in Celsiusgraden gezählte Scala des Gasthermometers ist die absolute oder energetische Temperaturscala. Dies gilt allgemein, da es nur *eine* absolute Scala giebt.

Die Capacitätsgrösse c hat entsprechend den Definitionen

$$c = \frac{dQ}{dT} \text{ und } dc = \frac{dQ}{T}$$

zwei verschiedene Namen erhalten; im ersten Falle heisst sie Wärmecapacität, im zweiten Entropie; erstere gilt für veränderliche, letztere für constante Temperatur. Beide Grössen sind caet. par. den Massen oder Gewichten der Objecte proportional.

Um die Anwendung dieser Betrachtungen zu zeigen, bestimmen wir zunächst die Beziehung, welche erfüllt sein muss, damit bei der Umwandlung von Flüssigkeit in Dampf ein Energiegleichgewicht besteht. Die beiden Energiearten sind Wärme und Volumenergie, als ihre Capacitätsgrössen, welche einander proportional sind, da beide der Substanzmenge proportional sind, erscheinen Entropie und Volum. Wir haben demnach für das Gleichgewicht

$$s\,dT = v\,dp$$

oder indem wir für die Entropie s ihren Werth $\frac{\varrho}{T}$ setzen, wo ϱ die latenten Dampfwärme ist,

$$\frac{\varrho}{T}dT = v\,dp,$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\varrho}{vt},$$

welches die wohlbekannte Dampfdruckgleichung ist.

Es sei zweitens ein galvanisches Element gegeben, und es werde das Gleichgewicht zwischen Wärme und elektrischer Energie gesucht. Wir haben

$$s\,dT = e\,dp,$$

wo e die Elektricitätsmenge, p das Potential ist. Die Entropie s ist wieder proportional der Elektricitätsmenge e, denn es ist $s = \frac{w}{T}$, wo w die Wärmeaufnahme im Element (galvanische minus chemische Wärme) bedeutet, welche ihrerseits der durchgehenden Elektricitätsmenge proportional ist. Durch Substitution von $\frac{w}{T}$ für s folgt

$$\frac{w}{T}dt = e\,dp,$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{w}{eT},$$

die Formel von Gibbs und v. Helmholtz.

Es werde drittens die Bedingung des Gleichgewichts zwischen Wärme und Oberflächenenergie gesucht. Wir haben wiederum, wenn w die Oberfläche und γ ihre Spannung ist:

$$s\,d\,t = w\,d\gamma,$$

$$\frac{l}{T}\,d\,T = w\,d\gamma,$$

$$l = T w \frac{d\gamma}{d\,T},$$

wonach man aus dem Temperaturcoefficienten der Oberflächenspannung die latente Wärme l für die Bildung der Flächeneinheit ermitteln kann.

10. Die bewegliche Energie.

Es sei ein Gebilde aus mehreren verschiedenen Arten Energie A, B, C . . . gegeben, zwischen welchen Gleichgewicht besteht. Wird dem Gebilde Energie von der Art A hinzugefügt, so wird dadurch das Gleichgewicht gestört; die zugehörige Intensität wird grösser, und es entsteht eine Umwandlung der Energie A in diejenige Energieform B, mit welcher jene sich vorher im Gleichgewicht befunden hatte, d. h. durch deren Intensitätssprung der Intensitätssprung von A compensirt war.

Kann das Gebilde so eingerichtet werden, dass die bei diesen Vorgängen beanspruchten Theile keine dauernden Veränderungen erfahren (indem sie periodisch wieder in den Anfangszustand zurückkehren oder einen *Kreislauf* durchmachen), so haben wir eine Maschine zur Umwandlung der Energieform A in B. Und zwar wird, wenn wir die Betrachtung auf die Zustände beschränken, wo der Anfangszustand wieder erreicht ist, oder wo eben ein Kreislauf vollständig geworden ist, die zugeführte Menge der Energie A genau der gebildeten Menge von B sein, da in der Maschine keine geblieben ist.

Damit ein solcher Vorgang möglich ist, muss die Intensität der zugeführten Energie A grösser sein, als die der vorhandenen Energie A, da sonst eine Zufuhr, d. h. ein Uebergang von Energie in das Gebilde nicht möglich wäre. Der Unterschied beider Intensitäten kann aber beliebig klein sein, und hat den Grenzwerth Null.

Die entstehende Energie *B* entsteht gleichfalls mit einer grösseren Intensität als die vorhandene, mit *A* im Gleichgewicht befindlich gewesene Energie *B* besass, und zwar ihrem ganzen Betrage nach. Sie wird demnach sich vollständig wieder in *A* zurückverwandeln lassen, wenn die Intensität der Energie *A* fortdauernd auf der anfänglichen Höhe gehalten wird. Ebenso könnte, falls ein Theil der Energie *B* mit einer dritten *C* im Gleichgewicht steht, die neuenstandene Energie *B* vollständig in *C* umgewandelt werden, und diese wieder in eine vierte *D*, oder auch in die erste Energieform zurück, und zwar stets ohne Aenderung des gesammten Betrages.

Welche Umwandlungen man auch vornehmen mag, stets wird diejenige Energiemenge, welche man in das ursprünglich im Gleichgewicht befindlich gewesene Gebilde hineingebracht hat, zu Umwandlungen verfügbar bleiben. Nun kann man aber in jedem nicht im Gleichgewicht befindlichen Gebilde zunächst den maximalen Antheil der verschiedenen Energiearten ausscheiden, welche mit einander im Gleichgewicht stehen, und den Rest als die »hinzugefügte« Energie ansehen. Nennt man diesen Betrag aus den oben dargelegten Gründen die *bewegliche Energie*, so lässt sich die Summe der vorstehenden Ueberlegungen dergestalt ziehen, dass man den Satz ausspricht:

In einem isolirten Gebilde ist die Menge der beweglichen Energie constant.

Ein gutes Beispiel für den Satz ist die Bewegung eines Planeten um die Sonne. Wenn sich die Bewegungs- und Distanzenergie genau im Gleichgewicht befinden, so geht der Planet in einer Kreisbahn um die Sonne, resp. um den gemeinsamen Schwerpunkt; beide Energien behalten ihren Werth unveränderlich bei, und die bewegliche Energie ist Null. Sowie diese Bedingung nicht erfüllt ist, tritt eine elliptische Bewegung ein, und gleichzeitig ist ein Theil der Energie als bewegliche vorhanden, indem er in periodischem Wechsel als Distanz- und als Bewegungsenergie erscheint. Die Distanzenergie kann nie kleiner werden, als der Sonnennähe, und nie grösser, als der Sonnenferne entspricht; zwischen denselben Grenzen schwankt der Werth der Bewegungsenergie derart, dass die Summe beider Energieen stets constant ist. Dieser gleiche Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Werth der Distanz- oder kinetischen Energie ist die bewegliche Energie.

11. Die Dissipation der Energie.

Die Darlegungen des vorigen Abschnittes sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass die verschiedenen in Betracht kommenden Energiearten sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Diese Voraussetzung bedingt, dass die Energiearten mit einander durch entsprechende Beziehungen oder »Maschinengleichungen« verknüpft sind, so dass die eine nicht geändert werden kann, ohne die andere in Mitleidenschaft zu ziehen.

Während die Energie sich im Allgemeinen dieser Bedingung unterworfen zeigt, giebt es eine Form derselben, in welcher die Voraussetzung nicht zutrifft: es ist dies die *strahlende Energie*. In dieser Gestalt unterliegt die Energie keiner Maschinenbedingung; Intensitätsunterschiede derselben lassen sich auf keine Weise durch solche anderer Energiearten compensiren, und die strahlende Energie folgt daher unter allen Umständen dem Gesetz des Ausgleichs ihre Intensitätsverschiedenheiten.

Diese Thatsache ist identisch mit der, dass die Energie, so lange sie als strahlende Energie vorhanden ist, nicht an die Materie gebunden ist. Denn unter Materie verstehen wir nichts, als ein räumlich zusammenfallendes und in gegenseitiger Abhängigkeit befindliches Vorkommen verschiedener Energiearten. So wie die Energie die Materie verlässt, ist sie von der Bedingtheit durch andere Energiearten frei und folgt unbeschränkt dem allgemeinen Intensitätsgesetz.

Daraus geht hervor, dass das im vorigen Abschnitt ausgesprochene Gesetz von der Erhaltung der beweglichen Energie kein allgemeines ist, sondern nur so lange gilt, als strahlende Energie nicht in Frage kommt, wie z. B. im Falle der kosmischen Bewegungen. In allen Fällen, in welchen eine Umwandlung von anderen Energiearten in strahlende stattfindet, geht ein Theil der beweglichen Energie in solche über, welche mit anderer im Gleichgewicht und daher nicht umwandelbar ist. Die Menge dieser unbrauchbar werdenden Energie ist von dem Intensitätsunterschiede der strahlenden Energie und von der Zeit abhängig, während welcher der Unterschied bestehen bleibt.

Die Entstehung strahlender Energie geschieht am leichtesten aus Wärme, indem jeder Temperaturunterschied einen Unterschied im Intensitätsfactor der strahlenden Energie, und somit

einen Ausgleich derselben verursacht. Daher ist es gekommen, dass man der Wärme die charakteristische Eigenschaft der strahlenden Energie, den freien Ausgleich zugeschrieben hat. Indessen überzeugt man sich bald, dass es zahlreiche Vorgänge giebt, in welchen Wärme bei endlichen Temperaturunterschieden auftritt, ohne dass (im idealen Grenzfalle) die Menge der beweglichen Energie sich vermindert; hierzu gehören beispielsweise alle elastischen Schwingungen fester, flüssiger und gasförmiger Körper, wenn sie nur hinreichend schnell erfolgen.

Die gleiche Wirkung, wie sie durch die Umwandlung der Wärme in strahlende Energie und umgekehrt hervorgebracht wird, nämlich die Ausgleichung vorhandener Intensitätsverschiedenheiten, sieht man durch die Erscheinung der *Wärmeleitung* eintreten. Es erscheint deshalb am angemessensten, auch diese nach dem Vorgange Fourier's als eine Reihe von Umwandlungen zwischen strahlender Energie und Wärme aufzufassen, die zwischen den kleinsten Theilchen der leitenden Substanz erfolgt. Die grosse Langsamkeit der Wärmeleitung spricht für diese Auffassung, indem bei der beträchtlichen Kleinheit der in Betracht kommenden Theilchen eine ausserordentlich grosse Zahl solcher Umwandlungen nothwendig ist, bis die Energie messbare Strecken in der leitenden Substanz zurücklegt.

Die hier angedeuteten Betrachtungen zeigen, dass der Inhalt des zweiten Hauptsatzes mit den eben erörterten Erscheinungen, welche als Entwerthung oder Zerstreuung der Energie, Auswachsen der Entropie, Vorwiegen der uncompensirten Verwandlungen u. s. w. bezeichnet worden sind, und die wegen ihrer Wichtigkeit die Aufmerksamkeit der Forscher in hohem Maasse auf sich gezogen haben, nur in ziemlich weitläufigen Zusammenhange steht. Die von Clausius aufgestellte entsprechende Formel $\int \frac{dQ}{t} \lesseqgtr 0$ hat bisher eine wissenschaftliche Verwendung nur in dem Grenzfalle gefunden, wo das Gleichheitszeichen gilt, d. h. wo die Wärme als durch andere Energieen compensirbare Energie auftritt, und im Abschnitt 9 ist an einigen Fällen gezeigt worden, dass die bisher durch die Betrachtung von umkehrbaren Kreisprocessen oder die Verwendung der Minimumbedingung für das thermodynamische Potential oder die Entropiefunction abgeleiteten Beziehungen sich in gleicher Gestalt aus der einfachen

Gleichgewichtsbedingung für die in Frage kommenden Energieen ergeben, und überall auf die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art zurückführbar sind; jene aber setzt nothwendig die gegenseitige Abhängigkeit der fraglichen Energieen, d. h. die Existenz einer Maschinenbedingung voraus, welche für die strahlende Energie nicht besteht.

Die Bedeutung der Dissipationserscheinungen der Energie liegt darin, dass durch sie den meisten natürlichen Vorgängen eine bestimmte Richtung auf die Verminderung der beweglichen Energie gegeben wird. Es ist bemerkenswerth, dass die strahlende Energie, auf deren Eigenschaften die Dissipationsvorgänge beruhen, zugleich diejenige Form ist, durch welche auf der Erdoberfläche fortdauernd aus der Sonne ein Ersatz für die unvermeidbaren Verluste an beweglicher Energie beschafft wird.

M. Krause, *Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind.* **II.**

Die nachstehenden Betrachtungen bilden die Fortsetzung derjenigen, die in einer Note gleichen Titels vom 11. Januar d. J. aufgestellt worden sind. In ihnen sollen die Ausnahmefälle derjenigen Differentialgleichungen betrachtet werden, welche in den Noten vom 7. Juli 1890 und 1. December 1890 in diesen Berichten näher untersucht worden sind. Es schliessen hiermit diejenigen Betrachtungen, die der Verfasser über Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten zunächst bringen wollte.

§ 1.

Specielle Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen zweiten besitzen.

Als Grundform der in der Ueberschrift näher charakterisirten Differentialgleichungen erhielten wir in den früheren Arbeiten die Form:

$$(1)\quad \frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\,(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + c_5 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w)\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass beide Integrale eindeutig sein sollen, ergeben sich zwei Möglichkeiten $c_2 = 1$ und $c_2 = 2$. Im ersten Falle, der wie schon in Note V bemerkt, bisher noch nicht näher untersucht war, ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{c_4}{\operatorname{sn}\alpha} = \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} - c_1 ,$$

$$c_3 = c_4 \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\alpha} .$$

c_1 bleibt willkürlich, während die Integrale vermöge der Gleichungen bestimmt sind:

$$c_1(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega) = k^2(u \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega)$$

$$u = \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega .$$

Hieraus folgt durch Quadriren:

(2) $$k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^4\omega$$
$$+ (2c_1 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha - k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha - k^2 \cdot c_1^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha)\operatorname{sn}^2\omega + c_1^2 = 0 .$$

Es ist klar, dass der Ausnahmefall, welcher in der letzten Note näher charakterisirt worden ist, nur dann eintreten kann, wenn die Discriminante dieser quadratischen Gleichung verschwindet. Dieselbe zerfällt, wie man sich leicht überzeugt, in zwei Factoren, so dass wir die beiden Gleichungen erhalten:

(3) $$\begin{cases} \operatorname{sn}\alpha \cdot c_1^2 - 2(\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha - 1)\, c_1 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^3\alpha = 0 , \\ \operatorname{sn}\alpha \cdot c_1^2 - 2(\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + 1)\, c_1 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^3\alpha = 0 . \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen stehen mit einander in einem engen Zusammenhang. Die eine entsteht aus der andern, indem an Stelle von α gesetzt wird: $\alpha + 2K + 2iK'$.

Unter Hinzunahme der elliptischen Functionen mit dem Argumente $\frac{\alpha}{2}$ lassen sich die Lösungen der beiden Gleichungen schreiben:

(4)
$$c_1 = k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn}\alpha ,$$

$$c_1 = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}} ,$$

$$c_1 = -\operatorname{sn}\alpha \frac{\operatorname{dn}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cn}^2\frac{\alpha}{2}} ,$$

$$c_1 = -k^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{dn}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Es giebt also 4 und nur 4 Werthe von c_1, deren zugehörende Integrale nicht mehr beide doppeltperiodische Functionen sind.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man den folgenden völlig verschiedenen Weg einschlägt.

Ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung hat jedenfalls die Form:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v} ,$$

folglich wird das zweite:

$$(5) \qquad y_2 = y_1 \int e^{\mu} \cdot \frac{\vartheta_0(v+a) \cdot \vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v+\nu)^2} dw ,$$

$$\mu = -\left(c_1 + \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d\alpha}\right) w + 2 \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v .$$

Damit dieses zweite Integral keine doppeltperiodische Function mehr ist, müssen die beiden Gleichungen stattfinden:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &2\nu - a = m + m_1 \tau , \\ &c_1 + \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d\alpha} - 2 \frac{d \log \vartheta_0(\nu)}{d\omega} = 0 . \end{aligned}$$

Die erste Gleichung zeigt, dass ν oder auch ω vier verschiedene Werthe annehmen kann:

I. $\qquad \omega = \frac{\alpha}{2}$,

II. $\qquad \omega = \frac{\alpha}{2} + iK'$,

III. $\qquad \omega = \frac{\alpha}{2} + iK' + K$,

IV. $\qquad \omega = \frac{\alpha}{2} + K$.

Die zweite Gleichung bestimmt die dazu gehörenden Werthe von c_1.

Berücksichtigen wir die Gleichung:

$$\frac{d\log\vartheta_0(\alpha)}{d\alpha} - 2\,\frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{d\frac{\alpha}{2}} = -k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2},$$

so folgt für $\omega = \frac{\alpha}{2}$:

$$c_1 = k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha,$$

d. h. wir erhalten einen der vorhin gefundenen Werthe von c_1. Genau so würden sich die drei anderen ergeben. Da diese drei Fälle sich durch Substitutionen einfachster Art aus dem ersten ergeben, so wollen wir uns auf diesen beschränken. Das zweite Integral können wir schreiben:

$$y_2 = y_1\int\frac{\vartheta_0(v+\alpha)\cdot\vartheta_0(v)}{\vartheta_1\left(v+\frac{\alpha}{2}\right)^2}\,dw,$$

oder auch:

$$y_2 = y_1\int\left(1-\frac{1}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\left(w+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)dw.$$

Mithin erhalten wir den

Lehrsatz. *Den ersten Ausnahmefall bildet die Differentialgleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\left(\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha)\right)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\left(c_3 + c_4\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha) + k^2\cdot\operatorname{sn}^2 w\right),$$

$$c_3 = -1 - k^2 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha,$$

$$c_4 = \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\alpha.$$

Die beiden Integrale lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1\left(v+\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}\,e^{-\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)}v}$$

$$y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sn}^2 \left(w + \frac{\alpha}{2} \right)} \right) dw .$$

Die drei anderen Ausnahmefälle folgen sus dem soeben betrachteten durch die vorhin näher definirten Substitutionen.

Wir nehmen jetzt den Fall $c_2 = 2$, welcher in der zweiten Note ausführlicher behandelt worden ist.

Setzen wir

$$\omega = u + \alpha ,$$

so zeigte es sich, dass $\operatorname{sn}^2 u$ eindeutig bestimmt ist, so dass die beiden Werthe von ω, die zu den beiden Integralen gehören, die Form haben:

$$\omega_1 = u + \alpha ,$$
$$\omega_2 = - u + \alpha .$$

Hieraus folgt, dass vier Ausnahmefälle eintreten können:

I. $u = 0$,

II $u = K$,

III. $u = K + iK'$,

IV. $u = iK'$.

Im ersten Falle hat ein Integral die Form:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v + a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v + \lambda \cdot w} .$$

Hierin ist aber $\lambda = 0$ zu setzen, wie aus der allgemeinen Formel folgt:

$$\lambda = - k^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \omega \cdot \operatorname{sn} (\omega - \alpha) .$$

Mit Hülfe weniger Schlüsse ergiebt sich dann der

Lehrsatz. *Den ersten Ausnahmefall bildet die Differentialgleichung:*

$$\frac{d^2 \varphi(v)}{dw^2} + 2k^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn} (w + \alpha) \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v) (-1 - k^2 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha + 2k^2 \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn} (w + \alpha)) .$$

Die beiden Integrale derselben lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

und

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\mathrm{sn}^2(w+\alpha)} .$$

Im zweiten Falle $u = K$ nimmt das eine Integral die Form an:

$$y_1 = \frac{\vartheta_2(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)} v + \lambda \cdot w} ,$$

wobei gesetzt ist:

$$\lambda = -k^2 \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{dn}\,\alpha} .$$

Da die Beziehung besteht:

$$-k^2 \frac{\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{dn}\,\alpha} - \frac{d \log \vartheta_3(a)}{d\alpha} + \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d\alpha} = 0 ,$$

so können wir das Integral auch schreiben:

$$y_1 = \frac{\vartheta_2(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v} .$$

Somit erhalten wir den

Lehrsatz. *Den zweiten Ausnahmefall bildet die Differentialgleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + 2k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha) \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(-1 + k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha + 2k^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha)) .$$

Die beiden Integrale lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_2(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

und

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\mathrm{cn}^2(w+\alpha)} .$$

Genau so folgt der

Lehrsatz. *Den dritten Ausnahmefall bildet die Gleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(-k^2 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha + 2k^2 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)) .$$

Die beiden Integrale lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_3(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{dw}{\operatorname{dn}^2(w+\alpha)} .$$

Vom vierten Falle können wir absehen.

§ 2.

Specielle Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch zwei weitere besitzen.

Auch diese Differentialgleichungen sind in der zweiten Note behandelt. Als Form derselben ergab sich:

$$(1)\quad \frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + k^2(\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\beta))\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(c_4 + c_6 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + c_7 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\beta)) .$$

Die beiden Integrale haben im allgemeinen Falle die Form:

$$y = \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v + \lambda \cdot w} ,$$

wobei λ aus der Gleichung bestimmt ist:

$$(2)\quad 2\lambda = k^2(\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\alpha-\omega) + \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\beta-\omega)) .$$

Setzen wir nun:

$$\omega = u + \frac{\alpha+\beta}{2} ,$$

so zeigte es sich, dass $\operatorname{sn}^2 u$ wiederum eindeutig bestimmt ist, so dass die beiden Werthe von ω, die zu den Integralen gehören, die Form haben:

$$\omega_1 = \quad u + \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\omega_2 = -u + \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Es sind daher wiederum vier Ausnahmefälle möglich:

$$u = 0, \quad u = K, \quad u = K + iK', \quad u = iK'.$$

Nehmen wir erstens $u = 0$ an, so folgt als Werth des einen Integrals:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1\left(v + \frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{a+b}{2}\right)} v + \lambda \cdot w},$$

wobei gesetzt ist:

$$2\lambda = k^2 (\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{sn}\beta) \operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Da aber die Beziehungen bestehen:

$$\frac{d\log\vartheta_0(a)}{d\alpha} = \frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{a+b}{2}\right)}{d\frac{\alpha}{2}} + \frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{a-b}{2}\right)}{d\frac{\alpha}{2}}$$

$$- k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} = \frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{a+b}{2}\right)}{d\frac{\alpha}{2}} - \frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{a-b}{2}\right)}{d\frac{\alpha}{2}}$$

$$+ k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

so können wir y_1 schreiben:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1\left(v + \frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)} e^{-\left(\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} + \frac{\vartheta_0'(b)}{\vartheta_0(b)}\right)\frac{v}{2}}. \tag{3}$$

Die Coefficienten nehmen die Form an:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
c_6 &= \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha - k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{2},\\
c_7 &= \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta + k^2\cdot\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{2},
\end{aligned}
$$

$$
c_4 = -1 - k^2 + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2\beta) - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}
$$

$$
- k^2\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}(\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha - \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta) + \lambda^2 .
$$

Das zweite Integral können wir schreiben:

$$
y_2 = y_1\int\frac{\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v+b)}{\vartheta_1\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}dw
$$

oder auch:

$$
(5)\qquad y_2 = y_1\int\left(1 - \frac{1}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\left(w+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)dw .
$$

Damit ist dieser Ausnahmefall erledigt.

Im zweiten Falle wird $u = K$, mithin nimmt das eine Integral die Form an:

$$
y_1 = \frac{\vartheta_2\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}e^{-\frac{\vartheta_3'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{a+b}{2}\right)}v+\lambda\cdot w},
$$

wobei gesetzt ist:

$$
2\lambda = -k^2(\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta)\frac{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}} .
$$

Hieraus folgt ähnlich wie im ersten Falle:

$$
(6)\qquad y_1 = \frac{\vartheta_2\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}e^{-\left(\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}+\frac{\vartheta_0'(b)}{\vartheta_0(b)}\right)\frac{v}{2}},
$$

während die Coefficienten die Form annehmen:

(7)
$$c_6 = \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha + k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\,\frac{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}{2},$$

$$c_7 = \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta - k^2\cdot\operatorname{sn}\beta\,\frac{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}{2},$$

$$c_4 = -1 - k^2 + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2\beta) - k^2\,\frac{\operatorname{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$+ k^2\,\frac{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}(\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha + \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta) + \lambda^2 .$$

Das zweite Integral lässt sich in die Form bringen:

(8)
$$y_2 = y_1\left(k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot w + \left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\int\frac{dw}{\operatorname{cn}^2\left(w+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)$$

Damit ist der zweite Fall erledigt.

Im dritten Falle wird:

$$\omega = \frac{\alpha+\beta}{2} + K + iK' ,$$

also nimmt ein Integral die Form an:

$$y_1 = \frac{\vartheta_3\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}\,e^{-\frac{\vartheta_2'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}v + \lambda\cdot w},$$

wobei gesetzt ist

$$2\lambda = -(\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta)\,\frac{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

oder auch:

$$(9)\qquad y_1 = \frac{\vartheta_3\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)} e^{-\left(\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}+\frac{\vartheta_0'(b)}{\vartheta_0(b)}\right)\frac{v}{2}} .$$

Die Coefficienten werden:

$$(10)\qquad \begin{aligned} c_6 &= \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha + \operatorname{sn}\alpha\,\frac{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}{2},\\ c_7 &= \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta - \operatorname{sn}\beta\,\frac{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}{2},\end{aligned}$$

$$c_4 = -1-k^2+k^2(\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{sn}^2\beta) - \frac{\operatorname{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$+\frac{\operatorname{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}(\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha+\operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta)+\lambda^2 .$$

Das zweite Integral endlich nimmt die Form an:

$$(11)\quad y_2 = y_1\left(k^4\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,w + \left(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\int\frac{dw}{\operatorname{dn}^2\left(w+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right).$$

Im letzten Falle endlich wird:

$$w = \frac{\alpha+\beta}{2} + iK' ,$$

$$y_1 = \frac{\vartheta_0\left(v+\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+b}{2}\right)}v+\lambda\cdot w} ,$$

wobei gesetzt ist:

$$2\lambda = \frac{\operatorname{sn}\alpha-\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}} .$$

Es folgt dann ebenso wie früher für y_1 die zweite Form:

$$(12)\qquad y_1 = \frac{\vartheta_0\left(v + \frac{a+b}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\left(\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} + \frac{\vartheta_0'(b)}{\vartheta_0(b)}\right)\frac{v}{2}}\,.$$

Die Coefficienten werden:

$$(13)\qquad \begin{aligned} c_6 &= \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha - \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{2}\,,\\ c_7 &= \operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta + \frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{2}\,,\end{aligned}$$

$$c_4 = -1 - k^2 + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2\beta) - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$- \frac{1}{\operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}(\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha - \operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta) + \lambda^2\,.$$

Das zweite Integral endlich wird:

$$(14)\qquad y_2 = y_1\left(w - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\int\operatorname{sn}^2\left(w+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dw\right)\,.$$

§ 3.

Specielle Untersuchung aller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale denselben zweifachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen weiteren besitzen.

Die in der Ueberschrift näher charakterisirten Differentialgleichungen bilden den Gegenstand der dritten Note. Sie können in die Form gebracht werden:

$$(1)\qquad \frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + c_2\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(c_3 + c_4\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha) + c_5\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2 w)\,,$$

wobei c_2 einen der Werthe annehmen kann 1, 2, 3, 4.

Ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung hat sicherlich die Form:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdot\vartheta_1(v+\nu_2)}{\vartheta_0(v)^2}\, e^{-\sum \frac{\vartheta_0'(\nu_\varepsilon)}{\vartheta_0(\nu_\varepsilon)} v + \lambda\cdot w},$$

folglich wird das zweite:

$$y_2 = y_1 \int e^{-\int(c_1 + c_2\cdot k^2\cdot \operatorname{sn} \alpha\cdot \operatorname{sn} w\cdot \operatorname{sn}(w+\alpha))dw} \cdot \frac{dw}{y_1^2}.$$

Soll dasselbe aufhören doppeltperiodisch zu sein, so muss erstens von Perioden abgesehen die Gleichung bestehen:

$$(2) \qquad c_2\cdot a = 2(\nu_1 + \nu_2),$$

zweitens aber die Beziehung stattfinden:

$$(3) \quad -c_1 - c_2 \frac{d\log\vartheta_0(a)}{da} + 2\left(\frac{d\log\vartheta_0(\nu_1)}{d\omega_1} + \frac{d\log\vartheta_0(\nu_2)}{d\omega_2}\right) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen lehrt, dass $\nu_1 + \nu_2$ oder was dasselbe sagt $\omega_1 + \omega_2$ eine bekannte Grösse ist. Wir wollen dieselbe durch ν resp. ω bezeichnen.

Da ferner die Beziehung besteht:

$$\frac{d\log\vartheta_0(\nu_1)}{d\omega_1} + \frac{d\log\vartheta_0(\nu_2)}{d\omega_2} = \frac{d\log\vartheta_0(\nu)}{d\omega} + k^2\cdot\operatorname{sn}\omega_1\cdot\operatorname{sn}\omega_2\cdot\operatorname{sn}\omega,$$

so können wir die zweite Gleichung schreiben:

$$(4) \quad 2k^2\cdot\operatorname{sn}\omega_1\cdot\operatorname{sn}\omega_2\cdot\operatorname{sn}\omega = c_1 + c_2\cdot\frac{d\log\vartheta_0(a)}{da} - 2\frac{d\log\vartheta_0(\nu)}{d\omega}.$$

Diese Gleichung drückt das Product $\operatorname{sn}\omega_1\cdot\operatorname{sn}\omega_2 = s_2'$ in bekannter Weise durch die Constante c_1 aus.

Wir können die Resultate in eine andere Form bringen. Aus der Gleichung:

$$\omega_1 = \omega - \omega_2$$

folgt:

$$\operatorname{sn}\omega_1 = \frac{\operatorname{sn}\omega\cdot\operatorname{cn}\omega_2\cdot\operatorname{dn}\omega_2 - \operatorname{sn}\omega_2\cdot\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\omega\cdot\operatorname{sn}^2\omega_2}$$

oder also:

$$s_2' = \operatorname{sn}\omega_1\cdot\operatorname{sn}\omega_2 = \frac{\operatorname{sn}\omega\cdot u_2 - x_2\cdot\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{1 - k^2\cdot x_2\cdot\operatorname{sn}^2\omega}$$

oder auch:

$$\operatorname{sn}\omega\cdot u_2 = x_2\cdot\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega + (1 - k^2\cdot x_2\cdot\operatorname{sn}^2\omega)\, s_2'.$$

Eine analoge Gleichung ergiebt sich für x_1. Durch Addition folgt:

$$\operatorname{sn}\omega \cdot u = s_1 \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega + (2 - k^2 \cdot s_1 \cdot \operatorname{sn}^2\omega)\, s_2' .$$

Quadriren wir die vorletzte Gleichung, so ergiebt sich nach Fortbebung eines Factors die quadratische Gleichung:

$$x^2 - (\operatorname{sn}^2\omega - 2\operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot s_2' + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot s_2'^2)\, x + s_2'^2 = 0 ,$$

deren Wurzeln die Grössen x_1 und x_2 sind.

Hieraus folgt die Beziehung:

$$(5)\quad s_1 = \operatorname{sn}^2\omega_1 + \operatorname{sn}^2\omega_2 = \operatorname{sn}^2\omega - 2\operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot s_2' + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot s_2'^2 .$$

Zu diesen Gleichungen treten die übrigen des Problems, welche in der dritten Note näher ausgeführt worden sind. Vor Allem sind hier die beiden Gleichungen von Bedeutung:

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot u_\varepsilon = \delta_\varepsilon \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_\varepsilon \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha - 2u\frac{\delta_\varepsilon}{d} ,$$
$$\varepsilon = 1, 2 ,$$

wobei zu bemerken ist, dass im Falle $c_2 = 1$ an Stelle von $c_1 : c_1'$ zu setzen ist.

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe ein, die wir soeben für u_ε und u gefunden haben, so ergiebt sich nach einigen leichten Rechnungen eine quadratische Gleichung mit den Unbekennten x_1 und x_2. Dieselbe hat die Form:

$$(6)\qquad 2A \cdot x_1^2 + B \cdot x + C = 0 ,$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
A &= k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_2(\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega - \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha) \\
&\quad - k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot s_2' \cdot c_2 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot c_1 , \\
B &= -2\operatorname{sn}\omega \cdot c_1 - s_1(A + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega) \\
&\quad + 2k^2 \cdot s_2' \cdot \operatorname{sn}^2\alpha (c_2 - 2) + 2k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot s_1 \cdot s_2' , \\
C &= s_1(2\operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega + c_1 \cdot \operatorname{sn}\omega) + 4s_2 - k^2 \cdot s_1 \cdot s_2'(c_2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha + 2\operatorname{sn}^2\omega).
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung können wir auch durch die beiden Gleichungen ersetzen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} B + 2A \cdot s_1 &= 0 , \\ C - 2A \cdot s_2'^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Zur Umformung derselben bemerken wir, dass erstens für s_1 der Werth gefunden worden ist:

$$s_1 = \operatorname{sn}^2\omega - 2\operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot s_2' + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot s_2'^2 ,$$

dass zweitens gesetzt werden darf:

$$c_1 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot s_2' + c' ,$$

$$c' = c_2 \frac{d \log \vartheta_0(\alpha)}{d\alpha} - 2 \frac{d \log \vartheta_0(\nu)}{d\omega} .$$

Unter diesen Voraussetzungen nimmt die erste Gleichung die Form an:

$$(8) \qquad p_0 \cdot s_2'^3 + p_1 \cdot s_2'^2 + p_2 \cdot s_2' + p_3 = 0 ,$$

wobei gesetzt ist:

$$p_0 = k^6 \cdot \operatorname{sn}^4\omega \cdot \operatorname{sn}^2\alpha (4 - c_2) ,$$

$$p_1 = -7k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega + 3k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot c_2$$
$$- k^4 \cdot \operatorname{sn}^3\omega \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot c_2 + k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^3\omega \cdot c' ,$$

$$p_2 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega (k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega - 2)$$
$$+ k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha (c_2 - 2)(2 - 2\operatorname{cn}^2\omega \cdot \operatorname{dn}^2\omega - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega)$$
$$+ 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot c_2$$
$$- 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot c' ,$$

$$p_3 = k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{sn}\alpha(-c_2 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega + \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega (c_2 - 2))$$
$$+ \operatorname{sn}\omega (k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega - 2) c' .$$

Die zweite Gleichung wird:

$$(9) \qquad q_0 \cdot s_2'^3 + q_1 \cdot s_2'^2 + q_2 \cdot s_2' + q_3 = 0 ,$$

wobei gesetzt ist:

$$q_0 = k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{sn}^2\alpha (c_2 - 4) ,$$

$$q_1 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot c_2$$
$$+ k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega (\operatorname{sn}^2\omega - 2\operatorname{sn}^2\alpha) ,$$

$$q_2 = 4 - 4\operatorname{cn}^2\omega \cdot \operatorname{dn}^2\omega - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega \cdot c_2 - 2\operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega \cdot c' ,$$

$$q_3 = 2\operatorname{sn}^2\omega \cdot \operatorname{cn}\omega \cdot \operatorname{dn}\omega + \operatorname{sn}^2\omega \cdot c' .$$

Bis hierher gelten die Untersuchungen allgemein. Jetzt specialiren wir und setzen zuerst

$$c_2 = 1 .$$

Dann können wir erstens annehmen, dass:

$$\omega = \frac{\alpha}{2}$$

sei. Unter dieser Voraussetzung folgt;

$$c' = k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn} \alpha .$$

Ferner erhalten wir für die Grössen p die folgenden Werthe:

$$p_0 = 3k^6 \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha ,$$

$$p_1 = -4k^4 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \left(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}\right) + k^4 \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}^3 \frac{\alpha}{2} ,$$

$$p_2 = k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha - 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} - 4k^2(1+k^2) \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} + 8k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2} ,$$

$$p_3 = -k^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}^3 \frac{\alpha}{2} - k^2 \cdot \operatorname{sn}^3 \alpha \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \left(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}\right) .$$

Dann aber folgt leicht die Zerlegung:

$$p_0 \cdot s_2'^3 + p_1 \cdot s_2'^2 + p_2 \cdot s_2' + p_3 = F_1 \cdot F_2 ,$$

$$F_1 = 3k^4 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot s_2'^2 - k^2 \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn} \alpha \left(- \frac{4}{\operatorname{sn}^2 \alpha} + \frac{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) s_2'$$

$$+ k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} ,$$

$$F_2 = k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot s_2' - \frac{\operatorname{sn}^3 \alpha}{\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} .$$

Für die Grössen q ergeben sich die Werthe:

$$q_0 = -3k^4 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha ,$$

$$q_1 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{cn} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{dn} \frac{\alpha}{2} - k^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} ,$$

$$q_2 = 4 - \frac{\operatorname{sn}^2 \alpha}{\operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}} ,$$

$$q_3 = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} .$$

Es folgt hieraus die weitere Zerlegung:

$$q_0 \cdot s_2'^3 + q_1 \cdot s_2'^2 + q_2 \cdot s_2' + q_3 = F_1 \cdot F_3 ,$$

$$F_3 = - \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_2' + \frac{\operatorname{sn}\alpha}{k^2 \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} .$$

Es tritt also in beiden Fällen der Factor F_1 auf, so dass beiden Gleichungen Genüge geleistet wird, wenn die Gleichung

$$F_1 = 0$$

besteht.

Erwägen wir die Beziehung:

$$2k^2 \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot s_2' = c_1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn}\alpha ,$$

so können wir die Gleichung auch schreiben:

$$(10)\quad 3c_1^2 - 2\operatorname{sn}\alpha\left(-\frac{1}{\operatorname{sn}^2\alpha} + \frac{1 + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)c_1 + k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}$$
$$- 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha = 0 .$$

Es ist dieses eine Bedingungsgleichung für die einzige Constante, welche in der Differentialgleichung noch willkürlich geblieben war. Die übrigen haben die Werthe:

$$(11)\quad \begin{aligned} c_3 &= 2c_1^2 - 6c_1\frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1+k^2) , \\ c_4 &= -2c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 2\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha , \\ c_5 &= 4 . \end{aligned}$$

Ferner folgt leicht, dass die Bedingungsgleichung:

$$k^2 \cdot s_1 = c_1^2 - 2c_1 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha$$

durch unseren Werth, den wir für s_1 gefunden haben, unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung von c_1 erfüllt wird. Die Werthe $\operatorname{sn}^2\omega_1$, $\operatorname{sn}^2\omega_2$ sind dann aus der Gleichung bestimmt:

$$(12)\quad x^2 - s_1 \cdot x + s_2'^2 = 0 ,$$

während die Vorzeichen aus den beiden Gleichungen sich ergeben:

(13) $k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot u_\varepsilon = \delta_\varepsilon \cdot c_1 + k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_\varepsilon \cdot \mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha - 2u\frac{\delta_\varepsilon}{d}, \quad \varepsilon = 1, 2.$

Wir erhalten also den

Lehrsatz. *Im Falle* $c_2 = 1$ *hört ein Integral der Differentialgleichung* (1) *auf doppeltperiodisch zu sein, wenn erstens* c_1 *der Gleichung:*

$$3c_1^2 - 2\,\mathrm{sn}\,\alpha\left(-\frac{4}{\mathrm{sn}^2\alpha} + \frac{1 - 2k^2\cdot\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$+ k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2} - 4k^2\cdot\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2} + 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 0$$

Genüge leistet. Die übrigen Coefficienten und das doppeltperiodische Integral der Differentialgleichung folgen aus den Gleichungen (11), (12), (13).

Hiermit sind freilich noch nicht alle Möglichkeiten erschöpft. Der Fall

$$\omega = \frac{\alpha}{2}$$

ist nur einer der vier möglichen, in denen die beiden Grössen:

$$2(\omega_1 + \omega_2) \text{ und } \alpha$$

sich nur um Perioden von einander unterscheiden. Die andern drei Fälle können genau so einfach behandelt werden. Wir glauben um so eher hiervon absehen zu können, als das ganze Problem noch in völlig anderer Weise aufgefasst werden kann, welche sofort die acht möglichen Werthe von c_1 ergiebt.

In der That, für die Grösse

$$s_2 = \mathrm{sn}^2\omega_1\cdot\mathrm{sn}^2\omega_2$$

haben wir in der angegebenen Arbeit die folgende quadratische Gleichung gefunden:

$$r_0\cdot s_2^2 + r_1\cdot s_2 + r_2 = 0\,,$$

wenn unter r_0, r_1, r_2 die folgenden Grössen verstanden werden:

$r_0 = 4k^4\cdot\mathrm{sn}^4\alpha\,,$

$r_1 = -9c_1^4\cdot\mathrm{sn}^4\alpha + 36c_1^3\cdot\mathrm{sn}^3\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha - 2c_1^2\cdot d_2 + 4c_1\cdot d_3 - d_4\,,$

$r_2 = \mathrm{sn}^2\alpha\,(c_1\cdot s_1 + 2u)^2\,,$

$$d_2 = 16\,\mathrm{sn}^2\alpha - 22(1+k^2)\,\mathrm{sn}^4\alpha + 27k^2\cdot\mathrm{sn}^6\alpha\ ,$$
$$d_3 = \mathrm{sn}^3\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\,(9k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 4 - 4k^2)\ ,$$
$$d_4 = 8k^2\cdot\mathrm{sn}^4\alpha\cdot\mathrm{cn}^2\alpha\cdot\mathrm{dn}^2\alpha + k^4\cdot\mathrm{sn}^8\alpha\ .$$

Soll nun einer der Ausnahmefälle eintreten, so muss die Discriminante der Gleichung verschwinden, oder also die Gleichung bestehen:

$$r_1^2 - 4r_0\cdot r_2 = 0\ .$$

Es ist das eine Gleichung vom achten Grade mit der Unbekannten c_1. Dieselbe lässt sich zunächst, wie unmittelbar klar ist, in die beiden Gleichungen vom 4ten Grade zerlegen:

$$r_1 - 4k^2\cdot\mathrm{sn}^3\alpha(c_1\cdot s_1 + 2u) = 0\ ,$$
$$r_1 + 4k^2\cdot\mathrm{sn}^3\alpha(c_1\cdot s_1 + 2u) = 0\ .$$

Die Ausrechnung ergiebt als Werth von $k^2(c_1 s_1 + 2u)$ den Ausdruck:

$$3c_1^3 - 8c_1^2\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + c_1(-4 - 4k^2 + 7k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)$$
$$- 2k^2\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\ .$$

Es folgt dann leicht, dass die beiden biquadratischen Gleichungen sich in je zwei quadratische Gleichungen zerlegen lassen und zwar die erste in die folgenden:

$$(14)\qquad 3c_1^2 - 2\,\mathrm{sn}\,\alpha\cdot c_1\left(-\frac{4}{\mathrm{sn}^2\alpha} + \frac{1+2k^2\cdot\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$
$$+ k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2} - 4k^2\cdot\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2} + 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 0\ ,$$

$$(15)\qquad 3c_1^2 - 2\,\mathrm{sn}\,\alpha\cdot c_1\left(-\frac{4}{\mathrm{sn}^2\alpha} + \frac{2+k^2\cdot\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$
$$+ \frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}} - \frac{4}{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}} + 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 0\ .$$

Die beiden andern Gleichungen erhalten wir, indem wir uns an

Stelle von α: $\alpha + 2K$ gesetzt denken. Hierbei geht der Reihe nach über:

$$\operatorname{sn}\alpha, \ \operatorname{cn}\alpha, \ \operatorname{dn}\alpha, \ \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \text{ in :}$$

$$-\operatorname{sn}\alpha, \quad -\operatorname{cn}\alpha, \quad \operatorname{dn}\alpha, \quad \frac{\operatorname{cn}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{dn}\frac{\alpha}{2}} .$$

Der Beweis der Richtigkeit der Behauptung beruht vor Allem auf den Beziehungen, die zwischen den elliptischen Functionen mit dem Argumente α und $\frac{\alpha}{2}$ bestehen. Aus diesen greifen wir die eine heraus:

$$\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + 1 = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha\left(1 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}} .$$

Die eine der vier gefundenen quadratischen Gleichungen ist aber mit der vorhin gefundenen identisch, so dass wir einerseits das frühere Resultat wiedergefunden, andererseits die nothwendigen Ergänzungen gegeben haben.

Hiermit wollen wir den Fall $c_2 = 1$ einstweilen verlassen und wenden uns zu dem zweiten Falle

$$c_2 = 2 .$$

In diesem Falle können wir erstens annehmen:

$$\omega = \alpha ,$$

zweitens folgt:

$$c' = 0$$

oder

$$c_1 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot s_2' .$$

Unter solchen Umständen nehmen die Ausdrücke für die Coefficienten p die Form an:

$$p_0 = 2k^6 \cdot \operatorname{sn}^6\alpha ,$$
$$p_1 = -6k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha ,$$
$$p_2 = 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha\,(-2 - 2k^2 + 3k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha) ,$$
$$p_3 = -2k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha .$$

Ersetzen wir s_2' durch c_1, so ergiebt sich also für c_1 die cubische Gleichung:

$$(16)\quad c_1^3 - 6c_1^2 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 4(-2 - 2k^2 + 3k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha)\, c_1 - 8k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha = 0\ .$$

Genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn für die Grössen q ihre Werthe eingesetzt werden, so dass in diesem Falle die beiden Gleichungen in eine einzige zusammenfallen.

Dass dieses Resultat mit den sonstigen Bedingungen im Einklang ist, folgt leicht. Zunächst ergeben sich für die übrigen Coefficienten die Werthe:

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{2c_1}{\operatorname{sn}\alpha}\left(\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + \frac{2}{c_1}\right) + 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1 + k^2)\,, \\ (17)\quad c_4 &= -2c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 4\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha\,, \\ c_5 &= 2\ . \end{aligned}$$

Dann aber wird die Gleichung:

$$k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_4 \cdot s_1 = -4c_1$$

durch den von uns gefundenen Werth von s_1:

$$s_1 = \operatorname{sn}^2\alpha - 2\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot s_2' + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_2'^2$$

unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung von c_1 in der That erfüllt.

Die Werthe $\operatorname{sn}^2\omega_1$ und $\operatorname{sn}^2\omega_2$, die zu dem doppeltperiodischen Integrale gehören, folgen aus der Gleichung:

$$(18)\qquad x^2 + \frac{4c_1}{k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_4}\, x + \frac{c_1^2}{4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha} = 0\ ,$$

während das Vorzeichen von ω_1 und ω_2 aus den Gleichungen zu bestimmen ist:

$$(19)\qquad c_1 + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_\varepsilon \cdot \operatorname{sn}(\omega_\varepsilon - \alpha) = 0\ .$$

Damit sind wir wieder am Ziele und erhalten den

Lehrsatz. *Im Falle $c_2 = 2$ hört ein Integral der Differentialgleichung* (1) *auf, doppeltperiodisch zu sein, wenn erstens c_1 der Gleichung:*

$$c_1^3 - 6c_1^2 \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 4(-2 - 2k^2 + 3k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha)\, c_1 - 8k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha = 0$$

Genüge leistet. Die übrigen Coefficienten und das doppeltperiodische Integral der Differentialgleichung folgen aus den Gleichungen (17), (18), (19).

Die übrigen Werthe von c_1 brauchen nicht näher angegeben zu werden.

Hiermit wollen wir auch diesen Fall einstweilen verlassen und wenden uns zu dem Falle

$$c_2 = 3 \ .$$

In diesem Falle können wir erstens annehmen, dass

$$\omega = \frac{3\alpha}{2}$$

ist. Der Werth von c' wird:

$$c' = k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\right) \cdot$$

Um zu einfachen Darstellungen zu gelangen, müssen vor Allem die Beziehungen berücksichtigt werden, die zwischen den elliptischen Functionen mit den Argumenten α, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\alpha}{2}$ bestehen. Wir greifen die folgenden heraus:

$$\left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} - \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\right) = -2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\left(1 + k^2\cdot\operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} + \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{3\alpha}{2} = \left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} + \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot F\,,$$

$$F = -1 + \frac{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\,\frac{1 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}{2}\Bigg)\,,$$

$$\operatorname{cn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{3\alpha}{2} = -\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\right)$$

$$+ \frac{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha}{2\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dann können wir die Coefficienten p und q in die folgende Form bringen:

$$\frac{p_0}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}} = k^4\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2},$$

$$\frac{p_1}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{k^2\cdot\operatorname{sn}^3\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} + \operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\left(3k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha - 2\,\frac{k^2\cdot\operatorname{sn}^3\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$
$$-3k^4\cdot\operatorname{sn}^3\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{3^2\alpha}{2},$$

$$\frac{p_2}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}} - 4 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2} + \frac{\operatorname{cn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}}f,$$

$$f = 2\operatorname{sn}\alpha\cdot\frac{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}} + 2k^2\cdot\operatorname{sn}^3\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}$$
$$-4\operatorname{sn}\alpha + \frac{2\operatorname{sn}^3\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{p_3}{k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}} + 3\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$$
$$+\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\left(2 - \frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)\operatorname{sn}\alpha - k^2\cdot\operatorname{sn}^3\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2},$$

$$q_0 = -k^4\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2},$$

$$q_1 = k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\left(-4 + \frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}} + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$+2k^4\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}^3\alpha + k^2\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}^3\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$q_2 = 4 - 3k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2} - \operatorname{cn}\frac{3\alpha}{2} \cdot \operatorname{dn}\frac{3\alpha}{2}\left(-\frac{4\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$q_3 = -2\frac{\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{sn}^3\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Die diesen Werthen von p und q entsprechenden cubischen Gleichungen müssen zusammen bestehen. Wir erhalten den gemeinsamen Factor am einfachsten, wenn wir die Gleichungen addiren. Es ergiebt sich dann die quadratische Gleichung:

$$\left(p_1 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot q_1\right)s_2'^2 + \left(p_2 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot q_2\right)s_2' + p_3 + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot q_3 = 0\,.$$

Es zeigt sich, dass die drei Coefficienten dieser quadratischen Gleichung den gemeinsamen Factor:

$$\left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} - \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} + \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)$$

besitzen. Sehen wir von demselben ab, so können wir die Gleichung schreiben:

$$(20)\qquad P_1\cdot s_2'^2 - P_2\cdot s_2' + P_3 = 0\,,$$

$$P_1 = k^2\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\,,$$

$$P_2 = \frac{2}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}}\left(1 - k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{sn}\alpha\left(\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} - \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\cdot g\right)$$

$$g = -1 + \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} + \frac{k^2}{2}\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}$$

$$P_3 = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - 2\,\frac{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}}\right).$$

Es müsste nun nachgewiesen werden, dass die linke Seite dieser Gleichung ein Factor der linken Seiten der beiden cubischen Gleichungen ist. Wir können aber von diesem Beweise absehen, wenn wir zu den Betrachtungen zurückgehen, die im Falle $c_2 = 1$ angestellt worden sind. Auch im Falle $c_2 = 3$ ergiebt sich eine quadratische Gleichung, deren Discriminante im Ausnahmefall der Null gleich sein muss. Es ist das Gleichung (19) § 2 in der dritten Note:

$$d^2(r - 9\operatorname{sn}^2\alpha \cdot k^4 \cdot s_1) + 8u^2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha = 0\,.$$

Die Discriminante derselben ist vom Grade 8 in c_1, also auch in s_2'. Dieselbe zerfällt in vier quadratische Factoren, von denen der eine der soeben entwickelte ist. Dabei lautet die Beziehung zwischen c_1 und s_2':

$$2k^2 \cdot \operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2} \cdot s_2' = c_1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\right),$$

so dass aus der obigen quadratischen Gleichung für s_2' unmittelbar eine solche für c_1 hergestellt werden kann. Für die noch fehlenden Coefficienten der Differentialgleichung ergeben sich die Werthe:

$$
\begin{aligned}
c_3 &= -2c_1\,\frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1 + k^2)\,, \\
(21)\qquad c_4 &= -2c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 6\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha\,, \\
c_5 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Werthe $\operatorname{sn}^2\omega_1$ und $\operatorname{sn}^2\omega_2$, die zu dem doppeltperiodischen Integral gehören, folgen aus der Gleichung:

$$(22)\quad x^2 - \left(\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2} - 2\operatorname{cn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{dn}\frac{3\alpha}{2}\cdot s_2' + k^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{3\alpha}{2}\cdot s_2'^2\right)x + s_2'^2 = 0\,;$$

die Vorzeichen von ω_1 und ω_2 sind etwa aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$(23)\quad 3k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot u_\varepsilon = \delta_\varepsilon\cdot c_1 + 3k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\omega_\varepsilon\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha - 2u\cdot\frac{\delta_\varepsilon}{d}\,,$$

$$\varepsilon = 1, 2\,.$$

Damit sind wir am Ziel und erhalten den

Lehrsatz. *Im Falle $c_2 = 3$ hört ein Integral der Differentialgleichung (1) auf, doppeltperiodisch zu sein, wenn s_2' erstens der Gleichung:*

$$P_1 \cdot s_2'^2 - P_2 \cdot s_2' + P_3 = 0$$

Genüge leistet. Die Coefficienten der Differentialgleichung und das doppeltperiodische Integral folgen aus den vorher angegebenen Gleichungen.

Die noch fehlenden sechs Werthe von c_1 folgen ähnlich wie im Falle $c_2 = 1$.

Wir kommen nunmehr zum letzten Falle $c_2 = 4$.

In diesem Falle haben wir an Stelle von c_1 zu setzen c_1' oder was dasselbe sagt 2λ.

Die beiden Bedingungsgleichungen, die zum Ausnahmefall führen, lauten:

$$4a \equiv 2(\nu_1 + \nu_2) ,$$

$$2\lambda = -4 \frac{d \log \vartheta_0(a)}{da} + 2\left(\frac{d \log \vartheta_0(\nu_1)}{d\omega_1} + \frac{d \log \vartheta_0(\nu_2)}{d\omega_2}\right) .$$

Wir wählen zunächst die Beziehung:

(24) $$\nu_1 + \nu_2 = 2a ,$$

dann können wir die zweite Gleichung schreiben:

(25) $$2\lambda = 2k^2 \cdot \operatorname{sn} 2\alpha \cdot s_2' - 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn} 2\alpha ,$$

so dass die Grösse c' in unserem Falle den Werth annimmt:

$$c' = -2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn} 2\alpha .$$

Ferner wird:

$$s_1 = \operatorname{sn}^2 2\alpha - 2 \operatorname{cn} 2\alpha \cdot \operatorname{dn} 2\alpha \cdot s_2' + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 2\alpha \cdot s_2'^2 .$$

Die Coefficienten der cubischen Gleichung:

$$p_0 \cdot s_2'^3 + p_1 \cdot s_2'^2 + p_2 \cdot s_2' + p_3 = 0$$

nehmen die Form an:

$$p_0 = 0 ,$$

$$p_1 = -k^4 \cdot \operatorname{sn}^2 2\alpha (2 \operatorname{sn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2 2\alpha (1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha)) ,$$

$$p_2 = -2k^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}^4 2\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} (1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha) - 8k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 2\alpha + 4k^2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2 2\alpha ,$$

$$p_3 = 2\ {}^2 \cdot \operatorname{sn}^2 2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4 2\alpha (1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha) ,$$

so dass wir also eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_2' erhalten. Genau dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir die Werthe der Grössen q einsetzen, da sich die Beziehung ergiebt:

$$q_i = -k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot p_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Wir erhalten also thatsächlich eine einzige quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_2'. Dieselbe kann geschrieben werden:

$$(26) \qquad Q_1 \cdot s_2'^2 - Q_2 \cdot s_2' + Q_3 = 0\,,$$

$$Q_1 = k^2(2\,\mathrm{sn}^2\alpha + \mathrm{sn}^2 2\alpha(1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha))\,,$$

$$Q_2 = -\frac{2\,\mathrm{sn}^2 2\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}(1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha) - 8 + 4(1 + k^2)\,\mathrm{sn}^2\alpha\,,$$

$$Q_3 = -2\,\mathrm{sn}^2\alpha + \mathrm{sn}^2 2\alpha(1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha)\,.$$

Im Falle $c_2 = 4$ ist nun der einzige noch willkürliche Coefficient der Differentialgleichung die Grösse c_3.

Es ist nicht schwer, aus der quadratischen Gleichung für s_2' eine solche für c_3 abzuleiten.

In der That, in der mehrfach citirten Arbeit findet sich die Gleichung:

$$k^2 \cdot s_1 = \lambda^2 - 4\lambda\,\frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + c_3'\,,$$

$$c_3' = 4\,\frac{\mathrm{cn}^2\alpha \cdot \mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha} - \frac{4}{\mathrm{sn}^2\alpha} + 4k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_3\,.$$

Setzen wir hierin die gefundenen Werthe von s_1 und λ ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$(27) \qquad 2k^2 \cdot s_2'\left(-\mathrm{cn}\,2\alpha \cdot \mathrm{dn}\,2\alpha + \frac{\mathrm{sn}^2 2\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}\right) = c_3' + 2k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,2\alpha\,,$$

so dass aus der quadratischen Gleichung für s_2' sofort eine solche für c_3 abgeleitet werden kann. Die Werthe der andern Coefficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(28) \qquad c_4 = 8\,\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha\,, \qquad c_5 = -2\,,$$

während λ aus einer der früheren Gleichungen bestimmt ist.

Die Werthe von $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$, die zu dem doppeltperiodischen Integral gehören, sind aus der Gleichung bestimmt:

$$(29)\quad x^2-(\mathrm{sn}^2 2\alpha-2\,\mathrm{cn}\,2\alpha\cdot\mathrm{dn}\,2\alpha\cdot s_2'+k^2\cdot\mathrm{sn}^2 2\alpha\cdot s_2'^2)x+s_2'^2=0\,.$$

Die Vorzeichen von ω_1 und ω_2 sind etwa aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$(30)\quad 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot u_\varepsilon=\lambda\cdot\delta_\varepsilon+2k^2\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}^2\omega_\varepsilon-u\frac{\delta_\varepsilon}{d}\,.$$

Somit finden wir den

Lehrsatz. *Im Falle* $c_4=4$ *hört ein Integral der Differentialgleichung auf, doppeltperiodisch zu sein, wenn erstens* s_2' *der Gleichung:*

$$Q_1\cdot s_2'^2-Q_2\cdot s_2'+Q_3=0$$

Genüge leistet. Die Coefficienten der Differentialgleichung und das doppeltperiodische Integral folgen aus den früheren Gleichungen.

Auf die weiteren Fälle braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir uns auf die Bildung des doppeltperiodischen Integrals beschränkt.

Wir gehen jetzt zu der Bildung des zweiten Integrales über. Es kann zunächst gezeigt werden, dass dieses uniform ist. Es folgt das aus allgemeinen Betrachtungen, kann aber auch folgendermassen bewiesen werden.

Setzen wir:

$$f_\varepsilon(v)=\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v+\nu_\varepsilon)}\,e^{\frac{d\log\vartheta_0(\nu_\varepsilon)}{d\omega_\varepsilon}w}\,,\quad \varepsilon=1,2,$$

$$f_3(v)=\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}\,e^{-\frac{d\log\vartheta_0(a)}{da}w}\,,$$

so wäre zu beweisen, dass die Entwickelungscoefficienten der Function:

$$e^{-c_1 w}\cdot f_1(v)^2\cdot f_2(v)^2\cdot f_3(v)^{c_2}$$

von $(v+\nu_\varepsilon)^{-1}$ um die Punkte $v=-\nu_\varepsilon$ der Null gleich sind oder dass, wenn wir etwa $\varepsilon=1$ setzen:

$$\frac{d}{dw}\left[e^{-c_1 w}\cdot f_2(v)^2\cdot f_3(v)^{c_2}\right]_{w=-\omega_1}=0$$

sein muss. Diese Gleichung ist aber nichts anderes, als eine der früheren Bedingungsgleichungen.

In der That, es ist:

$$\frac{df_2(v)}{dw} = -f_2(v)\cdot\frac{\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{cn}w\cdot\operatorname{dn}w - \operatorname{sn}\omega_2\cdot\operatorname{cn}\omega_2\cdot\operatorname{dn}\omega_2}{x-x_2},$$

$$\frac{df_3(v)}{dw} = -f_3(v)\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha),$$

also lautet die Gleichung:

$$-c_1 - c_2\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha) + 2\frac{u_1+u_2}{x_1-x_2} = 0.$$

Das ist aber in der That eine der Bedingungsgleichungen.

Wir wollen nun das zweite Integral schreiben:

$$(31)\qquad y_2 = y_1\int F(w)\,dw,$$

$$F(w) = \left[\frac{\vartheta_0\cdot\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_0(a)}\right]^{c_2}\frac{\vartheta_0(v)^4\cdot\vartheta_1(\nu_1)^2\cdot\vartheta_1(\nu_2)^2}{\vartheta_0^4\cdot\vartheta_1(v+\nu_1)^2\cdot\vartheta_1(v+\nu_2)^2},$$

dann folgt, dass wir in allen Fällen setzen können:

$$y_2 = y_1\int\left(e_0 + \frac{e_1}{\operatorname{sn}^2(w+\omega_1)} + \frac{e_2}{\operatorname{sn}^2(w+\omega_2)}\right)dw,$$

so dass die einzige Schwierigkeit in der Bestimmung der Grössen e_0, e_1, e_2 besteht.

Es folgt:

$$e_1 = \left[\frac{\vartheta_0\cdot\vartheta_0(\nu_1-a)}{\vartheta_0(\nu_1)\cdot\vartheta_0(a)}\right]^{c_2}\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_0^6}\,\frac{\vartheta_0(\nu_1)^4\cdot\vartheta_1(\nu_1)^2\cdot\vartheta_1(\nu_2)^2}{\vartheta_1(\nu_1-\nu_2)^2}.$$

Wir wollen nun wie in den früheren Betrachtungen annehmen, dass die Beziehung besteht:

$$\nu_1+\nu_2 = \frac{c_2\cdot a}{2},$$

so folgt:

$$(32)\quad e_1 = \left[\frac{\vartheta_0\cdot\vartheta_0(\nu_1-a)}{\vartheta_0(\nu_1)\cdot\vartheta_0(a)}\right]^{c_2}\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_0^6}\,\frac{\vartheta_0(\nu_1)^4\cdot\vartheta_1(\nu_1)^2\cdot\vartheta_1\left(\frac{c_2}{2}a-\nu_1\right)^2}{\vartheta_1\left(2\nu_1-\frac{c_2}{2}a\right)^2}.$$

Ebenso einfach ist der Werth von e_2 und e_0 zu berechnen. Es folgt, dass der Ausdruck für e_1 eine doppeltperiodische Function von ω_1 und α ist und ähnliches gilt für die anderen Coefficienten.

Die Darstellung in der gewöhnlichen Form ist in den vier verschiedenen Fällen eine verschiedene. Wir beschränken uns auf die Fälle $c_2 = 2$ und $c_2 = 4$. Setzen wir $c_2 = 2$, so wird:

$$e_1 = \frac{\vartheta_0(\nu_1 - a)^2}{\vartheta_0(a)^2} \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^4 \cdot \vartheta_2^2} \frac{\vartheta_0(\nu_1)^2 \cdot \vartheta_1(\nu_1)^2 \cdot \vartheta_1(a - \nu_1)^2}{\vartheta_1(2\nu_1 - a)^2} .$$

Hier ist die Darstellung in der gewöhnlichen Form leicht zu geben. In der That, es ist:

$$\vartheta_0(a - \nu_1)\vartheta_1(a - \nu_1) = \frac{\vartheta_0(\nu_1) \cdot \vartheta_1(\nu_1)}{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(2\nu_1)} (\vartheta_0(a) \cdot \vartheta_1(a - 2\nu_1)$$
$$+ \vartheta_1(a) \cdot \vartheta_0(a - 2\nu_1)) ,$$

also folgt:

$$e_1 = \frac{\vartheta_0(\nu_1)^4 \cdot \vartheta_1(\nu_1)^4}{\vartheta_1(2\nu_1)^2} \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^6 \cdot \vartheta_2^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn}(2\omega_1 - \alpha)}\right)^2$$

oder also:

$$\text{(33)} \qquad 4 e_1 = \frac{\operatorname{sn}^2 \omega_1}{\operatorname{cn}^2 \omega_1 \cdot \operatorname{dn}^2 \omega_1} \left(1 - \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn}(2\omega_1 - \alpha)}\right)^2 .$$

Damit ist in diesem Falle alles gemacht, denn die übrigen Coefficienten bestimmen sich eben so einfach.

Wir nehmen zweitens

$$c_2 = 4 .$$

In diesem Falle wird:

$$e_1 = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} \cdot f_1 \cdot f_2 ,$$

$$f_1 = \frac{\vartheta_0(\nu_1 - a)^4}{\vartheta_1(2\nu_1 - 2a) \cdot \vartheta_0^2} ,$$

$$f_2 = \frac{\vartheta_1(\nu_1)^2 \cdot \vartheta_1(2a - \nu_1)^2}{\vartheta_0(a)^4 \cdot \vartheta_1(2\nu_1 - 2a)} .$$

Für f_1 erhalten wir den Werth:

$$f_1 = \frac{\vartheta_0(\nu_1 - a)^3 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{2\vartheta_1(\nu_1 - a) \cdot \vartheta_2(\nu_1 - a) \cdot \vartheta_3(\nu_1 - a) \cdot \vartheta_0} .$$

Da ferner die Gleichung stattfindet:

$$\vartheta_1(\nu_1) \cdot \vartheta_1(\nu_1 - 2a) = \frac{1}{\vartheta_0^2} (\vartheta_1(\nu_1 - a)^2 \cdot \vartheta_0(a)^2 - \vartheta_1(a)^2 \cdot \vartheta_0(\nu_1 - a)^2) ,$$

so folgt:

$$f_2 = \frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{2\vartheta_0^3} \frac{(\vartheta_1(\nu_1 - a)^2 \cdot \vartheta_0(a)^2 - \vartheta_1(a)^2 \cdot \vartheta_0(\nu_1 - a)^2)^2}{\vartheta_0(a)^4 \cdot \vartheta_0(\nu_1 - a)\,\vartheta_1(\nu_1 - a) \cdot \vartheta_2(\nu_1 - a) \cdot \vartheta_3(\nu_1 - a)}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in den Werth von e_1 ein, so erhalten wir:

$$(34) \qquad 4e_1 = \left[\frac{\operatorname{sn}^2(\omega_1 - \alpha) - \operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}(\omega_1 - \alpha)\operatorname{cn}(\omega_1 - \alpha)\operatorname{dn}(\omega_1 - \alpha)}\right]^2.$$

Damit ist auch in diesem Falle alles erledigt.

SITZUNG VOM 4. JULI 1892.

G. Scheffers, *Curvenschaaren, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen.* Vorgelegt von dem ao. Mitgliede Engel.

Bei seinen demnächst zu veröffentlichenden Untersuchungen über Translationsflächen wurde Lie dazu geführt, die Existenz eines Satzes über ebene Curvenschaaren zu vermuthen, der an sich besonderes Interesse beanspruchen würde. Sind nämlich unendlich viele Curven der Ebene, die continuirlich auf einander folgen, nach irgend einem Gesetz einander paarweis derartig zugeordnet, dass sie von jeder Geraden in Involution geschnitten werden, so handelt es sich darum, zu beweisen, dass die Curven stets die Kegelschnitte eines Büschels bilden.

Zweck dieser Zeilen ist, einen solchen Beweis zu erbringen. Dabei werde ich zunächst nicht *eine* Schaar von Curven betrachten, die paarweis auf einander bezogen sind, sondern zwei einzelne Schaaren, deren Curven einander zugeordnet werden. Im Laufe der Untersuchung stellt sich dann schon von selbst heraus, dass beide Schaaren einerlei analytische Darstellung haben.

Nehmen wir zunächst an, es liegen zwei continuirliche Schaaren c und k von paarweis einander nach irgend einem Gesetze zugeordneten ∞^1 Curven vor, die auf jeder Geraden eine Involution ausschneiden. Als zusammengehörige Elemente der Involution sollen natürlich die beiden Schnittpunkte zusammengehöriger Curven aufgefasst werden. Es ist leicht, aus zwei beliebigen Curvenpaaren c_1, k_1 und c_2, k_2 der Schaaren alle Curven der Schaaren zu bestimmen. Denn wenn P ein

beliebig gewählter Punkt ist, so kann er als ein Punkt einer Curve c angesehen werden. Um die zugehörige Curve k zu construiren, ziehen wir alle Strahlen von P aus, bestimmen auf ihnen die Schnittpunkte C_1, K_1 und C_2, K_2 mit den Curven c_1, k_1 und c_2, k_2 und suchen jedesmal den Punkt Q, der P zugeordnet ist in der Involution, bei welcher C_1, K_1 und C_2, K_2 Elementenpaare sind. Der Ort aller Punkte Q ist dann die gesuchte Curve k. Es ist klar, dass sich genau so die Curve c ergeben würde, die der Curve k entspricht, welche durch P geht. Hiernach haben die Curvenschaaren c und k einerlei analytische Darstellung. Dennoch wollen wir bis auf Weiteres jede für sich darstellen.

Es ist nun aber wichtig zu bemerken, dass sich ebendieselbe Curve ergeben muss, wenn statt c_1, k_1 *und* c_2, k_2 *irgend zwei andere Curvenpaare der Schaaren ausgewählt werden, sobald nur* P *nicht geändert wird.*

Diese Methode wenden wir im Folgenden an für unendlich ferne Punkte P und zwar zunächst für den unendlich fernen Punkt der y-Axe.

Um die Construction analytisch wiederzugeben, seien

$$(1) \qquad y = \Phi(x, a), \qquad y = \Psi(x, a)$$

unsere beiden Curvenschaaren, und zwar sollen diejenigen Curven einander stets zugeordnet sein, die gleichen Parameter a haben. Es mögen nun dem Parameter a zwei bestimmte Werthe a_1 und a_2 zuertheilt werden, d. h. es seien zwei Curvenpaare ausgewählt:

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 = \Phi(x, a_1), & y_1' = \Psi(x, a_1); \\ y_2 = \Phi(x, a_2), & y_2' = \Psi(x, a_2). \end{cases}$$

Wir haben, wenn P der unendlich ferne Punkt der y-Axe ist, Parallelen zur y-Axe zu legen, sie mit den vier Curven zu schneiden, dadurch die Involution auf den Parallelen zu bestimmen und endlich die Punkte aufzusuchen, die dem unendlich fernen Punkte in diesen Involutionen zugeordnet sind. Sei daher x irgendwie bestimmt angenommen. Die Involution auf der betreffenden Parallelen zur y-Axe wird durch eine Gleichung

$$Ayy' + B(y + y') + C = 0$$

ausgedrückt, in der A, B, C von x abhängen. Zusammengehörige Werthe von y, y' sind einmal das Paar y_1, y_1', dann das Paar

y_2, y_2' in (2), sowie endlich $y = \infty$ und der gesuchte Werth y'. Indem wir die letzte Gleichung zunächst durch y dividiren und dann $y = \infty$ setzen, finden wir, dass dieser Werth y' die Gleichung erfüllt:

$$Ay' + B = 0 .$$

Aus den drei Relationen

$$\begin{aligned} A y_1 y_1' + B(y_1 + y_1') + C &= 0 , \\ A y_2 y_2' + B(y_2 + y_2') + C &= 0 , \\ A y' \quad + B \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

folgt nun sofort:

$$\begin{vmatrix} y_1 y_1' & y_1 + y_1' & 1 \\ y_2 y_2' & y_2 + y_2' & 1 \\ y' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

oder nach (2), wenn $\Phi(x, a_1)$ u. s. w. kurz mit Φ_1 u. s. w. bezeichnet wird:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 \Psi_1 & \Phi_1 + \Psi_1 & 1 \\ \Phi_2 \Psi_2 & \Phi_2 + \Psi_2 & 1 \\ y' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 . \tag{3}$$

Diese Gleichung bestimmt y' als Function von x, a_1 und a_2. Die hierdurch dargestellte Curve muss, wie gesagt, unabhängig von der besonderen Wahl der Parameter a_1 und a_2 sein. Die Gleichung (3) muss sich also von a_1 und a_2 befreien lassen.

Ehe wir hieraus Schlüsse ziehen, wollen wir die beiden ursprünglichen Curven c_1, c_2 und entsprechend die beiden Curven k_1, k_2 einander unendlich benachbart wählen, indem wir a_2 einen a_1 unendlich benachbarten Werth

$$a_2 = a_1 + da$$

ertheilen. Dann geht, wenn das Zeichen d die Differentiation nach dem Parameter andeutet, (3) über in:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 \Psi_1 & \Phi_1 + \Psi_1 & 1 \\ d(\Phi_1 \Psi_1) & d(\Phi_1 + \Psi_1) & 0 \\ y' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und liefert:

$$y' = \frac{d(\Phi_1 \Psi_1)}{d(\Phi_1 + \Psi_1)} .$$

Dieser Werth soll unabhängig von a_1 sein. Es ist also zu fordern, dass

$$\frac{\frac{\partial}{\partial a}[\Phi(x,a)\cdot\Psi(x,a)]}{\frac{\partial}{\partial a}[\Phi(x,a)+\Psi(x,a)]}$$

frei von a sei. Bezeichnen wir diese Function mit $u(x)$, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial a}(\Phi\Psi)-u\frac{\partial}{\partial a}(\Phi+\Psi)=0\ ,$$

also, da u frei von a ist:

$$\Phi\Psi-u(\Phi+\Psi)=\lambda(x)\ .$$

$\lambda(x)$ ist auch frei von a. Führen wir noch zur Bequemlichkeit die Bezeichnung

$$\Phi+\Psi=U(x,a)$$

ein, so ist daher:

$$\Phi+\Psi=U\ ,\qquad \Phi\Psi=uU+\lambda\ .$$

Die beiden Curvenschaaren (1) oder $y-\Phi=0$ und $y-\Psi=0$ lassen sich mithin gleichzeitig durch die in y quadratische Gleichung darstellen:

$$y^2-U(x,a)y+u(x)\,U(x,a)+\lambda(x)=0\ . \tag{4}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die hierdurch gegebenen Curven jede Parallele zur y-Axe in einer Involution schneiden, wenn man beachtet, dass der Parameter a nur in U auftritt.

Wären wir statt vom unendlich fernen Punkte der y-Axe vom unendlich fernen Punkte der x-Axe ausgegangen, so hätten wir analog gefunden, dass sich die Curven in der Form darstellen lassen müssen:

$$x^2-V(y,a)x+v(y)\,V(y,a)+\mu(y)=0\ . \tag{5}$$

Entsprechend hätten wir gefunden, wenn die parallelen Geraden unter dem Winkel α zur x-Axe geneigt gezogen worden wären, dass sich die Curven in der allgemeinen Form darstellen lassen müssen:

$$\left\{\begin{aligned}&(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2-\Omega(x\cos\alpha-y\sin\alpha,a,\alpha)\cdot(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+\\&+\omega(x\cos\alpha-y\sin\alpha,\alpha)\,\Omega(x\cos\alpha-y\sin\alpha,a,\alpha)+\\&+\varrho(x\cos\alpha-y\sin\alpha,\alpha)=0\ .\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die Functionen Ω, ω und ϱ, von denen nur die erste den Parameter a enthält, werden andere Formen haben für andere Werthe des Winkels α, sie hängen daher noch von α als besonderem Argumente ab, und deshalb ist dies Argument in (6) bei Ω, ω und ϱ besonders angegeben worden. Für $\alpha = 0$ reduciren sich diese Functionen auf die Functionen U, u und λ der Gleichung (4), für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auf die Functionen V, v und μ der Gleichung (5).

Die Curvenschaar (4) wird also dann und nur dann von jeder Geraden in einer Involution geschnitten, wenn sie sich für jeden Werth von α in der Form (6) darstellen lässt, d. h. *wenn α in* (6) *nur scheinbar vorkommt.*

Die Differentiation von (6) nach α muss also entweder eine Gleichung geben, die unsere Curvenschaar darstellt, oder sie muss eine Identität ergeben. Benutzen wir die Abkürzungen:

$$(7) \qquad \mathfrak{x} = x \cos\alpha - y \sin\alpha \,, \qquad \mathfrak{y} = x \sin\alpha + y \cos\alpha \,,$$

so erhalten wir durch diese Differentiation:

$$(8) \quad 2\mathfrak{x}\mathfrak{y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}}\mathfrak{y} - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\right)\mathfrak{y} - \Omega\mathfrak{x} - \frac{\partial(\omega\Omega + \varrho)}{\partial \mathfrak{x}}\mathfrak{y} + \frac{\partial(\omega\Omega + \varrho)}{\partial \alpha} = 0,$$

während (6) so geschrieben werden kann:

$$(6') \qquad \mathfrak{y}^2 - \Omega\mathfrak{y} + \omega\Omega + \varrho = 0 \,.$$

Ω, ω und ϱ enthalten $\mathfrak{y}$ nicht. Ferner sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und α drei von einander unabhängige Functionen von x, y und α.

Die beiden Gleichungen (8) und (6') sind quadratisch in $\mathfrak{y}$ und müssen demnach einander proportionale Coefficienten von $\mathfrak{y}^2$, $\mathfrak{y}^1$ und $\mathfrak{y}^0$ haben. Dies zieht das Bestehen der Identitäten nach sich:

$$(9) \quad \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}}}{1} \equiv \frac{2\mathfrak{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\omega\Omega + \varrho)}{\partial \mathfrak{x}}}{-\Omega} \equiv \frac{-\Omega\mathfrak{x} + \frac{\partial(\omega\Omega + \varrho)}{\partial \alpha}}{\omega\Omega + \varrho} \,.$$

Diese bestehen auch dann, wenn sich (8) selbst auf eine Identität reducirt. Aus diesen Identitäten ziehen wir Schlüsse hinsichtlich der Art, in der in Ω der Parameter a der Curvenschaar auftritt, der in ω und ϱ gar nicht vorkommt. Es ergiebt sich nämlich zunächst:

$$(\omega - \Omega)\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \equiv 2\mathfrak{x} - \Omega\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial \varrho}{\partial \mathfrak{x}},$$

$$(\omega\Omega + \varrho)\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} - \omega\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \equiv -\Omega\mathfrak{x} + \Omega\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}.$$

Differenziren wir diese Identitäten nach a, so kommt, wenn alsdann noch durch $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ dividirt wird:

$$(10)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega - \Omega)\dfrac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}} + \dfrac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha} \equiv -\dfrac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}}, \\[2ex] \omega\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega\Omega + \varrho)\dfrac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}} - \omega\dfrac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha} \equiv -\mathfrak{x} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit ω und addiren sie zur zweiten, so fällt Ω ebenso wie $\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha}$ fort, und es ergiebt sich, sobald, wie wir zunächst annehmen wollen, $\omega^2 + \varrho \not\equiv 0$ ist, dass

$$\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}}$$

sich durch ϱ, ω und die Ableitungen von ω allein ausdrückt, also jedenfalls frei von a ist. Ω hat mithin selbst die Form:

$$(11)\qquad \Omega = \varphi(\mathfrak{x}, \alpha)\, A(a, \alpha) + \psi(\mathfrak{x}, \alpha),$$

sodass also a nur in dem Factor A in Verbindung mit α auftritt. Die erste Gleichung (10) nimmt nun die Form an:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}}A - \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega - \varphi A - \psi)\frac{\partial \log \varphi}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \log \frac{\partial A}{\partial a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}}.$$

Der Differentialquotient von $\log \frac{\partial A}{\partial a}$ nach α hat daher die Gestalt:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial A}{\partial a}}{\partial \alpha} = PA + Q,$$

in der P, Q Functionen von $\mathfrak{x}$, α allein, frei von a, sind. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P \frac{\partial A^2}{\partial a} + Q \frac{\partial A}{\partial a}$$

und giebt nach a integrirt:

12)
$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P A^2 + Q A + R \,.$$

Auch R enthält nur $\mathfrak{x}$ und α, ist frei von a.

Diese Relation (12) hat die Form der Riccati'schen Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P F^2 + Q F + R \,,$$

in der a gar nicht vorkommt. Diese Gleichung besitzt sicher eine Particularlösung F, die frei von a ist. Aus einer solchen ergiebt sich in bekannter Weise die allgemeine Lösung A. Setzt man nämlich

$$A = F + \frac{1}{X} \,,$$

so erfüllt X die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\,(PF + Q)\,X - \tfrac{1}{2} P \,,$$

deren Integral die Form hat:

$$X = S \cdot (T + \text{Const.}) \,,$$

in der S und T frei von a sind. Es kann aber a in die Integrationsconstante eingehen. Wir haben also zu setzen:

$$X = S \cdot (T + f(a)) \,.$$

Hierbei könnte f zunächst noch $\mathfrak{x}$ enthalten. Da aber nun A die Form hat:

$$A = F + \frac{1}{S \cdot (T + f(a))}$$

und A frei von $\mathfrak{x}$ ist, so dürfen wir setzen:

$$A = \frac{l(\alpha)\, f(a) + m(\alpha)}{n(\alpha)\, f(a) + r(\alpha)}$$

und annehmen, dass f nur a enthält, während l, m, n, r nur α enthalten. Indem wir das von α freie f als Parameter a einführen, setzen wir bequemer:

$$A = \frac{la + m}{na + r} .$$

Jetzt haben wir die unbequemsten Rechnungen überwunden. Nach (11) hat nämlich Ω nunmehr die Form:

$$\Omega = \varphi(\mathfrak{x}, \alpha) \frac{l(\alpha)\, a + m(\alpha)}{n(\alpha)\, a + r(\alpha)} + \psi(\mathfrak{x}, \alpha) .$$

Weil sich nun Ω für $\alpha = 0$ auf die Function U der Gleichung (4), für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auf die Function V der Gleichung (5) reduciren muss, so ergiebt sich, dass U und V die Form haben:

$$U = \varphi_1(x) \frac{l_1 a + m_1}{n_1 a + r_1} + \psi_1(x) , \quad V = \varphi_2(y) \frac{l_2 a + m_2}{n_2 a + r_2} + \psi_2(y) .$$

Hier bedeuten l_1, m_1, n_1, r_1 und l_2, m_2, n_2, r_2 Constanten. Nach (4) und (5) sind folglich

$$\frac{y^2 - \psi_1 y + u\psi_1 + \lambda}{\varphi_1 \cdot (y + u)} \quad \text{und} \quad \frac{x^2 - \psi_2 x + v\psi_2 + \mu}{\varphi_2 \cdot (x + v)} ,$$

gleich gewissen linear gebrochenen Functionen von a gesetzt, beides Gleichungen unserer Curven. Wenn wir noch $u\psi_1 + \lambda$ als neues $\lambda(x)$ und $v\psi_2 + \mu$ als neues $\mu(y)$ benutzen, so sehen wir also:

Die Curven lassen sich in den beiden Formen

$$y^2 - \psi_1(x)\, y + \lambda(x) + \text{Const.}\ \varphi_1(x)\,(y + u(x)) = 0 ,$$
$$x^2 - \psi_2(y)\, x + \mu(y) + \text{Const.}\ \varphi_2(y)\,(x + v(y)) = 0$$

darstellen und zwar ist

$$\frac{y^2 - \psi_1 y + \lambda}{\varphi_1 \cdot (y + u)}$$

eine lineare gebrochene Function von

$$\frac{x^2 - \psi_2 x + \mu}{\varphi_2 \cdot (x + v)} .$$

Demnach besteht für jedes x und y eine solche Relation:

$$\frac{y^2 - \psi_1 y + \lambda}{\varphi_1 \cdot (y + u)} = \frac{\mathfrak{a}(x^2 - \psi_2 x + \mu) + \mathfrak{b}\varphi_2(x + v)}{\mathfrak{c}(x^2 - \psi_2 x + \mu) + \mathfrak{d}\psi_2(x + v)},$$

in der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Constanten sind. Die linke Seite ist rational gebrochen in y, die rechte in x. Beide Seiten sind also gleich einer rationalen Function von x, y von der Form:

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)y^2 + (Dx^2 + Ex + F)y + (Gx^2 + Hx + J)}{(Kx^2 + Lx + M)y + (Nx^2 + Px + Q)},$$

in der A, $B \cdots Q$ Constanten bedeuten. Die Curvenschaar lässt sich mithin so darstellen:

$$(Ax^2 + Bx + C)y^2 + (Dx^2 + Ex + F)y + (Gx^2 + Hx + J) +$$
$$+ \text{Const.}\ [(Kx^2 + Lx + M)y + (Nx^2 + Px + Q)] = 0 .$$

Sie kann also höchstens aus algebraischen Curven vierter Ordnung bestehen. Nun aber muss sich eine ebensolche Darstellung auch ergeben, wenn wir das Coordinatensystem irgend einer Drehung unterwerfen. Bei einer solchen treten aber offenbar Glieder von der Form x^4, x^3, y^4, y^3, $x^3 y$, xy^3 ein, die in der vorstehenden Gleichung nicht vorkommen, es sei denn, dass $A = B = D = K = 0$ ist, d. h. dass sich die Curven auf die *Kegelschnitte eines Büschels* reduciren.

Hiermit wäre der angekündigte Satz bis auf eine kleine Lücke bewiesen. Bei der Discussion der Gleichungen (10) setzten wir nämlich voraus, dass $\omega^2 + \varrho \not\equiv 0$ sei. Aber wenn $\omega^2 + \varrho \equiv 0$ wäre, so müsste in (4) $u^2 + \lambda \equiv 0$ sein, sodass die Gleichung unserer Curven lautete:

$$y^2 - Uy + uU - u^2 = 0$$

oder

$$\left(y - \frac{U}{2}\right)^2 - \left(\frac{U}{2} - u\right)^2 = 0 .$$

Demnach wäre die eine Curvenschaar diese:

$$y = U - u ,$$

die andere diese:

$$y = u .$$

und
entha
setze

Na

SITZUNG VOM 1. AUGUST 1892.

Friedrich Engel, *Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe*[1]. **(Erste Mittheilung.)**

Wenn die Gleichungen:

(1) $$x_\nu' = f_\nu(x_1 \cdots x_n;\ a_1 \cdots a_r) \qquad (\nu = 1 \cdots n)$$

eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen darstellen und wenn $a_1^0 \cdots a_r^0$ die Parameter der identischen Transformation sind, so gilt, wie Lie gezeigt hat, der Satz: Jede

---

1) Der Anlass zu den folgenden Untersuchungen war die Bemerkung, dass nicht jede endliche Transformation:

$$x' = a_1 x + a_2 y\,, \quad y' = a_3 x + a_4 y \quad (a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1)$$

der speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist. Als ich seinerzeit diese Bemerkung meinem Freunde Study mittheilte, interessirte er sich lebhaft dafür und zeigte mir den innern Grund für dieses merkwürdige Verhalten der genannten Gruppe. Mit Studys Erlaubniss werde ich in der Fortsetzung meiner Arbeit seine hierauf bezüglichen Ueberlegungen mittheilen und ausserdem noch einen von Study herrührenden Beweis für den Satz, dass jede endliche projective Transformation von einer infinitesimalen projectiven Transformation erzeugt ist. Study war damals, als ich die hier behandelten Fragen anregte, schon längere Zeit im Besitze dieses Beweises. Ich gebe zunächst einen andern von mir herrührenden Beweis. Mein Beweis, der übrigens späteren Datums ist als der Studysche, hat vor dem Studys den Vorzug, dass er sich auf die projective Gruppe der Fläche zweiten Grades und auf die des linearen Complexes übertragen lässt, während der Studysche vorläufig wenigstens auf diese Gruppen noch nicht anwendbar ist, dafür ist der Studysche Beweis vom methodischen Standpunkte aus befriedigender als der meinige.

Transformation der Gruppe (I), deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen, gehört einer eingliedrigen Untergruppe von (I) an und ist daher von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe (I) erzeugt.

Solange (I) eine ganz beliebige Gruppe ist, muss man sich mit diesem allgemeinen Satze begnügen, wenn man es dagegen mit einer bestimmten Gruppe zu thun hat, deren endliche Gleichungen wirklich vorgelegt sind, so kann man weiter gehen und fragen, ob überhaupt jede endliche Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist, oder ob es in der Gruppe auch endliche Transformationen giebt, die das nicht sind.

Der Versuch, diese Frage zn beantworten, ist besonders aussichtsreich bei den projectiven Gruppen, weil die analytischen Ausdrücke, die zur Darstellung projectiver Transformationen und eingliedriger Gruppen von solchen dienen, sich durch ihre grosse Einfachheit auszeichnen. Deshalb wollen wir uns im Folgenden auf die Betrachtung projectiver Gruppen beschränken.

Wir werden sehen, dass es eine grosse Anzahl solcher projectiver Gruppen giebt, bei denen jede endliche Transformation von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist. Andrerseits werden wir eine Gruppe kennen lernen, deren endliche Transformationen nicht sämmtlich von infinitesimalen Transformationen der Gruppe erzeugt sind; wir werden uns von STUDY den innern Grund dieser Thatsache aufdecken lassen und daraus bemerkenswerthe Aufschlüsse über die Natur des Isomorphismus endlicher continuirlicher Gruppen gewinnen.

Die allgemeinste lineare homogene Transformation in n Veränderlichen ist zugleich der analytische Ausdruck für die allgemeinste projective Transformation des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes; gelingt es uns daher nachzuweisen, dass jede lineare homogene Transformation in n Veränderlichen von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation in diesen Veränderlichen erzeugt ist, so haben wir damit zugleich bewiesen, dass jede projective Transformation des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes von einer infinitesimalen Transformation dieses Raumes erzeugt ist. Um nun die genannte Eigenschaft der linearen homogenen Transformationen beweisen zu können, ent-

wickeln wir zunächst einen Hülfssatz, der uns später auch bei der Untersuchung andrer projectiver Gruppen gute Dienste leisten wird.

§ 1.

Ein Hülfssatz.

Wir denken uns in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ eine lineare homogene Transformation:

$$(1) \qquad x_j' = \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu \quad (j = 1 \cdots n)$$

gegeben und nehmen an, dass (1) von der ebenfalls gegebenen infinitesimalen linearen homogenen Transformation:

$$(2) \qquad \sum_{j\nu}^{1 \ldots n} a_{j\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

erzeugt ist. Sodann bilden wir in den $n + 1$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n+1}$ die Transformation:

$$(1') \qquad \begin{cases} x_j'' = \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu + b_j x_{n+1}, \quad x_{n+1}'' = b\, x_{n+1} \\ (j = 1 \cdots n), \end{cases}$$

in der die $a_{j\nu}$ dieselben Werthe haben wie vorhin, während b und die b_j ganz beliebig sind, nur dass b natürlich nicht verschwinden darf. Wir wollen untersuchen, ob es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, $\beta_1 \cdots \beta_n$, β so zu bestimmen, dass die Transformation (1') von der infinitesimalen Transformation:

$$(2') \qquad \sum_1^n {}_j \left\{ \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu + \beta_j x_{n+1} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \beta x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$$

erzeugt wird. Die Bedingungen, unter denen dies der Fall ist, bilden den Inhalt des angekündigten Hülfssatzes.

Die infinitesimale Transformation (2) erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Gleichungen durch Integration des simultanen Systems:

$$(3) \qquad \frac{dx_j'}{dt} = \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu' \quad (j = 1 \cdots n)$$

mit den Anfangsbedingungen: $[x_j']_{t=0} = x_j$ erhalten werden und daher die Form haben:

$$(4) \qquad x_j' = \sum_1^n {}_\nu A_{j\nu}(t)\, x_\nu \quad (j = 1 \cdots n)\,.$$

Andrerseits erzeugt auch die infinitesimale Transformation (2') eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen durch Integration des simultanen Systems:

$$(3') \quad \begin{cases} \dfrac{dx_j''}{dt} = \sum_1^n {}_\nu a_{j\nu}\, x_\nu'' + \beta_j\, x_{n+1}'', \qquad \dfrac{dx_{n+1}''}{dt} = \beta\, x_{n+1}'' \\ (j = 1 \cdots n) \end{cases}$$

erhalten werden und daher die Form haben:

$$(4') \quad \begin{cases} x_j'' = \sum_1^n {}_\nu A_{j\nu}(t)\, x_\nu + B_j(t)\, x_{n+1}, \quad x_{n+1}'' = e^{\beta t} x_{n+1} \\ (j = 1 \cdots n)\,, \end{cases}$$

wo die $A_{j\nu}(t)$ dieselben Functionen sind wie in den Gleichungen (4).

Unter den gemachten Voraussetzungen gehen die Gleichungen (4) bei geeigneter Wahl von t in die Gleichungen (1) über; der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass dies für $t = 1$ geschieht, so dass also die Relationen:

$$(5) \qquad A_{j\nu}(1) = a_{j\nu} \qquad (j, \nu = 1 \cdots n)$$

bestehen. Soll andrerseits die Transformation (1') von der infinitesimalen Transformation (2') erzeugt sein, so müssen sich die Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} A_{j\nu}(t) = a_{j\nu}, \quad B_j(t) = b_j, \quad e^{\beta t} = b \\ (j, \nu = 1 \cdots n) \end{cases}$$

durch geeignete Wahl von t, $\beta_1 \cdots \beta_n$, β befriedigen lassen. Da wir aber von den Gleichungen: $A_{j\nu}(t) = a_{j\nu}$ weiter nichts wissen, als dass sie für $t = 1$ befriedigt sind, so wollen wir uns auch bei den Gleichungen (6) von vornherein auf den Fall: $t = 1$ beschränken; dann brauchen wir blos zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichungen:

(6') $$e^{\beta} = b\,, \quad B_j(1) = b_j \quad (j = 1 \cdots n)$$

durch endliche Werthe von β, $\beta_1 \cdots \beta_n$ erfüllt werden können.

Die Functionen $A_{j\nu}(t)$ sind augenscheinlich durch die Differentialgleichungen:

(7) $$\frac{dA_{j\nu}}{dt} = \sum_1^n{}^{\tau}\, a_{j\tau} A_{\tau\nu} \quad (j, \nu = 1 \cdots n)$$

mit den Anfangsbedingungen: $[A_{j\nu}]_{t=0} = \varepsilon_{j\nu}$ vollständig bestimmt, unter $\varepsilon_{j\nu}$ wie gewöhnlich eine Grösse verstanden, die für $j \neq \nu$ verschwindet und für $j = \nu$ den Werth 1 besitzt. Die $B_j(t)$ ihrerseits sind durch die Differentialgleichungen:

(8) $$\begin{cases} \dfrac{dB_j}{dt} = \sum_1^n{}^{\nu}\, \alpha_{j\nu} B_\nu + \beta_j e^{\beta t} \\ (j = 1 \cdots n) \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $[B_j]_{t=0} = 0$ vollständig definirt.

Um die B_j zu bestimmen, setzen wir:

(9) $$B_j(t) = \sum_1^n{}^{\nu}\, A_{j\nu}(t) \cdot \varrho_\nu(t) \quad (j = 1 \cdots n)$$

und bekommen für die $\varrho_\nu(t)$ folgende Differentialgleichungen:

(10) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, A_{j\nu}(t)\, \frac{d\varrho_\nu}{dt} = \beta_j e^{\beta t} \quad (j = 1 \cdots n)\,,$$

zu denen natürlich noch die Anfangsbedingungen: $[\varrho_\nu]_{t=0} = 0$ hinzukommen. Berücksichtigen wir ferner, das wir durch Auflösung von (4) nach $x_1 \cdots x_n$ die Gleichungen:

$$x_\nu = \sum_1^n{}^{\tau}\, A_{\nu\tau}(-t) \cdot x_\tau' \quad (\nu = 1 \cdots n)$$

erhalten und dass infolge dessen die Relationen:

$$\sum_1^n{}^{\tau}\, A_{\tau j}(t)\, A_{\nu\tau}(-t) = \varepsilon_{j\nu}$$

bestehen, so erkennen wir, dass die $\dfrac{d\varrho_\nu}{dt}$ die einfachen Werthe haben:

$$(11)\qquad \frac{d\varrho_\tau}{dt} = \sum_1^n {}^j\, \beta_j e^{\beta t} \cdot A_{\tau j}(-t) \quad (\tau = 1 \cdots n)\ .$$

Hieraus aber ergiebt sich:

$$(12)\qquad \varrho_\tau(t) = \sum_1^n {}^j\, \beta_j \int_0^t e^{\beta t} A_{\tau j}(-t)\, dt \quad (\tau = 1 \cdots n)\ .$$

Alles kommt daher darauf an, ob die Gleichung: $e^\beta = b$ eine solche Wurzel besitzt, dass sich die Gleichungen:

$$(13)\qquad \varrho_\tau(1) = \sum_1^n {}^j\, \beta_j \int_0^1 e^{\beta t} A_{\tau j}(-t)\, dt \quad (\tau = 1 \cdots n)$$

nach $\beta_1 \cdots \beta_n$ auflösen lassen, denn ist das möglich, so sind offenbar auch die Gleichungen:

$$B_j(1) = \sum_1^n {}^\nu\, A_{j\nu}(1) \cdot \varrho_\nu(1) = b_j \quad (j = 1 \cdots n)$$

nach $\beta_1 \cdots \beta_n$ auflösbar.

Die Ausdrücke für die $\varrho_\tau(1)$ lassen sich in sehr einfacher Weise als beständig convergente Potenzreihen darstellen.

Setzen wir nämlich:

$$(14)\qquad e^{\beta t} \cdot A_{\tau j}(-t) = \sigma_{\tau j}(t) \quad (\tau, j = 1 \cdots n)\ ,$$

so bekommen wir mit Berücksichtigung von (7):

$$\frac{d\sigma_{\tau j}}{dt} = \beta e^{\beta \tau} \cdot A_{\tau j}(-t) - e^{\beta t} \sum_1^n {}^\nu\, \alpha_{\tau\nu} A_{\nu j}(-t)\ ,$$

oder einfach:

$$(15)\qquad \frac{d\sigma_{\tau j}}{dt} = \sum_1^n {}^\nu\, (\varepsilon_{\tau\nu}\beta - \alpha_{\tau\nu})\, \sigma_{\nu j} \quad (\tau, j = 1 \cdots n)$$

mit den Anfangsbedingungen: $[\sigma_{\tau j}]_{t=0} = \varepsilon_{\tau j}$. Die $\sigma_{\tau j}(t)$ sind also in genau derselben Weise gebildet, wie die $A_{\tau j}(t)$, nur dass in den Differentialgleichungen für die $\sigma_{\tau j}$ an die Stelle von $\alpha_{\tau\nu}$ der Ausdruck: $\varepsilon_{\tau\nu}\beta - \alpha_{\tau\nu}$ getreten ist.

Nun sind die $A_{\tau j}(t)$ beständig convergente Potenzreihen von t und von den nn Grössen $\alpha_{k\nu}$ und haben, wie man sich leicht überzeugt, die Form[1]):

$$A_{\tau j}(t) = \sum_0^\infty {}^\mu \frac{t^\mu}{\mu!} \mathfrak{A}_{\tau j}^{(\mu)}(\alpha_{k\nu}),$$

wo die ganzen homogenen Functionen $\mathfrak{A}_{\tau j}^{(\mu)}$ durch die Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_{\tau j}^{(0)} = \varepsilon_{\tau j} \\ \mathfrak{A}_{\tau j}^{(1)} = \alpha_{\tau j} \\ \mathfrak{A}_{\tau j}^{(\mu)} = \sum\limits_{k_1 \cdots k_{\mu-1}}^{1 \cdots n} \alpha_{\tau k_1} \alpha_{k_1 k_2} \cdots \alpha_{k_{\mu-2} k_{\mu-1}} \alpha_{k_{\mu-1} j} \end{cases}$$

definirt sind. Demnach bekommen wir einfach:

$$e^{\beta t} A_{\tau j}(-t) = \sigma_{\tau j} = \sum_0^\infty {}^\mu \frac{t^\mu}{\mu!} \mathfrak{A}_{\tau j}^{(\mu)}(\varepsilon_{k\nu}\beta - \alpha_{k\nu})$$

und endlich:

$$(17)\quad \int_0^1 e^{\beta t} A_{\tau j}(-t)\, dt = \sum_0^\infty {}^\mu \frac{1}{(\mu+1)!} \mathfrak{A}_{\tau j}^{(\mu)}(\varepsilon_{k\nu}\beta - \alpha_{k\nu}).$$

Damit sind zugleich die $\varrho_\tau(1)$ als beständig convergente Potenzreihen von β und von den $\alpha_{k\nu}$ dargestellt.

Die Frage, ob die Gleichungen (6′) durch geeignete Wahl von $\beta, \beta_1 \cdots \beta_n$ befriedigt werden können, hatten wir oben auf die andre Frage zurückgeführt, ob sich unter den Wurzeln der Gleichung: $e^\beta = b$ eine solche befände, dass die Gleichungen (13) nach $\beta_1 \cdots \beta_n$ auflösbar wären. Wir müssen also jetzt noch untersuchen, unter welchen Bedingungen die Determinante der Gleichungen (13), also die Determinante der nn Ausdrücke (17) für mindestens eine Wurzel der Gleichung: $e^\beta = b$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

---

1) Derartige Reihenentwickelungen hat besonders Schur vielfach benutzt, vgl. diese Berichte 1890, S. 1 ff. und Math. Ann. Bd. 38, S. 263 ff.

$$(\omega - \Omega)\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \equiv 2\mathfrak{x} - \Omega\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial \varrho}{\partial \mathfrak{x}},$$

$$(\omega\Omega + \varrho)\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} - \omega\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \equiv -\Omega\mathfrak{x} + \Omega\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}.$$

Differenziren wir diese Identitäten nach a, so kommt, wenn alsdann noch durch $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ dividirt wird:

$$(10)\quad \begin{cases} -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega - \Omega)\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha} \equiv -\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}}, \\ \omega\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega\Omega + \varrho)\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}} - \omega\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha} \equiv -\mathfrak{x} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit ω und addiren sie zur zweiten, so fällt Ω ebenso wie $\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \alpha}$ fort, und es ergiebt sich, sobald, wie wir zunächst annehmen wollen, $\omega^2 + \varrho \mathrel{\overline{\overline{|}}}\!\!\!\!= 0$ ist, dass

$$\frac{\partial \log \frac{\partial \Omega}{\partial a}}{\partial \mathfrak{x}}$$

sich durch ϱ, ω und die Ableitungen von ω allein ausdrückt, also jedenfalls frei von a ist. Ω hat mithin selbst die Form:

$$(11)\qquad \Omega = \varphi(\mathfrak{x}, \alpha)\, A(a, \alpha) + \psi(\mathfrak{x}, \alpha),$$

sodass also a nur in dem Factor A in Verbindung mit α auftritt. Die erste Gleichung (10) nimmt nun die Form an:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}}A - \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{x}} + (\omega - \varphi A - \psi)\frac{\partial \log \varphi}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \log \frac{\partial A}{\partial a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{x}}.$$

Der Differentialquotient von $\log \frac{\partial A}{\partial a}$ nach α hat daher die Gestalt:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial A}{\partial a}}{\partial \alpha} = PA + Q,$$

in der P, Q Functionen von $\mathfrak{x}$, α allein, frei von a, sind. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a \, \partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P \frac{\partial A^2}{\partial a} + Q \frac{\partial A}{\partial a}$$

und giebt nach a integrirt:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P A^2 + Q A + R \,. \tag{12}$$

Auch R enthält nur $\mathfrak{x}$ und α, ist frei von a.

Diese Relation (12) hat die Form der Riccati'schen Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{2} P F^2 + Q F + R \,,$$

in der a gar nicht vorkommt. Diese Gleichung besitzt sicher eine Particularlösung F, die frei von a ist. Aus einer solchen ergiebt sich in bekannter Weise die allgemeine Lösung A. Setzt man nämlich

$$A = F + \frac{1}{X} \,,$$

so erfüllt X die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -(PF + Q) X - \tfrac{1}{2} P \,,$$

deren Integral die Form hat:

$$X = S \cdot (T + \text{Const.}) \,,$$

in der S und T frei von a sind. Es kann aber a in die Integrationsconstante eingehen. Wir haben also zu setzen:

$$X = S \cdot (T + f(a)) \,.$$

Hierbei könnte f zunächst noch $\mathfrak{x}$ enthalten. Da aber nun A die Form hat:

$$A = F + \frac{1}{S \cdot (T + f(a))}$$

und A frei von $\mathfrak{x}$ ist, so dürfen wir setzen:

$$A = \frac{l(\alpha) f(a) + m(\alpha)}{n(\alpha) f(a) + r(\alpha)}$$

erzeugt ist und zwar so, dass man die Transformation (1′) *erhält, wenn man in den endlichen Gleichungen:*

$$x_k'' = x_k + \frac{t}{1}\,\overline{X}x_k + \frac{t^2}{1\cdot 2}\,\overline{X}\,\overline{X}x_k + \cdots$$

$$(k = 1 \cdots n + 1)$$

der eingliedrigen Gruppe $\overline{X}f$ *dem Parameter* t *den Werth* 1 *ertheilt. Die Grössen* $\beta_1 \cdots \beta_n$, β *können jedenfalls dann immer in der verlangten Weise gewählt werden, wenn es unter den unendlich vielen Werthen von* lb *gar keinen oder blos einen giebt, der eine Wurzel der charakteristischen Gleichung:*

$$(20) \qquad |\,\varepsilon_{sk}\,\omega - \alpha_{sk}\,| = 0$$

der infinitesimalen Transformation (2) *ist. Giebt es dagegen unter den Werthen von* lb *zwei oder noch mehr solche, die Wurzeln der Gleichung* (20) *sind, so ist es im Allgemeinen unmöglich* $\beta_1 \cdots \beta_n$, β *in der verlangten Weise zu bestimmen.*

Giebt es unter den Werthen von lb zwei oder noch mehr, die Wurzeln der Gleichung (20) sind, so kann es bei besonderer Beschaffenheit von $b_1 \cdots b_n$ vorkommen, dass die Gleichungen (13) mit einander verträglich sind, wenn man für β einen der Werthe von lb einsetzt. In diesem Falle erhält man zur Bestimmung von $\beta_1 \cdots \beta_n$ weniger als n unabhängige Gleichungen, die Transformation (1′) ist daher alsdann von unendlich vielen verschiedenen infinitesimalen Transformationen von der Form (2′) erzeugt und diese infinitesimalen Transformationen bilden eine continuirliche Schaar.

§ 2.

Die allgemeine projective Gruppe.

Wollen wir beweisen, dass jede projective Transformation des R_n von einer infinitesimalen projectiven Transformation dieses Raumes erzeugt ist, so brauchen wir, wie schon erwähnt, nur zu zeigen, dass jede lineare homogene Transformation in $n + 1$ Veränderlichen von einer infinitesimalen Transformation dieser Art erzeugt ist. Wir werden beweisen, dass dies der Fall ist, indem wir uns auf den Hülfssatz 1 stützen und ausserdem noch

auf einen andern Hülfssatz, der nahezu selbstverständlich ist[1]), den anzugeben wir aber doch nicht unterlassen wollen:

Hülfssatz 2. *Sind zwei lineare homogene Transformationen des R_{n+1} innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe dieses Raumes mit einander gleichberechtigt und ist die eine der beiden von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt, so ist es auch die andre.*

Bekanntlich[2]) lässt jede lineare homogene Transformation des R_{n+1} mindestens eine im Endlichen liegende ebene n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in Ruhe; denken wir uns daher durch eine lineare homogene Transformation des R_{n+1} die Veränderlichen so gewählt, dass: $x_{n+1} = 0$ die Gleichung dieser invarianten Mannigfaltigkeit wird, so erscheint unsre ursprüngliche lineare homogene Transformation in der Form:

$$(1') \qquad \begin{cases} x_j'' = \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu + b_j x_{n+1}, \quad x''_{n+1} = b x_{n+1} \\ (j = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Auf Grund unsers Hülfssatzes 2 brauchen wir daher blos zu zeigen, dass jede Transformation von der Form (1′) von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt ist.

Nach dem Hülfssatze 1 ist die Transformation (1′) sicher von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: erstens muss die verkürzte Transformation:

$$(1) \qquad x_j' = \sum_1^n {}_\nu\, a_{j\nu} x_\nu \quad (j = 1 \ldots n)$$

in der dort beschriebenen Weise von einer infinitesimalen Transformation:

$$(2) \qquad \sum_{j\nu}^{1\ldots n} a_{j\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

erzeugt sein und zweitens darf es unter den unendlich vielen Werthen von lb höchstens einen geben, der die charakteristische Gleichung:

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Abschnitt I, S. 56 ff.
2) s. ebenda S. 580 f.

(20) $$|\varepsilon_{s\nu}\,\omega - \alpha_{s\nu}| = 0$$

von (2) befriedigt.

Die zweite dieser Forderungen ist offenbar erfüllt, wenn es möglich ist, die infinitesimale Transformation (2) so zu wählen, dass es unter den Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung (20) keine zwei giebt, die, ohne einander gleich zu sein, sich nur um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Dann ist die Transformation (1′) sicher von einer infinitesimalen Transformation von der Form:

(2′) $$\sum_1^n{}_j \left\{ \sum_1^n{}_\nu \alpha_{j\nu} x_\nu + \beta_j x_{n+1} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \beta x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$$

erzeugt und zwar kann man augenscheinlich $\beta = lb$ stets so wählen, dass auch in der charakteristischen Gleichung:

(20′) $$(\omega - \beta)\cdot|\varepsilon_{s\nu}\,\omega - \alpha_{s\nu}| = 0$$

von (2′) niemals zwei ungleiche Wurzeln sich blos um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Das hiermit gewonnene Ergebniss können wir so aussprechen:

Hat man bewiesen, dass jede lineare homogene Transformation in n Veränderlichen in der früher beschriebenen Weise von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt ist, deren charakteristische Gleichung keine zwei Wurzeln besitzt, die ohne einander gleich zu sein sich blos um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden, so ist damit zugleich bewiesen, dass dasselbe auch für jede lineare homogene Transformation in $n+1$ Veränderlichen gilt.

Nun ist klar, dass jede lineare homogene Transformation:

$$x_1' = a_{11}\,x_1$$

in einer Veränderlichen von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation:

$$\alpha_{11}\,x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

in der früher beschriebenen Weise erzeugt ist; man braucht ja nur $\alpha_{11} = la_{11}$ zu setzen. Ferner ist klar, dass die charakteristische Gleichung: $\omega - \alpha_{11} = 0$ dieser infinitesimalen Transformation die verlangte Eigenschaft hat, da sie ja überhaupt nur eine Wurzel besitzt. Demnach erhalten wir durch den Schluss von n auf $n+1$ den

Satz 1. *Jede lineare homogene Transformation:*

(1) $$x_j' = \sum_1^n {}_\nu a_{j\nu} x_\nu \quad (j = 1 \cdots n)$$

des R_n ist von mindestens einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation:

(2) $$Xf = \sum_{j\nu}^{1\ldots n} a_{j\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dieses Raumes in der Weise erzeugt, dass sie erhalten wird, wenn man in den endlichen Gleichungen:

$$x_j' = x_j + \frac{t}{1} Xx_j + \frac{t^2}{1 \cdot 2} XXx_j + \cdots$$
$$(j = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf den Parameter $t = 1$ setzt; dabei kann man immer erreichen, dass die charakteristische Gleichung:

(20) $$|\varepsilon_{s\nu}\omega - a_{s\nu}| = 0$$

der infinitesimalen Transformation Xf keine zwei Wurzeln besitzt, die ohne einander gleich zu sein sich nur um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (20) der infinitesimalen Transformation Xf sind offenbar die Logarithmen zu den Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

(21) $$|\varepsilon_{s\nu}\omega - a_{s\nu}| = 0$$

der Transformation (1) selbst. Die Bedingung, der die Wurzeln von (20) unterworfen werden können, besagt also nichts weiter, als dass jeder gerade m-fachen Wurzel von (21) stets eine gerade m-fache Wurzel von (20) entsprechen muss.

Aus dem Satze 1 folgt nunmehr sofort der wichtige

Satz 2. *Jede projective Transformation des R_n ist von mindestens einer infinitesimalen projectiven Transformation dieses Raumes erzeugt.*

Dieser Satz rührt wie schon gesagt von Study her.

Friedrich Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie.* VII.[1]

Ueber reelle irreducible Gruppen von Berührungstransformationen.

Im dritten Abschnitte des Lieschen Werkes über Transformationsgruppen, an dem ich in derselben Weise mitarbeite wie an den beiden ersten Abschnitten, werden unter anderm die reellen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene bestimmt. Das hat mich veranlasst, auch nach den reellen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene zu fragen und ich habe da einige Ergebnisse gewonnen, die mir mittheilenswerth erscheinen.

Unter den reellen Berührungstransformationsgruppen der Ebene brauchen wir nur die ins Auge zu fassen, die nach Lies Bezeichnung *irreducibel* sind, die also nicht durch *reelle* Berührungstransformationen in Gruppen von Punkttransformationen übergeführt werden können, denn alle derartigen Gruppen, die nicht irreducibel sind, kennt man, sobald man alle reellen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene bestimmt hat.

Ich benutze, wie es Lie gewöhnlich thut, x und z als Punktcoordinaten der Ebene und x, z, y als Coordinaten der Linienelemente, so dass zwei unendlich benachbarte vereinigte Linienelemente durch die Gleichung:

$$dz - y\,dx = 0$$

verknüpft sind. Ist nun G eine endliche continuirliche reelle

1) VI in diesen Berichten S. 43 ff.

irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, z, so können zwei Fälle eintreten, entweder nämlich ist G auch dann noch irreducibel, wenn man x, z, y als complexe Veränderliche betrachtet, oder G wird bei Zugrundelegung dieser Auffassung reducibel.

Der erste Fall liefert keine neuen Gruppen; es gilt nämlich der Satz, *dass jede endliche reelle irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene, die auch dann noch irreducibel bleibt, wenn man x, y, z als complexe Grössen betrachtet, durch eine reelle Berührungstransformation auf eine der drei Lieschen Normalformen gebracht werden kann* (vgl. Th. d. Trfsgr. Abschn. II, Theor. 69, S. 433). Der Beweis dieses Satzes ist äusserst einfach und lässt sich in derselben Weise führen wie a. a. O.

Der zweite Fall liefert zwar auch keine wirklich neuen Gruppen, aber doch höchst merkwürdige neue Formen alter Gruppen.

Ist G als Gruppe von reellen Berührungstransformationen irreducibel, als Gruppe von complexen Berührungstransformationen dagegen reducibel, so lässt es offenbar zwei conjugirt imaginäre gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung invariant und kann daher durch eine imaginäre Berührungstransformation in eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene übergeführt werden, bei der jedenfalls noch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant bleibt. Nun aber hat LIE den Satz bewiesen, dass jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene, die eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lässt, durch Punkttransformation mit einer projectiven Gruppe ähnlich ist. Demnach ergiebt sich sofort der Satz:

Ist eine endliche continuirliche reelle Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, z für reelle Werthe der Veränderlichen x, z, y irreducibel, für complexe Werthe dieser Veränderlichen dagegen reducibel, so ist sie durch eine Berührungstransformation mit einer projectiven Gruppe der Ebene ähnlich.

Hiermit ist bewiesen, dass keine der gesuchten Gruppen mehr als acht Parameter enthält. Indem ich nun nach der von LIE entwickelten Methode die Reihenentwickelungen der charakteristischen Functionen untersucht habe, die zu den infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppen gehören, habe ich gefunden, dass jede der gesuchten Gruppen entweder acht

oder fünf oder vier Parameter enthält. Enthält sie gerade acht Parameter, so ist sie durch eine reelle Berührungstransformation ähnlich mit der Gruppe:

$$(1)\qquad \boxed{\begin{array}{c} 1,\ x,\ y,\ x^2+y^2,\ z-\tfrac{1}{2}xy \\ x(x^2+y^2)\ -\ 4y(z-\tfrac{1}{2}xy) \\ y(x^2+y^2)\ +\ 4x(z-\tfrac{1}{2}xy) \\ (x^2+y^2)^2+16(z-\tfrac{1}{2}xy)^2 \end{array}}$$

Enthält sie fünf Parameter, so ist sie durch eine reelle Berührungstransformation ähnlich mit der Gruppe:

$$(2)\qquad \boxed{1,\ x,\ y,\ x^2+y^2,\ z-\tfrac{1}{2}xy}$$

Die Gruppe (2) kann durch eine imaginäre Berührungstransformation aus der projectiven Gruppe:

$$(3)\qquad p_1',\ p_2',\ x_1'p_2',\ x_1'p_1',\ x_2'p_2'$$

eines Linienelements erhalten werden. Schreibt man sich nämlich die charakteristischen Functionen auf, die zu den infinitesimalen Transformationen (3) gehören:

$$(4)\qquad y',\ -1,\ -x',\ x'y',\ -z'$$

und bezieht man diese charakteristischen Functionen holoedrisch isomorph auf die Functionen (2), etwa wie es in der Tabelle:

$$(5)\qquad \begin{cases} 1\equiv 2i,\quad y\equiv x'+y',\quad x\equiv i(x'-y') \\ x^2+y^2\equiv -2ix'y',\quad z-\tfrac{1}{2}xy\equiv z'-\tfrac{1}{2}x'y' \end{cases}$$

geschehen ist, so findet man durch Anwendung des LIEschen Satzes über die Aehnlichkeit derartiger Gruppen, dass die beiden Gruppen (2) und (4) durch die Berührungstransformation:

$$(6)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{x'-y'}{2},\quad y=\dfrac{x'+y'}{2i} \\ z=\dfrac{z'}{2i}+\dfrac{1}{8i}\{x'^2-2x'y'-y'^2\} \end{cases}$$

mit einander ähnlich sind.

Bei Ausführung der Berührungstransformation (6) verwandelt sich die Gruppe (1) selbstverständlich in die allgemeine projective Gruppe der Ebene. Wie nun die allgemeine projective Gruppe der Ebene die Schaar aller ∞^2 Punkte und die Schaar aller ∞^2 Geraden invariant lässt, so lässt die Gruppe (1) die beiden conjugirt imaginären Curvenschaaren invariant, die durch die Differentialgleichung:

$$(7) \qquad \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)^2 + 1 = 0$$

definirt sind. Die Gruppe (1) ist sogar die grösste continuirliche Gruppe von reellen Berührungstransformationen, bei der die Differentialgleichung (7) invariant bleibt.

Es ist von vornherein klar, dass die Gruppe (1) keine reelle Schaar von ∞^1, ∞^2, ∞^3 oder ∞^4 Curven invariant lässt, dagegen überzeugt man sich leicht, dass sie eine reelle Schaar von ∞^5 rationalen Curven invariant lässt, nämlich die Schaar, die aus der Schaar der Kegelschnitte entsteht, wenn man die Berührungstransformation (6) ausführt. Andrerseits ist zu beachten, dass die Gruppe (1) keine reelle sechsgliedrige Untergruppe enthält und nur einen Typus von reellen fünfgliedrigen Untergruppen.

Abgesehen von ihren sonstigen Eigenschaften ist die Gruppe (1) namentlich dadurch merkwürdig, dass ihre Zusammensetzung eine zweite reelle Form für die Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene darstellt. Mein Freund Study hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die Zusammensetzung der Gruppe (1) jedenfalls auf eine zweite reelle Form der Sylvesterschen Nonionen führt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auch auf Räume von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen. Ich begnüge mich jedoch hier mit der Mittheilung des folgenden Satzes:

Aus der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes $z, x_1 \dots x_n$ erhält man durch Ausführung einer gewissen imaginären Berührungstransformation die reelle irreducible Berührungstransformationsgruppe:

(8)
$$
\begin{array}{|c|}
\hline
1, \quad x_\mu, \quad y_\mu, \quad x_\mu x_\nu + y_\mu y_\nu, \quad x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu \\
z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\tau x_\tau y_\tau \\
4 x_\mu (z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\tau x_\tau y_\tau) + y_\mu \sum_1^n {}^\tau \{x_\tau^2 + y_\tau^2\} \\
4 y_\mu (z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\tau x_\tau y_\tau) - x_\mu \sum_1^n {}^\tau \{x_\tau^2 + y_\tau^2\} \\
16\left(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\tau x_\tau y_\tau\right)^2 + \left(\sum_1^n {}^\tau \{x_\tau^2 + y_\tau^2\}\right)^2 \\
(\mu, \nu = 1 \ldots n) \\
\hline
\end{array}
$$

Den Punkten und den n-fach ausgedehnten Ebenen des projectiven Raumes entsprechen bei dieser Gruppe die beiden invarianten conjugirt imaginären Schaaren von Mannigfaltigkeiten zweiten Grades:

(9)
$$z = \pm \frac{i}{2}\sum_1^n {}^\tau x_\tau^2 + \sum_1^n {}^\mu a_\mu x_\mu + b.$$

Ich behalte mir vor, später auf diese Gruppe zurückzukommen und insbesondere anzugeben, was für invariante Schaaren von Mannigfaltigkeiten den Geraden u. s. w. des projectiven Raumes entsprechen.

Sophus Lie, *Ueber einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen.*

Mehrfach schon habe ich auf die werthvollen Arbeiten hingewiesen, in denen sich Herr SCHUR mit meiner Gruppentheorie beschäftigt hat. Ich war allerdings in mehreren Punkten über die Beziehungen dieser Arbeiten zu meinen eigenen andrer Meinung als ihr Verfasser, aber im persönlichen Verkehr haben Herr SCHUR und ich uns jetzt über alle wesentlichen Punkte verständigt. Da nun die Wichtigkeit der Gruppentheorie in neuerer Zeit in immer grösseren Kreisen erkannt wird, und da sich die SCHURschen Arbeiten auf die *Grundlagen* dieser Theorie beziehen, so halte ich es für angebracht, einmal genauer anzugeben, was Herr SCHUR zur Vervollständigung meiner Untersuchungen beigetragen hat.

Die gruppentheoretischen Arbeiten des Herrn SCHUR[1]) bewegen sich in zwei verschiedenen Richtungen. Einerseits liefern sie neue Beweise für die drei Sätze, die ich als die *drei Fundamentalsätze meiner Gruppentheorie* zu bezeichnen pflege, andrerseits verfolgen sie den Zweck, den weiteren Ausbau der Theorie zu fördern. Ich werde der Reihe nach besprechen, was Herr SCHUR in diesen beiden Richtungen geleistet hat.

Mein erster Fundamentalsatz sagt aus, *dass die endlichen Gleichungen*:

---

1) Math. Ann. Bd. 35, S. 161—197 und Bd. 38, S. 263—286. Das wichtigste Resultat der ersten Arbeit ist vorher in diesen Berichten veröffentlicht (1889, S. 229—231, Sitzung vom 6. Mai). Ein Theil der Ergebnisse der zweiten Abhandlung findet sich ebenfalls schon in diesen Berichten 1890, S. 1—7, Sitzung vom 13. Januar.)

$$(1)\qquad x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n;\; a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

jeder r-gliedrigen Gruppe gewisse Differentialgleichungen von der Form:

$$(2)\qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r)\,\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n;\; k = 1 \cdots r)$$

befriedigen und dass umgekehrt jede Schaar (1) *von* ∞^r *Transformationen, die Gleichungen von der Form* (2) *erfüllt und ausserdem die identische Transformation enthält, eine r-gliedrige Gruppe bildet.*

Der erste Theil dieses Satzes kann sicher nicht einfacher bewiesen werden, als es in Bd. I meiner Theorie der Transformationsgruppen geschehen ist, wenigstens soweit es auf die dem Beweise zu Grunde liegenden Gedanken ankommt. Im Grunde ist auch Herrn Schurs Beweis nur eine speciellere Fassung meines Beweises, der weder die Existenz einer identischen Transformation voraussetzt, noch über die Form der Gruppe in der Umgebung der identischen Transformation irgend welche Voraussetzungen macht[1].

Was den zweiten Theil des angegebenen Satzes betrifft, so gebe ich zu, dass die Redaction meines Beweises in Abschn. I die wirkliche Einfachheit der benutzten Ueberlegungen nicht mit der wünschenswerthen Klarheit hervortreten lässt, aber abgesehen von diesem formellen Mangel scheint mir mein Beweis an Einfachheit nichts zu wünschen übrig zu lassen[2]. Herr Schur seinerseits hat den Beweis, den er in seiner ersten Annalenarbeit geliefert hatte, in der zweiten fallen lassen, weil er zu complicirt war, und hat ihn durch einen andern ersetzt. Ich erkenne gern an, dass dieser zweite Schursche Beweis sehr einfach ist und grosse analytische Eleganz besitzt. Nach meiner persönlichen Auffassung ist aber mein Beweis durchsichtiger und überdies elementarer, da er den Begriff Parametergruppe nicht benutzt. An einer andren Stelle komme ich hierauf zurück.

---

1) Meine Betrachtungen gelten überdies auch für Gruppen, die aus mehreren getrennten continuirlichen Schaaren von Transformationen bestehen.

2) Zu bemerken ist, dass auch die zweite Hälfte meines ersten Fundamentalsatzes bei mir als specieller Fall eines allgemeinen Satzes hervortritt.

Mein zweiter Fundamentalsatz lautet so:

Wenn:

$$X_k f = \sum_1^n{}^\nu \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe sind, so bestehen Relationen von der Form:

(3) $$(X_i X_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \cdots r)$$

und umgekehrt erzeugen r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$, die in Beziehungen von der Form (3) *stehen, stets eine r-gliedrige Gruppe.*

Meinen Beweis des ersten Theiles dieses Satzes wesentlich zu vereinfachen, ist nicht möglich. Den Beweis des zweiten Theiles habe ich mit Hülfe des ersten Fundamentalsatzes geführt, indem ich vorher eine einfach transitive Gruppe construirte, die mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzt war. Herr SCHUR konnte beim Beweise dieses zweiten Theiles nicht wohl anders verfahren, nur construirt er die einfach transitive Gruppe in andrer Weise als ich.

Mein dritter Fundamentalsatz endlich sagt aus, *dass die Constanten c_{iks} in den Gleichungen* (3) *meine bekannten Relationen:*

(4) $$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r{}^\nu \{c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}\} = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \cdots r) \end{cases}$$

erfüllen und dass umgekehrt jedes System von r^3 Constanten c_{iks}, das die Gleichungen (4) *befriedigt, die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe bestimmt.*

Der erste Theil dieses Satzes lässt sich wieder nicht einfacher beweisen als ich es von jeher gethan habe, nämlich mit Hülfe der JACOBIschen Identität. Den Beweis [1]) für den zweiten Theil dagegen hat Herr SCHUR wesentlich vereinfacht [2]).

---

1) Immerhin leistet mein Beweis insofern mehr, als er *direct* die Bestimmung der betreffenden Gruppen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführt. Bemerkenswerth ist auch, dass mein Beweis den betreffenden Satz als Corollar aus viel allgemeineren Theorien ableitet.

2) Herrn KILLINGS Untersuchungen über die Zusammensetzung der

Ich hatte ursprünglich diesen zweiten Theil im Wesentlichen nur für den Fall bewiesen, dass die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehörige adjungirte Gruppe r-gliedrig war. Erst 1888 in den Verhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Christiania lieferte ich allgemein den Beweis, dass man zu jedem Systeme von c_{iks}, das die Gleichungen (4) erfüllt, eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} finden kann und zwar durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Herr Schur hat nun 1889 diesen Theil meines dritten Fundamentalsatzes auf einem wesentlich elementareren Wege abgeleitet, indem er direct Potenzreihen für die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen einfach transitiven Gruppe[1]) von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellte[2]). Er hat dann in seiner zweiten Annalenarbeit die etwas langen Rechnungen, die ihn zu diesem Ergebnisse geführt hatten, zum grössten Theile vermieden und insbesondere den schönen Satz bewiesen, dass die von ihm aufgestellten beschränkt convergenten Potenzreihen als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellbar sind.

Ich erkenne endlich sehr gern an, dass Herrn Schurs Untersuchungen über die Existenz der identischen Transformation Interesse darbieten. Durch eine Modification meiner Betrachtungen gelingt es ihm in einfacherer Weise die vorgelegte Gruppe auf eine solche Form zu bringen, dass sie die identische Transformation umfasst. Es ist aber zu bemerken, dass meine umständlichen Betrachtungen mehr leisten, insofern sie überdies zeigen, dass die Gruppe von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist.

Die Untersuchungen, in denen Herr Schur den weiteren Ausbau der Gruppentheorie gefördert hat, beziehen sich auf das

---

Gruppen beruhen sämmtlich auf meinem dritten Fundamentalsatz. Merkwürdigerweise citirt Herr Killing bei Benutzung dieses Satzes nie mich, sondern immer Jacobi, der weder die Formeln $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s$ noch die Formeln (4) kannte. Herr Killing irrt sich, wie ich schon früher hervorgehoben habe, vollständig wenn er behauptet, dass ich diesen von mir entdeckten Satz Jacobi zu Ehren als Jacobische Identität bezeichnet habe. — Die Untersuchungen des Herrn Schur zeigen, dass die Jacobische Identität in meiner Gruppentheorie vermieden werden kann.

1) Nämlich der kanonischen Parametergruppe.

2) Herr Schur kannte damals meine Christianiaer Note von 1888 noch nicht.

Problem, alle r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen.

Ich erkannte im Jahre 1874, dass das Problem alle endlichen Gruppen zu bestimmen durch Integration von *gewöhnlichen Differentialgleichungen* gelöst werden kann. Diese wichtige Entdeckung bildete den Ausgangspunkt meiner sämmtlichen Untersuchungen auf diesem Gebiete.

Es ergab sich ferner, dass diese Differentialgleichungen für Gruppen in einer, zwei oder drei Veränderlichen immer integrirbar sind. Es gelang mir überdies alle transitiven Gruppen in weniger als vier Veränderlichen auf eine solche Form zu bringen, dass ihre infinitesimalen Transformationen ganze Functionen der Veränderlichen und gewisser Exponentialgrössen $e^{l_1}, e^{l_2}, \ldots$ sind, wo $l_1, l_2 \ldots$ lineare Functionen der Veränderlichen bezeichnen.

In Bd. 24 der Math. Annalen (1884) gab ich an, dass die zur Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen erforderlichen gewöhnlichen Differentialgleichungen immer integrirt werden können. In den Leipziger Berichten für das Jahr 1888 bemerkte ich, dass mein ursprünglicher (nicht veröffentlichter) Beweis dieses Satzes nur für Gruppen ohne ausgezeichnete infinitesimale Transformationen entscheidend war. Ich fügte indess hinzu, dass ich durch allerdings schwierige Betrachtungen zu dem Resultat gekommen war, dass meine Behauptung immer richtig sei.

Vorläufig beschränkte ich mich (vgl. meine Theorie der Transformationsgruppen u. M. v. Engel, Abschn. I, Kap. 22 und diese Berichte von 1889, S. 277 ff.) darauf zu beweisen, dass alle Gruppen von gegebener Zusammensetzung in endlicher Form aufgestellt werden können, sobald die *endlichen* Gleichungen einer solchen Gruppe bekannt sind. Hierzu brauchte ich nur gewisse Quadraturen, die jedoch wegfielen, wenn keine ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen vorkamen.

Nunmehr greifen die Untersuchungen des Herrn Schur ein. Dieser zeigte zunächst[1]), was allerdings schon aus meinen Untersuchungen hervorgeht, dass man für jeden Typus transitiver Gruppen von gegebener Zusammensetzung einen Repräsentanten angeben kann, dessen infinitesimale Transformationen gewöhnliche Potenzreihen sind, die nur von den c_{iks} abhängen. Er bewies

1) Diese Berichte 1889, S. 229 ff. Sitzung vom 6. Mai und Math. Ann. Bd. 35.

ferner[1]), dass man *die bewussten infinitesimalen Transformationen sofort in endlicher Form hinschreiben kann, sobald man die infinitesimalen Transformationen meiner beiden reciproken kanonischen Parametergruppen von der Zusammensetzung* c_{iks} *kennt.* Da er nun die infinitesimalen Transformationen dieser beiden Parametergruppen als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellen konnte, so war damit zugleich bewiesen, dass *jede transitive Gruppe von der Zusammensetzung* c_{iks} *eine solche Form erhalten kann, dass ihre infinitesimalen Transformationen Quotienten angebbarer beständig convergenter Potenzreihen sind.*

Ich veröffentlichte sodann meine *früher angekündigte* Bestimmung einer Gruppe von gegebener Zusammensetzung durch ausführbare Operationen. Ich zeigte[2]), dass man durch Integration einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit *constanten* Coefficienten, das heisst also durch Auflösung einer algebraischen Gleichung, zwei reciproke einfach transitive Gruppen von gegebener Zusammensetzung finden kann.

Durch diese meine Untersuchungen war das Problem der Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung und auf Quadraturen zurückgeführt. Ich fügte hinzu, dass diese Quadraturen durch den oben erwähnten Schurschen Satz (diese Berichte 1890, S. 1 ff.) *immer* erspart werden[3]).

Endlich hat Herr Schur in seiner zweiten Annalenarbeit (Bd. 38) noch ein weitergehendes Resultat abgeleitet. Er beweist da nämlich, dass man für jeden Typus r-gliedriger transitiver Gruppen von gegebener Zusammensetzung sofort einen Repräsentanten aufstellen kann, sobald man irgend zwei reciproke einfach transitive Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung

1) Diese Berichte 1890, S. 1 ff.

2) s. diese Berichte 1890, S. 478 ff., Sitzung vom 1. December.

3) Herr Engel bemerkte, dass meine Darstellung der infinitesimalen Transformationen zweier reciproker einfach transitiver Gruppen von gegebener Zusammensetzung im Grunde die Schursche Darstellung derartiger Gruppen umfasst. Bei mir treten nämlich die Incremente dieser Transformationen in *endlicher* Form auf und zwar als rationale Functionen von den Veränderlichen und gewissen Exponentialgrössen, deren Exponenten algebraische Functionen sind. Ich verweise auf Engels letzte Untersuchungen über diesen Gegenstand (diese Berichte 1892), die u. a. auf die functionentheoretischen Eigenschaften der schönen Schurschen Reihenentwickelungen neues Licht werfen.

kennt. Herr Engel hat sodann gezeigt, wie man dieses Ergebniss aus den Entwickelungen von Kap. 22 des Abschnitts I meiner Transformationsgruppen ableiten kann[1]).

Der Leser wird nunmehr übersehen, was man zur Zeit über die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung weiss. Vollständig zum Abschluss gebracht sind die Untersuchungen über dieses Problem noch nicht, es bleibt noch zu zeigen, dass jede transitive Gruppe in n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ auf eine solche Form gebracht werden kann, dass ihre infinitesimalen Transformationen *ganze rationale Functionen* von $x_1 \dots x_n$ und von gewissen Exponentialausdrücken: e^{l_1}, $e^{l_2} \dots$ werden, wo $l_1, l_2 \dots$ lineare Functionen von $x_1 \dots x_n$ sind. Ich zweifle nicht, dass es gelingen wird, das zu beweisen; hoffen wir, dass es bald gelingt.

Ich knüpfe hieran eine persönliche Bemerkung.

Auf S. 113 f. dieser Berichte habe ich mich bereits ganz kurz über Herrn Schurs gruppentheoretische Arbeiten geäussert. Herr Schur meint nun, dass Leser, die unsre Arbeiten nicht kennen, meine damaligen Aeusserungen so verstehen könnten, als hätte ich ihn eines Plagiats beschuldigen wollen. An die Möglichkeit einer solchen Auffassung habe ich gar nicht gedacht und ich erkläre hier ausdrücklich, dass mir eine derartige Beschuldigung vollständig fern gelegen hat.

Ich war nicht einverstanden mit der Art und Weise, in der in Herrn Schurs erster Annalenarbeit die Beziehungen seiner Untersuchungen zu den meinigen dargestellt waren, auf diesen Punkt brauche ich jedoch hier nicht einzugehen, da Herr Schur inzwischen selbst in mehreren Punkten seine Auffassung geändert hat.

Ich war ferner mit Herrn Schurs Citaten nicht einverstanden. Seine zahlreichen Citate in der ersten Annalenarbeit waren nach meiner Ansicht insofern unvollständig, als sie nicht zeigten, worin sich seine Sätze von den meinigen unterschieden[2]), uncorrect

1) Diese Berichte 1891, S. 585 ff.

2) Bei der Verschiedenheit zwischen meinen Bezeichnungen und denen des Herrn Schur ist es oft sehr schwierig, sich klar zu machen, worin der Unterschied zwischen seinen und meinen Sätzen besteht, dieselbe Bemerkung habe ich auch bei den verdienstvollen Arbeiten des Herrn Maurer gemacht.

waren die Citate zum Theil, weil Herr Schur eine Arbeit von mir nicht kannte, was allerdings erklärlich ist. Ganz besonders berührte es mich unangenehm, dass mein Name in Herrn Schurs zweiter Annalenarbeit nur an zwei Stellen vorkam und zwar gerade an Stellen, wo, wie Herr Schur jetzt selbst zugesteht, unberechtigter Weise hervorgehoben wurde, dass hier gewisse Probleme gelöst wären, die ich in unvollkommener Weise behandelt hätte, während doch Herr Schur öfters seine eigenen Beweise meiner Sätze citirte[1]).

Was endlich den Fehler[2]) anbetrifft, den Herr Schur an der Spitze seiner ersten Arbeit begangen hat, so würde ich auf den gar nicht hingewiesen haben, wenn nicht diese Arbeit den Anspruch erhoben hätte, eine von mir unabhängige Entwickelung der Grundlagen meiner Gruppentheorie zu geben. Ich wollte nur sagen, dass dieser Fehler die Vollständigkeit der Schurschen Entwickelungen aufhöbe, dagegen konnte es mir selbstverständlich nicht einfallen zu behaupten, dass dieser Fehler auch die Richtigkeit der späteren Entwickelungen des Herrn Schur beeinträchtige.

Zum Schluss noch zwei Bemerkungen.

Herrn Schurs Untersuchungen über Transformationsgruppen unterscheiden sich dadurch von den meinigen, dass sie rein analytisch sind. Nun sehe ich allerdings einen grossen Vorzug meiner Darstellung darin, dass sie sich nicht darauf beschränkt alle Sätze analytisch zu beweisen, sondern den inneren Zusammenhang meiner Theorien durch begriffliche Betrachtungen klar stellt. Ich gebe aber gern zu, dass für viele Leser eine kurze rein analytische Begründung meiner Fundamentalsätze wünschenswerth ist. Darum gebe ich an anderer Stelle eine solche kurze Zusammenfassung meiner Beweise. Ich würde mich andrerseits darüber freuen, wenn Herr Schur nunmehr eine neue zusammenhängende Darstellung seiner Untersuchungen veröffentlichte.

---

1) Der Unterzeichnete glaubte in der zweiten Abhandlung Herrn Lie nicht im Einzelnen citiren zu brauchen, da er diese Arbeit als eine Fortsetzung der ersten betrachtete. F. Schur.

2) Der Unterzeichnete hatte darin einen Fehler gemacht, dass er auf S. 164 seiner ersten Abhandlung die Möglichkeit ausser Acht liess, dass die $\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x, u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}$ für $u = 0$ sämmtlich identisch verschwinden. Es lässt sich aber zeigen, dass bei Einführung geeigneter Veränderlicher und Parameter diese Möglichkeit als ausgeschlossen betrachtet werden kann. F. Schur.

Ich erlaube mir andrerseits an die Mathematiker, die sich mit meiner Gruppentheorie beschäftigen, die Bitte zu richten, *nicht ohne Grund* meine vorsichtig gewählte Terminologie zu ändern. Ganz besonders erscheint es mir wünschenswerth, dass die von mir zur Bezeichnung der verschiedenen Begriffe benutzten Buchstaben soweit möglich beibehalten werden. Es ist unzweifelhaft, dass das Studium der gruppentheoretischen Untersuchungen der Herren Maurer und Schur für die meisten Leser dadurch bedeutend erschwert wird, dass sie meine Bezeichnungen geändert haben. Aus diesen und andern Gründen ist es jedenfalls mir recht schwer gewesen genau festzustellen, welche neuen Beiträge diese beiden Verfasser zu meinen Theorien geliefert haben.

Max Siegfried, *Ueber die chemischen Eigenschaften des reticulirten Gewebes.* Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig. Vorgelegt von Herrn LUDWIG.

Ich habe das reticulirte Gewebe, welches F. MALL[1]) eingehend histologisch untersucht hat, chemisch geprüft und gefunden, dass es aus einer leimgebenden Substanz und einem neuen Proteïnkörper, den ich Reticulin nennen will, besteht. Hierdurch wird der Befund A. YOUNG's[2]), dass man aus reticulirtem Gewebe durch Kochen mit Wasser Leim erhält, bestätigt, nicht aber dessen Ansicht, dass dieses Gewebe collagenes Gewebe sei.

Das Reticulin enthält im Mittel 52,9 % Kohlenstoff, 7,0 % Wasserstoff, 15,6 % Stickstoff, 1,9 % Schwefel, 0,3 % Phosphor und 2,3 % Asche. Der Phosphor ist nicht anorganisch, sondern organisch gebunden. Durch Erhitzen mit Wasser oder sehr verdünnte Alkalien wird eine phosphorfreie, sonst ähnliche Zusammensetzung wie das Reticulin besitzende Substanz und ein phosphor- und schwefelhaltiger Körper erhalten.

Bei der Zersetzung mit Salzsäure liefert das Reticulin Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Lysin, Lysatinin und Amidovaleriansäure, kein Tyrosin.

Die ausführliche Mittheilung dieser Untersuchung soll demnächst erfolgen.

---

1) Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XVII, 1891, p. 299.

2) The journal of physiology Bd. XIII, p. 332.

INHALT.

Seite

W. Ostwald, Studien zur Energetik. II. Grundlinien der allgemeinen Energetik. 211

M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind. II. 238

G. Scheffers, Curvenschaaren, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen. Vorgelegt von dem ao. Mitgliede Engel. 269

Friedrich Engel, Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe. (Erste Mittheilung.) . . 279

Friedrich Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. VII. 292

Sophus Lie, Ueber einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen. 297

Max Siegfried, Ueber die chemischen Eigenschaften des reticulirten Gewebes. Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig. Vorgelegt von dem W. M. C. Ludwig. . . . 306

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1892.

Einzelpreis: 1 Mark.

SITZUNG VOM 1. AUGUST 1892.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Achtundzwanzigste Abhandlung.[1])

Isomere Allyl- und Propenylverbindungen

von

F. Stohmann und H. Langbein.

Bei der Ermittelung der Verbrennungswärmen von eigentlich isomeren Verbindungen haben sich zwar schon seit langer Zeit gewisse Verschiedenheiten ergeben, doch waren dieselben so gering, dass man ihnen wenig Beachtung geschenkt, vielmehr geglaubt hat, diese Abweichungen auf Beobachtungsfehler zurückführen zu sollen. Durch unsere Untersuchungen der zweibasischen Säuren der Malon- und Bernsteinsäure-Reihe, der Fumar- und Maleïnsäure und deren Ester[2]), der Eruca- und Brassidinsäure und deren Glyceride[3]), der Zuckerarten, der mehrsäurigen Alkohole, der stellungsisomeren Phenole und organischen Säuren[4]), denen wir von noch nicht ausführlicher veröffentlichtem Materiale hinzufügen können:

Zimmtsäure und Allozimmtsäure,
Tiglinsäure und Angelicasäure,
Mesaconsäure und Citraconsäure,
Elaïdinsäure und Oelsäure,
u. s. w.

---

1) Die Abhandlungen I bis XXVII sind im Journal für praktische Chemie, neue Folge, Bd. 31 bis 45 veröffentlicht.

2) Abhdlg. XIX, Journ. f. prakt. Chem. [2] XL, 202. Abhdlg. XX, daselbst XL, 357.

3) Abhdlg. XII, Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 373.

4) Abhdlg. XVI, Journ. f. prakt. Chem. [2] XLV, 305.

haben uns jedoch die Gewissheit verschafft, dass die bei Isomeren vorhandenen Verschiedenheiten nicht zufällige, sondern auf ganz bestimmten Gesetzmässigkeiten beruhen und von hoher Bedeutung sind.

Folgende Thatsachen sind von uns erwiesen:

1. Bei isomeren Säuren haben diejenigen, welche die grösste chemische Affinität besitzen, zugleich den höchsten Wärmewerth.

2. Bei stellungsisomeren Verbindungen haben die Orthoverbindungen stets einen höheren Wärmewerth als die Meta- und Paraverbindungen; der der Meta- ist in der Regel etwas höher als der der Paraverbindungen.

3. Der Wärmewerth liegt in umgekehrter Richtung wie der Schmelzpunkt:

Oelsäure — Elaïdinsäure
Erucasäure — Brassidinsäure
u. s. f.

4. Von Säuren, Estern u. s. f., welche in einer labilen und in einer stabilen Form auftreten, hat jedesmal die labile Form den höchsten Wärmewerth und geht unter Energieverlust in die stabile Form über:

Maleïnsäure . . . . . Fumarsäure
Angelicasäure. . . . . Tiglinsäure
Allozimmtsäure . . . . Zimmtsäure
Oelsäure . . . . . . Elaïdinsäure
Erucasäure. . . . . . Brassidinsäure
u. s. f.

Da nun von Eykman die Beobachtung gemacht ist, dass gewisse Aether der Allylphenole, Methylchavicol, Eugenol, Safrol, Apiol mit Leichtigkeit in die isomeren Propenylverbindungen umgewandelt werden können, von denen also erstere den labilen, letztere den stabilen Zustand darstellen, und da von Eykman [1]) ferner festgestellt ist, dass die beiden Zustände sich ganz regelmässig durch ihre physikalischen Eigenschaften, specifisches Gewicht und Refractionsvermögen, unterscheiden, so sahen wir uns veranlasst, diese Körper auf ihren Wärmewerth zu untersuchen, da auf Grund unserer früheren Erfahrungen zu

1) Ber. chem. Ges. XXIII, 862.

erwarten war, dass auch hier die labilen Körper unter Energieverlust in die stabilen Formen übergehen würden.

Wir haben Herrn Eykman unseren Dank für die erste Anregung zu dieser Arbeit, die er durch Ueberlassung von Präparaten wesentlich förderte, zu sagen. Zu grösstem Danke sind wir auch den Herren H. und E. Fritzsche, den Inhabern, und den Herren Bertram und Gildemeister, den Chemikern der weltbekannten Fabrik Schimmel & Comp. verpflichtet, welche uns durch Zuweisung von vielem und schönem Materiale vielfach unterstützten.

Die sämmtlichen Bestimmungen wurden in der Berthelotschen Bombe in auf 25 Atm. verdichtetem Sauerstoff ausgeführt, nach dem Verfahren, welches in Abhdlg. XVI[1]) ausführlich beschrieben ist. Dabei sind von uns neuerdings einige, das Princip der Methode auf keine Weise berührende Abänderungen getroffen.

Zur Verdichtung des Sauerstoffes bedienen wir uns nicht mehr der Druckpumpe, sondern verwenden das von Dr. Th. Elkan in Berlin auf 100 Atm. comprimirte Gas, von dem wir soviel in die Bombe einlassen, bis ein eingeschaltetes Manometer den erforderlichen Druck zeigt. Obwohl kaum erforderlich, so leiten wir das Gas, ehe es in die Bombe tritt, durch ein glühendes Kupferrohr, um ganz sicher alles Verbrennliche, welches möglicherweise vorhanden sein könnte, zu zerstören. Um bei der Ueberführung in die Bombe den Inhalt der Sauerstoffflaschen ausnutzen zu können, sind zwei derselben durch ein gemeinschaftliches Zwischenstück, welches zugleich das Manometer trägt, so untereinander gekuppelt, dass sowohl die eine wie die andere, einfach durch Umstellung der Ventile, mit der Bombe in Verbindung gebracht werden kann. Ist z. B. in Flasche A nur noch ein Druck von 10 Atm. vorhanden, so lassen wir zunächst aus dieser das Gas in die Bombe übertreten und ergänzen alsdann, nach Abschluss von A, den Druck aus der Flasche B, deren Inhalt noch unter hoher Spannung steht. Die dazu dienende Vorrichtung ist uns von Dr. Elkan in vorzüglichster Ausführung geliefert worden.

Da bei der Verwendung von trockenem Sauerstoff ein Theil des bei der Verbrennung gebildeten Wassers nicht in tropfbarer

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXIX, 503.

Form abgeschieden wird, so würde der Dampfwärme dieses Antheiles Rechnung zu tragen sein. Wir umgehen jedoch die dafür erforderliche Correctur, indem wir gleich beim Füllen wenige Tropfen Wasser in die Bombe bringen, um eine mit Wasser gesättigte Atmosphäre in derselben zu haben. Die Menge des dazu erforderlichen Wassers ist so gering, dass sie nicht in Rechnung gestellt zu werden braucht.

Zur Entzündung der zu verbrennenden Substanz bedienen wir uns desselben Eisendrahtes wie früher. Nur haben wir bei manchen neueren Bestimmungen 80 mm desselben, statt der bis dahin angewandten 50 mm, verwandt. Hierdurch erhöht sich die dafür anzubringende Correction von 9,1 auf 14,6 cal. Da wo dieses geschehen ist, sind die Correctionszahlen mit einem * ausgezeichnet.

Methylchavicol.

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2\\O\cdot CH_3\end{cases} \text{ oder } C_{10}H_{12}O \quad . \quad . \quad . \quad 148.$$

Allylphenyl-Methyläther.

Ein Präparat von Schimmel & Co., welches uns als »wahrscheinlich noch nicht ganz rein« bezeichnet war, wurde im Vacuum destillirt. Die drei ersten Fractionen, welche bei 124° bei 35 mm Druck übergingen, dienten zu den Bestimmungen 1, 2, 3 und erwiesen sich durch die gleiche Verbrennungswärme als identisch. Zuletzt ging eine geringe Menge eines grüngefärbten Oeles über, aus welchem sich beim Stehen nadelförmige Krystalle abschieden. Dieser Antheil wurde nicht weiter untersucht.

Brechungsindex nach Dr. Gildemeister $n_D = 1{,}5179$ bei 23°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,8514	16,1832	13,1027	3,0805	7701,3	24,9
2.	0,9191	16,4674	13,1532	3,3142	8285,5	19,4
3.	0,9380	16,2161	12,8255	3,3906	8476,5	25,9

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7676,4	9016,2	1334,4	100,06
2.	8275,9[1])	9004,3	1332,6	99,93
3.	8452,2[2])	9010,9	1333,6	100,00
	Mittel	9010,5	1333,6	f. const. Vol.
			1335,1	» » Druck.
		Bildungswärme	18,9	» » »

Eugenol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ OH & 4.\end{cases} \text{ oder } C_{10}H_{12}O_2 \;.\;.\;.\; 164.$$

Allyldioxybenzol-Monomethyläther.

Reines Eugenol von Schimmel & Co. erwies sich als noch etwas wasserhaltig. Es wurde daher von uns noch zweimal im Vacuum unter Ausscheidung der zuerst übergehenden Antheile destillirt.

Spec. Gew. 1,072 bei 15°.

Herr Eykman hatte die Güte, das Refractionsvermögen dieses Präparates zu bestimmen. Derselbe fand, nach brieflicher Mittheilung, völlige Uebereinstimmung mit seinen früheren Ermittelungen.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 . 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0026	19,7977	16,6385	3,1592	7898,0	33,8*
2.	0,9746	20,0097	16,9441	3,0656	7664,0	29,6*
3.	1,0276	20,3244	17,0888	3,2356	8089,0	31,6*

1) Für 0,0012 g Russ sind 9,7 cal. als Correction in Rechnung gestellt.
2) » 0,0002 » » » 1,6 » » » » » »

Wärmewerth

	der Substanz	pro Grm.	pro Grm. Mol.	Mittel = 100.
1.	7864,2	7843,8	1286,4	100,05
2.	7634,4	7833,4	1284,7	99,92
3.	8057,4	7841,9	1286,1	100,03
	Mittel	7839,7	1285,7	f. const. Vol.
			1286,9	» » Druck.
		Bildungswärme	67,1	» » »

Eugenolacetat.

$$C_6H_3\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ O\cdot OC\cdot CH_3 & 4.\end{cases} \quad \text{oder } C_{12}H_{14}O_3 \;.\;.\; 206.$$

Allyldioxybenzol-Monomethyl-Essigsäureäther.

Das Eugenolacetat wurde von uns nach dem Verfahren von Tiemann (Ber. d. chem. Ges. X, 202) dargestellt, indem gleiche Theile reines Eugenol und Essigsäureanhydrid 3 bis 4 Stunden am Rückflusskühler gekocht und dann im Vacuum destillirt wurden. Der zuerst übergehende, aus Essigsäure und Anhydrid bestehende Antheil wurde beseitigt. Der höher siedende Antheil wurde, um etwa noch vorhandene freie Säure und unverändertes Eugenol fortzuschaffen, mit Natronlauge durchschüttelt, mit Wasser gewaschen, mit wasserfreiem Natriumsulfat getrocknet und von Neuem im Vacuum destillirt, wobei das Uebergehende in mehreren Fractionen aufgefangen wurde. Das Destillat zeigte in hohem Grade den Zustand der Unterkaltung. Trotz mehrtägigem Stehen im Eisschranke blieben alle vier Fractionen flüssig. Die Erstarrung trat aber in allen Fractionen sofort beim Einbringen eines kleinen Krystalls der Verbindung, den wir von der Fabrik von Schimmel & Co. erhielten, ein. Der Ester wurde aus Aether zweimal umkrystallisirt, aus welcher Lösung er beim Verdunsten in prachtvollen Krystallen zu erhalten ist. Schmelzpunkt 28,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0150	19,3270	16,3651	2,9619	7404,8	29,1*
2.	1,0035	19,3202	16,3938	2,9264	7316,0	27,6*
3.	1,0638	19,6202	16,5122	3,1080	7770,0	29,6*

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7375,7	7266,7	1496,9	99,97
2.	7288,4	7262,9	1496,2	99,92
3.	7740,4	7276,2	1498,9	100,10
	Mittel	7268,6	1497,3	f. const. Vol.
			1498,5	» » Druck.
		Bildungswärme	112,5	» » »

Eugenolbenzoat.

$$C_6H_3 \begin{cases} CH_2 \cdot CH : CH_2 & 1. \\ O \cdot CH_3 & 3. \\ O \cdot OC \cdot C_6H_5 & 4. \end{cases} \text{oder } C_{17}H_{16}O_3. \quad . \quad . \quad 268.$$

Allyldioxybenzol-Monomethyl-Benzoesäureäther.

Zur Darstellung wurde reines Eugenol in 10proc. Natronlauge gelöst und ein dem Eugenol gleiches Gewicht Benzoylchlorid unter Umschütteln hinzugetropft. Der körnig ausgeschiedene Ester wurde mit Sodalösung gewaschen und nach einander aus Alkohol und aus Aether umkrystallisirt. Beim Verdunsten der ätherischen Lösung wurde der Ester in grossen, monoklinen Krystallen erhalten. Schmelzpunkt 69 bis 70°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0314	20,6350	17,4428	3,1922	7980,5	35,9*
2.	0,8981	20,2814	17,5032	2,7782	6945,5	31,1*
3.	0,8786	20,3937	17,6747	2,7195	6798,8	33,2*

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7944,6	7702,7	2064,3	100,03
2.	6914,4	7698,9	2063,3	99,98
3.	6765,6	7700,4	2063,7	100,00
	Mittel	7700,7	2063,8	f. const. Vol.
			2065,3	» » Druck.
		Bildungswärme	84,7	» » »

Betelphenol oder Chavibetol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2 & 1.\\ OH & 3.\\ O\cdot CH_3 & 4.\end{cases} \text{od.} C_{10}H_{12}O_2 \quad . \quad . \quad . \quad 164.$$

Allyldioxybenzol-Monomethyläther.

Präparat von Bertram & Gildemeister[1]). Journ. f. prakt. Chem. [2], XXXIX, 350.

n_D = 1,54205 bei 17°.

Spec. Gew. 1,072 bei 15°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9543	18,8056	15,8105	2,9951	7980,8	22,5
2.	0,9207	18,4664	15,5685	2,8979	7244,8	26,1
3.	0,8694	18,4609	15,7218	2,7391	6847,8	26,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7473,4[1])	7831,3	1284,3	99,90
2.	7218,7	7840,4	1285,8	100,01
3.	6821,7	7846.4	1286,8	100,09
	Mittel	7839,4	1285,7	f. const. Vol.
			1286,9	» » Druck
		Bildungswärme	67,1	» » »

1) Für 0,0010 g Russ sind 8,1 cal. als Correction in Rechnung gestellt.

Betelphenol- oder Chavibetolbenzoat.

$$C_6H_3\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2 & 1.\\ O\cdot OC\cdot C_6H_5 & 3.\\ O\cdot CH_3 & 4.\end{cases} \text{ od. } C_{17}H_{16}O_3 \quad \ldots \quad 268.$$

Allyldioxybenzol-Benzoësäure-Monomethyläther.

Präparat von Bertram & Gildemeister. Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXIX, 351. Glänzende Blättchen. Schmelzpunkt 49 bis 50°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9303	20,0604	17,1834	2,8770	7192,5	34,3*
2.	0,9400	20,0790	17,1739	2,9051	7262,8	29,6*
3.	0,9131	20,2828	17,4548	2,8280	7070,0	33,6*
4.	0,9127	20,0901	17,2617	2,8284	7071,0	34,7*

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7158,2	7694,5	2062,1	99,91
2.	7233,2	7694,9	2062,2	99,92
4.	7036,4	7706,1	2065,2	100,06
4.	7036,3	7709,3	2066,1	100,10
	Mittel	7701,2	2063,9	f. const. Vol.
			2065,4	» » Druck.
	Bildungswärme		84,6	» » »

Methyleugenol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ O\cdot CH_3 & 4.\end{cases} \text{ oder } C_{11}H_{14}O_2 \quad \ldots \quad 178.$$

Allyldioxybenzol-Dimethyläther.

Präparat von Eykman.

Farblose Flüssigkeit.

Siedepunkt 251,3° bei 749 mm Druck.

» 182° » 106 » »

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,7638	17,4932	14,9811	2,5121	6280,3	23,8
2.	0,9993	19,1302	15,8474	3,2828	8207,0	24,2
3.	0,9523	18,5740	15,4466	3,1274	7818,5	22,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6256,5	8191,3	1458,1	100,03
2.	8182,8	8188,5	1457,6	100,00
3.	7796,4	8186,9	1457,3	99,98
	Mittel	8188,9	1457,6	f. const. Vol.
			1459,1	» » Druck.
		Bildungswärme	57,9	» » »

Safrol.

$$C_6H_3 \begin{cases} CH_2 \cdot CH : CH_2 & 1. \\ \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} > CH_2 & \begin{matrix} 3. \\ 4. \end{matrix} \end{cases} \quad \text{oder} \quad C_{10}H_{10}O_2 \quad . \; . \quad 162.$$

Allyldioxybenzol-Methylenäther.

Zu den Bestimmungen 1 bis 3 diente ein Präparat von Herrn Eykman.

Siedepunkt bei 759 mm Druck = 233°.

» » 106 » » = 163°.

Zu der Bestimmung 4 diente ein Präparat von Schimmel & Co.

Spec. Gew. 1,108 bei 15°.

n_D = 1,53836 bei 17° nach Bestimmungen von Dr. Gildemeister.

Die Uebereinstimmung der Verbrennungswärmen beider Präparate beweist die Reinheit derselben.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9500	19,6604	16,7359	2,9245	7311,3	22,9
2.	0,9960	18,7316	15,6620	3,0696	7674,0	23,9
3.	0,9264	18,3137	15,4601	2,8536	7134,0	22,1
4.	1,0767	18,5699	15,2510	3,3189	8297,3	27,5

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7288,4	7672,0	1242,9	99,93
2.	7650,1	7680,8	1244,3	100,04
3.	7111,9	7676,9	1243,7	99,99
4.	8269,8	7680,7	1244,3	100,04
	Mittel	7677,6	1243,8	f. const. Vol.
			1244,7	» » Druck.
	Bildungswärme		40,3	» » »

Apiol.

$$C_6H\begin{cases}CH_2\cdot CH:CH_2\\ \begin{matrix}O\\O\end{matrix}\!\!>CH_2\\ O\cdot CH_3\\ O\cdot CH_3\end{cases} \quad \text{oder } C_{12}H_{14}O_4 \quad . \; . \quad 222.$$

Allyltetraoxybenzol-Methylendimethyläther.

In schönen Nadeln krystallisirtes Präparat von Schimmel & Co. Schmelzpunkt 29,5 bis 30°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,8224	19,3836	17,1523	2,2313	5578,3	21,1
2.	0,7898	19,3311	17,1914	2,1397	5349,3	21,1
3.	0,7998	19,4031	17,2414	2,1617	5404,3	20,7

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	5557,2	6757,3	1500,1	100,09
2.	5328,2	6746,2	1497,7	99,93
3.	5398,2 [1])	6749,4	1498,4	99,98
	Mittel	6751,0	1498,7	f. const. Vol.
			1499,6	» » Druck
		Bildungswärme	111,4	» » »

Anethol.

$C_6H_4\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 4.\end{cases}$ oder $C_{10}H_{12}O$. 148.

Propenylphenyl-Methyläther.

Präparat von Schimmel & Co.

Nach Bestimmungen von Dr. Gildemeister:

$n_D = 1{,}56149$ bei 18°.

Spec. Gew. 0,986 bei 25°.

Schmelzpunkt 21°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9343	20,9363	17,5850	3,3513	8378,3	27,9
2.	0,9943	21,4428	17,8777	3,5651	8912,8	24,1
3.	1,0222	18,5152	14,8539	3,6613	9153,3	21,0

Wärmewerth des festen Anethols

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	8350,4	8937,6	1322,8	100,01
2.	8888,7	8939,7	1323,1	100,03
3.	9132,3	8934,0	1322,2	99,96
	Mittel	8937,1	1322,7	f. const. Vol.
			1324,2	» » Druck.
		Bildungswärme	29,8	» » »

1) Für 0,0018 Grm. Russ sind 14,6 cal. als Correction in Rechnung gestellt.

Isoeugenol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ OH & 4.\end{cases} \quad \text{oder } C_{10}H_{12}O_2 \quad . \quad . \quad . \quad 164.$$

Propenyldioxybenzol-Monomethyläther.

Präparat von Haarmann & Reimer. Zu den Bestimmungen 1 und 2 diente das von Haarmann & Reimer erhaltene Präparat. Dasselbe wurde ausserdem von uns, unter Absonderung des zuerst und des zuletzt übergehenden Antheiles, im Vacuum destillirt. Von dem mittleren Antheil wurden die Verbrennungen 3 und 4 ausgeführt. Die Uebereinstimmung der Zahlen beweist die Gleichartigkeit des ganzen Präparates.

Der Brechungsexponent wurde auf unser Ansuchen von Dr. Gildemeister bestimmt und ergab sich zu $n_D = 1,57318$ bei 16°.

Spec. Gew. 1,083 bei 21,4°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9308	19,2237	16,3160	2,9077	7269,3	23,9
2.	1,0454	19,6743	16,4061	3,2682	8170,5	26,6
3.	1,0576	18,6849	15,3801	3,3048	8262,0	24,3
4.	0,8830	18,2719	15,5129	2,7590	6897,5	25,3

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7245,4	7784,1	1276,6	99,97
2.	8143,9	7790,2	1277,6	100,05
3.	8237,7	7789,0	1277,4	100,04
4.	6872,2	7782,8	1276,4	99,96
	Mittel	7786,0	1276,9	f. const. Vol.
			1278,1	» » Druck.
		Bildungswärme	75,9	» » »

Isoeugenolacetat.

$$C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ O\cdot OC\cdot CH_3 & 4.\end{cases}\text{ oder } C_{12}H_{14}O_3 \quad . \quad . \quad 206.$$

Propenyldioxybenzol - Monomethyl - Essigsäureäther.

Präparat von Haarmann & Reimer, wurde von uns noch zweimal, zuerst aus Aether, dann aus einer Mischung von Benzol und Petroleumäther umkrystallisirt, wobei es in prachtvollen Krystallen erhalten wurde. Schmelzpunkt 79 bis 80°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9375	19,1982	16,4782	2,7200	6800,0	32,7*
2.	0,9628	19,4044	16,6113	2,7931	6982,8	30,6*
3.	1,0395	19,1810	16,1639	3,0171	7542,8	29,3*

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	6767,3	7218,4	1487,0	99,95
2.	6952,2	7220,8	1487,5	99,98
3.	7513,5	7227,9	1488,9	100,08
	Mittel	7222,3	1487,8	f. const. Vol.
			1489,0	» » Druck.
		Bildungswärme	122,0	» » »

Isoeugenolbenzoat.

$$C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ O\cdot OC\cdot C_6H_5 & 4.\end{cases}\text{ oder } C_{17}H_{16}O_3 \quad . \quad . \quad 268.$$

Propenyldioxybenzol - Monomethyl - Benzoësäureäther.

Das Präparat wurde von uns auf gleiche Weise dargestellt wie das Eugenolbenzoat. Aus Aether krystallisirt der Ester in kleinen Prismen. Schmelzpunkt 103 bis 104°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0042	20,3798	17,2900	3,0898	7724,5	30,2*
2.	0,9850	20,2578	17,2239	3,0339	7584,8	30,6*
3.	0,9970	19,5114	16,4415	3,0699	7674,8	29,8*

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7694,3	7662,1	2053,4	99,94
2.	7554,2	7669,2	2055,3	100,04
3.	7645,0	7668,0	2055,0	100,02
Mittel		7666,4	2054,6	f. const. Vol.
			2056,1	» » Druck.
	Bildungswärme		93,9	» » »

Methylisoeugenol.

$$C_6H_3\begin{cases} CH:CH\cdot CH_3 & 1. \\ O\cdot CH_3 & 3. \\ O\cdot CH_3 & 4. \end{cases} \text{ oder } C_{11}H_{14}O_2 \quad . \quad . \quad 178.$$

Propenyldioxybenzol-Dimethyläther.

Präparat von Herrn EYKMAN.
Farblose Flüssigkeit.
Siedepunkt 267° bei 765 mm Druck.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9862	19,1741	15,9581	3,2160	8040,0	25,5
2.	0,8936	18,2827	15,3652	2,9175	7293,8	24,9
3.	0,7863	19,0037	16,4415	2,5622	6405,5	22,4

Wärmewerth

	der Substanz	pro Grm.	pro Grm. Mol.	Mittel = 100
1.	8014,5	8126,6	1446,5	100,00
2.	7268,9	8134,4	1447,9	100,10
3.	6383,1	8117,9	1445,0	99,90

Mittel 8126,3 1446,5 f. const. Vol.
1448,0 » » Druck.
Bildungswärme 69,0 » » »

Aethylisoeugenol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3 & 1.\\ O\cdot CH_3 & 3.\\ O\cdot C_2H_5 & 4.\end{cases}\quad \text{oder } C_{12}H_{16}O_2 \; . \; . \; . \; 192.$$

Propenyldioxybenzol-Methyläthyläther.

Präparat von Herrn Eykman.

Farblose Krystalle, Schmelzpunkt 60°.

Siedepunkt 273° bei 767 mm Druck.

» 201° » 106 » »

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0310	19,9004	16,4538	3,4466	8616,5	24,7
2.	0,9149	19,8974	16,8359	3,0615	7653,8	23,5
3.	1,0075	19,5857	16,2134	3,3723	8430,8	25,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	8591,8	8333,5	1600,0	99,94
2.	7660,3	8340,0	1601,3	100,01
3.	8405,7	8343,1	1601,9	100,05

Mittel 8338,9 1601,1 f. const. Vol.
1602,9 » » Druck.
Bildungswärme 77,1 » » »

Isosafrol.

$$C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3\\ O\\ O\end{cases}>CH_2 \quad \text{oder } C_{10}H_{10}O_2 \quad . \quad . \quad 162.$$

Propenyldioxybenzol-Methylenäther.

Präparat von Schimmel & Co.
Nach Bestimmungen von Dr. Gildemeister:
$n_D = 1{,}57975$ bei 17°.
Spec. Gew. 1,1267 bei 15°.
Siedepunkt 252 bis 253°.
Schmelzpunkt 8 bis 9°.

Das in der Fabrik von Schimmel & Co. in grossem Maassstabe dargestellte Isosafrol hat unzweifelhaft einen hohen Grad an Reinheit, wie sich aus seinem thermischen Verhalten ergiebt. Ob dasselbe aber als absolut rein zu betrachten ist, kann zweifelhaft erscheinen, da von Dr. von Heyden's Nachfolger ein Isosafrol mit dem Schmelzpunkte 33° dargestellt wird. Letzteres Präparat haben wir noch nicht erhalten können.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9360	18,7206	15,8623	2,8583	7145,8	22,9
2.	0,9661	18,8813	15,9307	2,9506	7376,5	23,1
3.	1,0264	19,8919	16,7534	3,1385	7846,3	21,9

Wärmewerth des flüssigen Isosafrols

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7122,9	7609,9	1232,8	99,94
2.	7353,4	7611,4	1233,0	99,96
3.	7824,4	7623,1	1234,9	100,11
	Mittel	7614,8	1233,6	f. const. Vol.
			1234,5	» » Druck.
		Bildungswärme	50,5	» » »

Asaron.

$$C_6H_2\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3\\(O\cdot CH_3)_3\end{cases} \quad \text{oder} \quad C_{12}H_{16}O_3 \quad . \; . \; 208.$$

Propenyltrioxybenzol-Trimethyläther.
Schön krystallisirtes Präparat von Schimmel & Co.
Schmelzpunkt 59 bis 60°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	0,9382	19,5911	16,7413	2,8498	7124,5	25,9
2.	0,8222	19,8615	17,3609	2,5006	6251,5	23,1
3.	0,9226	20,2622	17,4548	2,8074	7018,5	26,2

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7098,6	7566,2	1573,8	99,90
2.	6228,4	7575,3	1575,7	100,02
3.	6992,3	7578,9	1576,4	100,07
	Mittel	7573,5	1575,3	f. const. Vol.
			1576,8	» » Druck.
	Bildungswärme		103,2	» » »

Isapiol.

$$C_6H\begin{cases}CH:CH\cdot CH_3\\ O \\ O{>}CH_2\\ O\cdot CH_3\\ O\cdot CH_3\end{cases} \quad \text{oder} \quad C_{12}H_{14}O_4 \; . \; . \; . \; . \; 222.$$

Propenyltetraoxybenzol-Methylendimethyläther.
In feinen Nadeln krystallisirtes Präparat von Herrn Eykman.
Siedepunkt 210° bei 68 mm Druck.
Schmelzpunkt 54 bis 55°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0423	19,1261	16,3174	2,8087	7021,8	33,4 *
2.	0,8281	18,7549	16,5231	2,2318	5579,5	29,8 *

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro. Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	6988,4	6704,8	1488,5	100,02
2.	5549,7	6701,7	1487,8	99,98
	Mittel	6703,3	1488,1	f. const. Vol.
			1489,0	» » Druck.
		Bildungswärme	122,0	» » »

Anisol.

$C_6H_5 \cdot O \cdot CH_3$ oder C_7H_8O . . . . 108.

Phenylmethyläther.

Zu den Untersuchungen diente dasselbe Präparat, welches zu unseren in Abhdlg. XI[1]) mitgetheilten Bestimmungen benutzt ist, nachdem dasselbe noch einmal rectificirt worden war. Für seinen Wärmewerth hatten wir früher, beim Verbrennen im Lämpchen bei gewöhnlichem Druck 901,3 Cal. gefunden.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1 \cdot 2500$ cal.	Correction f. Fe u. HNO_3 cal.
1.	1,0484	20,8774	17,3609	3,5165	8791,3	24,6
2.	0,8530	19,5385	16,6791	2,8594	7148,5	19,0
3.	0,9722	16,6641	13,3975	3,2666	8166,5	21,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm. Mol. cal.	Mittel = 100
1.	8776,4[2])	8371,2	904,1	99,95
2.	7139,2[3])	8369,5	903,9	99,93
3.	8152,7[4])	8385,8	905,7	100,12
	Mittel	8375,5	904,6	f. const. Vol.
			905,5	» » Druck.
		Bildungswärme	28,5	» » »

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXV, 23.

2) Für 0,0012 g Russ sind 9,7 cal. als Correction in Rechnung gestellt.

3) » 0,0013 » » » 10,6 » » » » » »

4) » 0,0009 » » » 7,3 » » » » » »

Uebersicht.

		Mol. Gew.	Wärmewerth Vol. const. pro Grm. Cal.	Wärmewerth Vol. const. pro Grm. Mol. Cal.	Wärmewerth Druck const. pro Grm. Mol. Cal.	Bildungswärme Cal.	Aggregatzustand
Allylderivate.							
Methylchavicol ...	$C_{10}H_{12}O$	148	9010,5	1333,6	1335,1	18,9	flüssig
Eugenol.........	$C_{10}H_{12}O_2$	164	7839,7	1285,7	1286,9	67,1	»
Eugenolacetat....	$C_{12}H_{14}O_3$	206	7268,6	1497,3	1498,5	112,5	fest
Eugenolbenzoat...	$C_{17}H_{16}O_3$	268	7700,7	2063,8	2065,3	84,7	»
Betelphenol......	$C_{10}H_{12}O_2$	164	7839,4	1285,7	1286,9	67,1	flüssig
Betelphenolbenzoat	$C_{17}H_{16}O_3$	268	7701,2	2063,9	2065,4	84,6	fest
Methyleugenol....	$C_{11}H_{14}O_2$	178	8188,9	1457,6	1459,1	57,9	flüssig
Safrol...........	$C_{10}H_{10}O_2$	162	7677,6	1243,8	1244,7	40,3	»
Apiol...........	$C_{12}H_{14}O_4$	222	6751,0	1498,7	1499,6	111,4	fest
Propenylderivate.							
Anethol.........	$C_{10}H_{12}O$	148	8937,1	1322,7	1324,2	29,8	fest
Isoeugenol.......	$C_{10}H_{12}O_2$	164	7786,0	1276,9	1278,1	75,9	flüssig
Isoeugenolacetat..	$C_{12}H_{14}O_3$	206	7222,3	1487,8	1489,0	122,0	fest
Isoeugenolbenzoat	$C_{17}H_{16}O_3$	268	7666,4	2054,6	2056,1	93,9	»
Methylisoeugenol .	$C_{11}H_{14}O_2$	178	8126,3	1446,5	1448,0	69,0	flüssig
Aethylisoeugenol .	$C_{12}H_{16}O_2$	192	8338,9	1601,1	1602,9	77,1	fest
Isosafrol	$C_{10}H_{10}O_2$	162	7614,8	1233,6	1234,5	50,5	flüssig
Asaron..........	$C_{12}H_{16}O_3$	208	7573,5	1575,3	1576,8	103,2	fest
Isoapiol	$C_{12}H_{14}O_4$	222	6703,3	1488,1	1489,0	122,0	»
Anisol	C_7H_8O	108	8375,5	904,6	905,5	28,5	flüssig

Abgeleitete Resultate.

I. Isomerie.

1. Eugenol und Betelphenol, welche sich nur durch die Stellung der Methoxyl- und Hydroxylgruppe von einander unterscheiden, haben genau gleichen Wärmewerth:

Eugenol	1286,9 Cal.
Betelphenol . . .	1286,9 »
Eugenolbenzoat. .	2065,3 Cal.
Betelphenolbenzoat	2065,4 »

2. Der Wärmewerth der isomeren Allyl- und Propenylverbindungen ist wesentlich verschieden und zwar derart, dass die Allylverbindungen regelmässig einen *erheblich* höheren Wärmewerth besitzen, als die Propenylverbindungen:

Methylchavicol.	$C_{10}H_{12}O$	1335,1 Cal.	10,9 Cal.
Anethol. . . .	$C_{10}H_{12}O$	1324,2 »	
Eugenol. . . .	$C_{10}H_{12}O_2$	1286,9 Cal.	8,8 Cal.
Isoeugenol . . .	$C_{10}H_{12}O_2$	1278,1 »	
Eugenolacetat. .	$C_{12}H_{14}O_3$	1498,5 Cal.	9,5 Cal.
Isoeugenolacetat	$C_{12}H_{14}O_3$	1489,0 »	
Eugenolbenzoat	$C_{17}H_{16}O_3$	2065,3 Cal.	9,2 Cal.
Isoeugenolbenzoat	$C_{17}H_{16}O_3$	2056,1 »	
Methyleugenol.	$C_{11}H_{14}O_2$	1459,1 Cal.	11,1 Cal.
Methylisoeugenol.	$C_{11}H_{14}O_2$	1448,0 »	
Safrol	$C_{10}H_{10}O_2$	1244,7 Cal.	10,2 Cal.
Isosafrol. . . .	$C_{10}H_{10}O_2$	1234,5 »	
Apiol	$C_{12}H_{14}O_4$	1499,6 Cal.	10,6 Cal.
Isoapiol. . . .	$C_{12}H_{14}O_4$	1489,0 »	

Sämmtliche Beobachtungen bestätigen daher die oben S. 308 ausgesprochene Voraussetzung, dass die labilen Allylverbindungen einen höheren Energiegehalt besitzen als die stabilen Propenylverbindungen. Da hier die Oxybenzoläther und deren Benzoate und Acetate ein ganz gleiches Verhalten zeigen, und da ein ganz gleiches Verhalten bei allen bislang untersuchten isomeren Säuren, ferner bei isomeren Glyceriden beobachtet worden ist, so lässt sich aus diesen Thatsachen das allgemeine Gesetz ableiten:

Isomere Körper, welche in einer labilen und in einer stabilen Form auftreten, gehen unter Energieverlust in die stabile Form über.

Es dürfte vielleicht nicht zu gewagt erscheinen, wenn man den Ueberschuss an Energie, welchen die eine Gruppe von Körpern im Vergleiche zu den anderen enthält, als die *Ursache* ihrer Labilität bezeichnen wollte.

Diese Vermuthung findet eine weitere Bestätigung in dem Verhalten isomerer Zuckerarten. Von den Aldosen wird Glucose äusserst leicht von Hefe angegriffen, während Galactose schwer in Gährung zu bringen ist. Erstere stellt daher wegen der grösseren Leichtigkeit, mit welcher die Atome, durch den von der Hefe gegebenen Anstoss, in Bewegung gerathen, eine labile, letztere eine stabile Form dar. Von den Ketosen vergährt Fructose äusserst leicht, Sorbinose ist der Gährung nicht fähig. In beiden Fällen hat die labilere Form den grössten, die stabilere Form den geringeren Energiegehalt, wie aus unseren Bestimmungen in Abhdlg. XXVI[1]) hervorgeht:

labil	Glucose	673,7 Cal.	3,8 Cal.
stabil	Galactose	669,9 »	
labil	Fructose	675,9 Cal.	7,3 Cal.
stabil	Sorbinose	668,6 »	

Von grossem Interesse würde es sein, das physiologische Verhalten der Allyl- und Propenyl-Verbindungen weiter zu studiren. Auf Grund des gänzlich verschiedenen Verhaltens der Salicylsäure und der Paraoxybenzoësäure ist zu erwarten, dass Eugenol und Isoeugenol, dass Safrol und Isosafrol u. s. w. ähnliche Beziehungen zeigen werden wie Salicylsäure und Paraoxybenzoësäure.

3. Die labilen Allylverbindungen besitzen geringeres specifisches Gewicht und geringeres Refractionsvermögen, als die stabilen Propenylverbindungen. Diese Thatsachen sind durch die oben erwähnten Untersuchungen von Eykman erwiesen.

4. Die labilen Allyl-Verbindungen haben einen tiefer liegenden Schmelzpunkt als die stabilen Propenyl-Verbindungen:

Methylchavicol . .	flüssig
Anethol	21°
Eugenol . . .	nur in flüssiger Form bekannt.
Isoeugenol . .	

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLV, 339.

Eugenolacetat . .	28,5°
Isoeugenolacetat. .	79 bis 80°
Eugenolbenzoat . .	69 bis 70°
Isoeugenolbenzoat .	103 bis 104°
Methyleugenol . Methylisoeugenol	nur in flüssiger Form bekannt.
Safrol	11 bis 12°
Isosafrol	33°
Apiol	29,5 bis 30°
Isoapiol	54 bis 55°.

Die hier in Betracht kommenden Körper zeigen daher dasselbe Verhalten wie die Säuren, Glyceride u. s. w. Auch bei diesen liegt der Schmelzpunkt der labilen Form regelmässig niedriger als bei den stabilen Formen.

5. Labile Säuren haben, entsprechend ihrem höheren Gehalte an Gesammtenergie, grössere chemische Energie als die stabilen Säuren. Wir haben dieses früher bereits für Maleïnsäure und Fumarsäure erwiesen (Abhdlg. XX [1]) und werden in einer späteren Abhandlung noch eine Fülle von weiterem Beweismaterial erbringen.

II. Bildungswärmen.

1. Reaction: $-H + OH$.

Die Vertretung des Wasserstoffs durch Hydroxyl ist von uns bereits mehrfach ermittelt. (Vgl. Abhdlg. XXVI [2].) Von den hier vorliegenden Körpern sind Methylchavicol und Eugenol (beide flüssig), und Anethol (fest) und Isoeugenol (flüssig) mit einander zu vergleichen:

Methylchavicol	$C_{10}H_{12}O$ . .	1335,1	— 48,2 Cal.
Eugenol . .	$C_{10}H_{12}O_2$ . .	1286,9	
Anethol. . .	$C_{10}H_{12}O$ . .	1324,2	— 46,1 Cal.
Isoeugenol. .	$C_{10}H_{12}O_2$ . .	1278,1	

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XL, 358.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLV, 349.

Die kleine Verschiedenheit war in der beobachteten Richtung zu erwarten, da der Werth des Anethols durch den Betrag der Schmelzwärme beeinflusst wird.

Die hier gefundenen Werthe der Hydroxylgruppe stimmen völlig mit früheren Beobachtungen überein.

2. Reaction: $- H + CH_2 \cdot CH : CH_2$
und $- H + CH : CH \cdot CH_3$

Der Vertretungswerth der Allylgruppe ergiebt sich aus dem Vergleiche des Phenylmethyläthers mit dem Methylchavicol, der der Propenylgruppe leitet sich aus dem Vergleiche des Phenylmethyläthers mit dem Anethol ab:

Methylchavicol. .	$C_{10}H_{12}O$ . .	1335,1	+ 429,6 Cal.
Phenylmethyläther	$C_7\ H_8\ O$ . .	905,5	
Anethol	$C_{10}H_{12}O$ . .	1324,2	+ 418,7 Cal.
Phenylmethyläther	$C_7\ H_8\ O$ . .	905,5	

Es beträgt daher der Vertretungswerth der

Allylgruppe	429,6 Cal.
Propenylgruppe . . .	418,7 »

Hiernach ergeben sich für die substituirten Oxybenzole, welche als die Muttersubstanzen der uns in dieser Abhandlung beschäftigenden Verbindungen zu betrachten sind, folgende Werthe:

Allylphenol	$C_9H_{10}O$ . .	1162,1 Cal.
Propenylphenol . . .	$C_9H_{10}O$ . .	1151,2 »
Allylbrenzcatechin . .	$C_9H_{10}O_2$ . .	1114,8 »
Propenylbrenzcatechin	$C_9H_{10}O_2$ . .	1103,9 »
Propenylpyrogallol . .	$C_9H_{10}O_3$ . .	1057,7 »

3. Aetherbildung.

Die Bildung von Aethern aus Phenolen und einsäurigen Alkoholen der aliphatischen Reihe haben wir schon früher studirt (Abhdlg. XII [1]).

Wir benutzen hier zur Berechnung der Bildungswärmen ausser den in dieser Abhandlung sich findenden Zahlen folgende Werthe:

---

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXV, 33.

Phenol C_6H_6O . . .	732,5 Cal.	[1]
Methylalkohol CH_4O .	170,6 »	[2]
Aethylalkohol C_2H_6O.	325,7 »	[3]

Darnach ergeben sich folgende Beziehungen:

Bildung des Phenylmethyläthers:

Phenol C_6H_6O	732,5 Cal.	
Methylalkohol CH_4O . .	170,6 »	
	903,1 Cal.	— 2,4 Cal.
Phenylmethyläther C_7H_8O	905,5 »	

Bildung des Methyleugenoläthers:

Eugenol $C_{10}H_{12}O_2$ . . .	1286,9 Cal.	
Methylalkohol CH_4O . .	170,6 »	
	1457,5 Cal.	— 1,6 Cal.
Methyleugenol $C_{11}H_{14}O_2$.	1459,1 »	

Bildung des Isoeugenolmethyläthers:

Isoeugenol $C_{10}H_{12}O_2$ . .	1278,1 Cal.	
Methylalkohol CH_4O . .	170,6 »	
	1448,7 Cal.	+ 0,7 Cal.
Methylisoeugenoläther $C_{11}H_{14}O_2$	1448,0 »	

Bildung des Isoeugenoläthyläthers:

Isoeugenol $C_{10}H_{12}O_2$ . .	1278,1 Cal.	
Aethylalkohol C_2H_6O . .	325,7 »	
	1603,8 Cal.	+ 0,9 Cal.
Isoeugenoläthyläther $C_{12}H_{16}O_2$	1602,9 »	

Während nach unseren früheren Untersuchungen die Bildung der Phenoläther regelmässig endotherm, unter Bindung von ca. 6 Cal. verläuft, zeigen vorstehende Zahlen, denen wir gegenüber den früheren unbedingt den Vorzug einräumen, dass der Process auf der Grenze der endothermen und exothermen Vorgänge steht. Die Bildung der Phenoläther verläuft daher auf gleiche Weise wie die der Aether der gewöhnlichen Alkohole:

2 Mol. Aethylalkohol $2\,C_2H_6O$ . .	651,4 Cal.	— 0,2 Cal.
Aethyläther $C_4H_{10}O$ . .	651,6 »	

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], XLV, 332.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2], XL, 343.
3) Berthelot & Matignon, Compt. rend. CXIV, 1146.

Betrachtet man den Mittelwerth dieser Beobachtungen — 0,6 Cal. als durchschnittlich der Bildungswärme der Aether entsprechend, so lassen sich hiermit und mit den vorher gewonnenen Werthen die Verbrennungswärmen sämmtlicher hierher gehörenden Verbindungen berechnen:

Allylphenol-Methyläther.

Allylphenol	$C_9H_{10}O$		1162,1 Cal.	
Methylalkohol	CH_4O		170,6 »	
Bildungswärme			0,6 »	
Methylchavicol	$C_{10}H_{12}O$	berechnet	1333,3 Cal.	99,86
		gefunden	1335,1 »	100.

Propenylphenol-Methyläther.

Propenylphenol	$C_9H_{10}O$		1151,2 Cal.	
Methylalkohol	CH_4O		170,6 »	
Bildungswärme			0,6 »	
Anethol	$C_{10}H_{12}O$	berechnet	1322,4 Cal.	99,86
		gefunden	1324,2 »	100.

Allylbrenzcatechin-Monomethyläther.

Allylbrenzcatechin	$C_9H_{10}O_2$		1114,8 Cal.	
Methylalkohol	CH_4O		170,6 »	
Bildungswärme			0,6 »	
Eugenol	$C_{10}H_{12}O_2$	berechnet	1286,0 Cal.	99,93
		gefunden	1286,9 »	100.

Propenylbrenzcatechin-Monomethyläther.

Propenylbrenzcatechin	$C_9H_{10}O_2$		1103,9 Cal.	
Methylalkohol	CH_4O		170,6 »	
Bildungswärme			0,6 »	
Isoeugenol	$C_{10}H_{12}O_2$	ber.	1275,1 Cal.	99,77
		gefunden	1278,1 »	100.

Allylbrenzcatechin-Dimethyläther.

Allylbrenzcatechin	$C_9H_{10}O_2$		1114,8 Cal.	
2 Mol. Methylalkohol	$2CH_4O$		341,2 »	
Bildungswärme			1,2 »	
Methyleugenol	$C_{11}H_{14}O_2$	ber.	1457,2 Cal.	99,87
		gefunden	1459,1 »	100.

Propenylbrenzcatechin-Dimethyläther.

Propenylbrenzcatechin $C_9 H_{10} O_2$.	1103,9 Cal.		
2 Mol. Methylalkohol $2 C H_4 O$.	341,2 »		
Bildungswärme	1,2 »		
Methylisoeugenol $C_{11} H_{14} O_2$	ber.	1446,3 Cal.	99,88
	gefunden	1448,0 »	100.

Propenylbrenzcatechin-Methyläthyläther.

Propenylbrenzcatechin $C_9 H_{10} O_2$ . .	1103,9 Cal.		
Methylalkohol $C H_4 O$ . .	170,6 »		
Aethylalkohol $C_2 H_6 O$ . .	325,7 »		
Bildungswärme	1,2 »		
Aethylisoeugenol $C_{12} H_{16} O_2$	ber.	1601,4 Cal.	99,91
	gefunden	1602,9 »	100.

Propenylpyrogallol-Trimethyläther.

Propenylpyrogallol $C_9 H_{10} O_3$ . .	1057,7 Cal.		
3 Mol. Methylalkohol $3 C H_4 O$ . .	511,8 »		
Bildungswärme	1,8 »		
Asaron . . . . $C_{12} H_{16} O_3$	ber.	1571,3 Cal.	99,65
	gefunden	1576,8 »	100.

Die berechneten Werthe stimmen daher mit den gefundenen mit grosser Genauigkeit. Die kleinen Abweichungen liegen sämmtlich in einer Richtung. Es ist daher wahrscheinlich, dass der Mittelwerth, welchen wir für die Bildungswärme zu — 0,6 Cal. angenommen haben, etwas zu gering ist. Würden wir denselben, dem Durchschnitte der beiden ersten Beobachtungen entsprechend, zu — 2,0 Cal. eingesetzt haben, so würden wir fast absolute Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und dem Befunde haben.

4. Esterbildung.

Die Bildung der Benzoësäure- und der Essigsäure-Ester der hierher gehörenden Verbindungen ist ein endothermer Process:

Eugenol $C_{10} H_{12} O_2$	1286,9 Cal.	
Benzoësäure $C_7 H_6 O_2$	771,7 »	
	2058,6 »	— 6,7 Cal.
Eugenolbenzoat $C_{17} H_{16} O_3$ . . .	2065,3 »	

Betelphenol $C_{10}H_{12}O_2$	1286,9 Cal.	
Benzoësäure $C_7H_6O_2$	771,7 »	
	2058,6 »	— 6,8 Cal.
Betelphenolbenzoat $C_{17}H_{16}O_3$.	2065,4 »	
Isoeugenol $C_{10}H_{12}O_2$	1278,1 Cal.	
Benzoësäure $C_7H_6O_2$	771,7 »	
	2049,8 »	— 6,3 Cal.
Isoeugenolbenzoat $C_{17}H_{16}O_3$ . .	2056,1 »	
Eugenol $C_{10}H_{12}O_2$	1286,9 Cal.	
Essigsäure (fest) $C_2H_4O_2$ . . .	206,2 »	
	1493,1 »	— 5,4 Cal.
Eugenolacetat $C_{12}H_{14}O_3$ . . .	1498,5 »	
Isoeugenol $C_{10}H_{12}O_2$	1278,1 Cal.	
Essigsäure (fest) $C_2H_4O_2$ . . .	206,2 »	
	1484,3 »	— 4,7 Cal.
Isoeugenolacetat	1489,0 »	

5. Reaction: $-H + O \cdot CH_3$.

Safrol und Isosafrol unterscheiden sich vom Apiol und Isoapiol durch Ersatz von zwei Wasserstoffatomen durch je eine Methoxylgruppe. Durch Vergleichung beider finden wir den thermischen Werth obiger Reaction.

Apiol	$C_{12}H_{14}O_4$ . .	1499,6 Cal.	2 × 127,95 Cal.
Safrol	$C_{10}H_{10}O_2$ . .	1244,7 »	
Isoapiol	$C_{12}H_{14}O_4$ . .	1489,0 Cal.	2 × 127,25 Cal.
Isosafrol	$C_{10}H_{10}O_2$ . .	1234,5 »	

Der mittlere Werth der Reaction beträgt daher 127,6 Cal.

Wenn diese Reaction allgemeinere Gültigkeit hat, so müssen wir durch Rechnung den Werth des Benzols aus dem des Anisols ableiten können. Nun ist:

Phenylmethyläther $C_6H_5 \cdot O \cdot CH_3$ . .		905,5 Cal.	
$- O \cdot CH_3 + H$ . . .		127,6 »	
Benzol . . . C_6H_6	berechnet	777,9 . .	99,83
	gefunden	779,2 . .	100.

Bei dieser Uebereinstimmung lässt sich die Reaction benutzen, um den Werth für andere Verbindungen zu ermitteln, so für:

Allylbenzol $C_6H_5 \cdot C_3H_5$

Methylchavicol 1335,1 — 127,6 = Allylbenzol 1207,5 Cal.
Methyleugenol 1459,1 — 2 × 127,6 = » 1203,9 »

Propenylbenzol $C_6H_5 \cdot C_3H_5$

Anethol . . . 1324,2 — 127,6 = Propenylbenzol 1196,6 Cal.
Methylisoeugenol 1448,0 — 2 × 127,6 = » 1192,8 »
Asaron . . . 1576,8 — 3 × 127,6 = » 1195,0 »

Allylphenol $C_6H_4 \cdot C_3H_5 \cdot OH$

Eugenol . . . 1286,9 — 127,6 = Allylphenol 1159,3 Cal.

Propenylphenol $C_6H_4 \cdot C_3H_5 \cdot OH$

Isoeugenol . . 1278,1 — 127,6 = Propenylphenol 1150,5 Cal.

Aus welcher Verbindung der Werth der beiden Benzole auch abgeleitet sein möge, so ergiebt sich so gut wie völlige Uebereinstimmung. Für die beiden Phenole haben wir oben (S. 330) auf ganz anderem Wege folgende Werthe gefunden:

Allylphenol . . 1162,1 Cal.
Propenylphenol 1151,2 »

Also auch hier Uebereinstimmung.

6. Wärmewerth des Methylenalkohols.

Der Methylenalkohol $CH_2(OH)_2$ ist im freien Zustande nicht existenzfähig. Wir können seinen Wärmewerth aber mit sehr angenäherter Genauigkeit aus dem des Safrols und dem des Isosafrols ableiten.

Safrol ist der Methylenäther des Allylbrenzcatechins, Isosafrol der des Propenylbrenzcatechins. Wir haben daher nur die Annahme zu machen, dass die Bildung des Aethers aus dem zweiwerthigen Methylenalkohol gleich der Reaction sei, bei welcher 2 Mol. Aether aus einwerthigen Alkoholen entstehen, um auf ganz analoge Weise aus den bekannten Wärmewerthen des Aethers und des Dioxybenzols den unbekannten Werth des Alkohols abzuleiten, wie wir früher aus den bekannten Wärmewerthen des Dioxybenzols und des Alkohols den Werth des

Aethers berechnet haben. Und da dort die Rechnung mit der Beobachtung übereinstimmende Grössen ergeben hat, so ist auch hier eine sehr angenäherte Zahl zu erwarten.

Nun ist:

	Safrol	1244,7 Cal.
—	Allylbrenzcatechin	1114,8 »
—	Bildungswärme .	1,2 »
	Methylenalkohol	128,7 Cal.

	Isosafrol	1234,5 Cal.
—	Propenylbrenzcatechin	1103,9 »
—	Bildungswärme . .	1,2 »
	Methylenalkohol . .	129,4 »

Der Wärmewerth des nächst homologen, des Aethylenglycols, ist 281,7.[1]) Vergleichen wir diesen mit dem Mittel aus beiden für Methylenalkohol berechneten Werthen 129,0 Cal., so ergiebt sich für CH_2 der Werth von 152,7 Cal., welcher in vollster Uebereinstimmung mit dem bei den ersten Gliedern homologer Reihen beobachteten Werthe steht.

7. Wärmewerth der Allylalkohole.

Auf Grund der Reaction $-H + C_3H_5 = 429{,}6$ Cal. lässt sich der Wärmewerth einer Reihe von Allylalkoholen der aliphatischen Reihe berechnen. Da der Werth dieser Alkohole von Longuinine direct ermittelt ist, so ist der rechnerische Befund mit der Beobachtung vergleichbar.

a. Bildung des *Allylalkohols* $C_3H_5 \cdot OH = H_2O - H + C_3H_5$.

Nach dieser Gleichung müsste der Wärmewerth des Allylalkohols gleich dem Vertretungswerthe des Allyls sein, da die Verbrennungswärme des Wassers gleich Null ist. Es ergiebt sich aber beim Studium aller Alkohole, dass der darin enthaltenen Hydroxylgruppe ein bestimmter positiver Werth zukommt, dessen Grösse x zu ermitteln ist. Wir finden den Werth von x, indem wir in die Gleichung:

$$C_2H_5 \cdot OH = H_2O - H + C_2H_5 + x$$

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], XLV, 327.

die bekannten Grössen einsetzen. Der Werth für $C_2H_5 \cdot OH$ ist 325,7 Cal., der Werth für $-H + C_2H_5$ ist $= 2 \times 156,6 = 313,2$ Cal. Wir haben daher

$$x = 12,5 \text{ Cal.}$$

Daher wird der Werth für $C_3H_5 \cdot OH =$

H_2O	0,0 Cal.		
$-H + C_3H_5$ . . .	429,6 »		
$+ x$	12,5 »		
$C_3H_5 \cdot OH$ berechnet	442,1 Cal.	99,86	
Allylalkohol gefunden	442,7 »	100.	

b. *Bildung des Allyldimethylcarbinols*

$$C_6H_{12}O = CH(CH_3)_2 \cdot OH - H + C_3H_5.$$

Wir leiten diesen Alkohol vom Isopropylalkohol ab, indem wir ein Atom Wasserstoff durch Allyl ersetzen.

Isopropylalkohol $CH(CH_3)_2 \cdot OH$ . .	478,3 Cal.	
$-H + C_3H_5$	429,6 »	
$C_6H_{12}O$ berechnet	907,9 Cal.	99,33
Allyldimethylcarbinol gefunden . .	914,0 »	100.

c. *Bildung des Diallylmethylcarbinols*

$$C_8H_{14}O = C_2H_5 \cdot OH - H_2 + 2\,C_3H_5.$$

Diallylmethylcarbinol entsteht, indem im Aethylalkohol zwei Wasserstoffatome durch zwei Allylgruppen ersetzt werden:

Aethylalkohol $CH_3 \cdot CH_2\,OH$ . . .	325,7 Cal.	
$2(-H + C_3H_5)$	859,2 »	
Diallylmethylcarbinol berechnet	1184,9 Cal.	98,62
» gefunden	1201,4 »	100.

d. *Bildung des Allyldipropylcarbinols*

$$C_{10}H_{20}O = C_3H_7 \cdot CH_2OH + (-H + C_3H_5) + (-H + C_3H_7).$$

Im normalen Butylalkohol wird ein Wasserstoffatom durch eine Allylgruppe und ein zweites Wasserstoffatom durch eine Propylgruppe ersetzt. Der Werth des Normalbutylalkohols ist nicht direct ermittelt, wir setzen statt desselben den von Longuinine bestimmten Werth des Isobutylalkohols ein, da dieser nach bislang vorliegenden Erfahrungen sich kaum von jenem unterscheiden dürfte.

Butylalkohol $C_4H_{10}O$	636,7 Cal.		
$-H+C_3H_7$	469,8 »		
$-H+C_3H_5$	429,6 »		
$C_{10}H_{20}O$ berechnet	1536,1 Cal.	99,11	
Allyldipropylcarbinol gefunden	1549,9[1]) »	100.	

Im Mittel verhalten sich daher die berechneten zu den gefundenen Werthen wie 99,23 : 100, eine Abweichung, die an sich schon nicht gross ist, die aber von um so geringerer Bedeutung wird, wenn man berücksichtigt, dass die hier verwandten Zahlen den ältesten von Louguinine im Jahre 1880 und 1881 ausgeführten Untersuchungen entnommen sind.

8. Hydrirung der Allyl- und Propenylgruppe.

Die Allyl- und Propenylgruppe geht durch Addition von zwei Atomen Wasserstoff, unter Lösung der Aethylenbindung, in die Propylgruppe über. Zum Studium des thermischen Werthes dieser Reaction ist bislang nur der Uebergang vom Allylalkohol zum Propylalkohol, nach den Bestimmungen von Longuinine, als auf directer Ermittelung beruhend, verfügbar. Wir haben:

Allylalkohol	$C_3H_5\cdot OH$ . .	442,7 Cal.	37,6 Cal.
Propylalkohol	$C_3H_7\cdot OH$ . .	480,3 »	

Zu einem ganz ähnlichen Werthe gelangt man durch Vergleich des früher ermittelten Vertretungswerthes der Allylgruppe mit dem Vertretungswerthe der Propylgruppe. Es ist:

$-H+CH_2\cdot CH:CH_2$ . .	429,6 Cal.	40,2 Cal.
$-H+CH_2\cdot CH_2\cdot CH_3$ . .	469,8 »	

Vergleicht man dagegen den Werth der Propenylgruppe mit dem der Propylgruppe, so muss man zu einem weit abweichenden Resultate kommen, da ja der Werth der Allyl- und Propenylgruppe um rund 10 Cal. verschieden ist. Wie zu erwarten, verläuft die Hydrirung der Propenylgruppe unter Ansammlung eines weit grösseren Energiegehaltes:

$-H+CH:CH_2\cdot CH_3$	418,7 Cal.	51,1 Cal.
$-H+CH_2\cdot CH_2\cdot CH_3$	469,8 »	

1) In Longuinine's Arbeit findet sich in Folge eines Rechenfehlers die Zahl 15449,39 Cal.

Weiteren Aufschluss über diese Werthe erwarten wir von der Untersuchung der Propylverbindungen, welche von Ciamician aus den Isoverbindungen dargestellt sind. Ueber diese wird in einer späteren Abhandlung berichtet werden. So viel geht aber aus dieser, sowie aus unseren früheren Untersuchungen mit aller Sicherheit hervor, dass mit der Lösung der Aethylenbindung durch Addition von zwei Atomen Wasserstoff, nicht ein durch eine constante Grösse ausdrückbarer Energiezuwachs erfolgt, wie man bis dahin, nach den Untersuchungen von Horstmann[1]), annehmen musste, sondern dass der mit diesem Processe verbundene Energiezuwachs unter gewissen, noch genauer zu ermittelnden Umständen, innerhalb der Grenzen von etwa 30 bis zu 50 Cal. wechseln kann.

Leipzig, im Juli 1892.

1) Ber. chem. Ges. XXI, 2217.

Gottl. Friedr. Lipps, *Ueber Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen.* Vorgelegt von Herrn Scheibner.

Die folgenden Untersuchungen haben den Zweck, den Zusammenhang zwischen den Doppelintegralen und den Thetareihen zweier Variablen darzulegen. Die Veranlassung dazu gab mir die von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig im Jahre 1886 gestellte Preisaufgabe (vergl. Crelle's Journal Bd. 103, S. 75 flg.). Ich stellte mir als engere Aufgabe die Ermittelung derjenigen *Formen von Doppelintegralen*, die sich mittelst der Thetareihen zweier Variablen in ähnlicher Weise reduciren lassen, wie es für die elliptischen Integrale I., II. und III. Gattung mittelst der Thetareihen einer Variablen möglich ist.

Als Grundlage der Untersuchung boten sich zunächst die von Rosenhain in die Analysis eingeführten Thetareihen zweier Variablen dar. Wenn ich aber nicht direct diese Reihen der Untersuchung zu Grunde lege, sondern von einer allgemeineren Gruppe von Thetareihen ausgehe, so hat dies seinen Grund darin, dass einmal das Streben nach Allgemeinheit und Symmetrie der Formeln nur durch eine einheitliche, aus der Definition der Thetareihen fliessende Bezeichnungsweise befriedigt werden kann, welche schon von selbst zu einer allgemeineren Gruppe von Thetareihen hinführt; dass sodann der Umfang der gewonnenen Lösung nur dann befriedigend ersichtlich werden kann, wenn eine möglichst allgemeine Gruppe von Thetareihen zu Grunde gelegt wird, aus welcher die zur Lösung nothwendigen Thetareihen sich scharf absondern. Ich bin daher von einer allgemeinen Gruppe von Thetareihen ausgegangen, welche die Gruppe der Rosenhain'schen Reihen als einfachsten Fall enthält.

Die Methode der Untersuchung war durch die Stellung des Problems vorgeschrieben. Es mussten nämlich — wie dies auch Herr Scheibner in seiner die elliptischen Integrale der drei Gattungen betreffenden Abhandlung[1]) »Ueber den Zusammenhang der Thetareihen mit den elliptischen Integralen« thut — die aus der Definition der Thetareihen folgenden Relationen entwickelt und aus ihnen die Integralformen abgeleilet werden.

Da nun aber die Form der Relationen von den zu Grunde gelegten allgemeineren Reihen beeinflusst werden musste, habe ich auch die einfachere Untersuchung für die Thetareihen einer Variablen geführt, aber nur in einem solchen Umfange, dass die Analogie der für die Thetareihen zweier Variablen und die Doppelintegrale abgeleiteten Sätze mit den für die Thetareihen einer Variablen und die einfachen Integrale geltenden Sätzen klar hervortreten konnte. Diese Sätze sollen der Stellung des Problems gemäss nur zur Entwickelung der *Formen* der Integrale führen.

Es behandelt der I. Theil den Zusammenhang der Thetareihen einer Variablen mit den einfachen Integralen unter Zugrundelegung einer allgemeinen $l \cdot m$-gliedrigen Gruppe von Thetareihen. In analoger Weise behandelt der II. Theil den Zusammenhang der entsprechenden $l_1 \cdot l_2 \cdot m_1 \cdot m_2$-gliedrigen Gruppe von Thetareihen mit den Doppelintegralen. Die Ausgangsformel für die Darlegung dieses Zusammenhangs wurde allgemein für die Thetareihen mehrerer Variablen abgeleitet, da dies mit dem nämlichen Aufwande von Rechnung geschehen konnte, wie für die Reihen von zwei Variablen.

I.

Die Thetareihe:

$$(1) \qquad \vartheta(a, u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2 + un}$$

reproducirt sich bekanntlich bis auf einen hinzutretenden Factor bei Vermehrung des Argumentes u um Vielfache von $2\pi i$ und $2a$, indem:

$$(2) \qquad \vartheta(a, u + \mu \cdot 2\pi i + \lambda \cdot 2a) = e^{-\lambda^2 a - \lambda u} \vartheta(a, u),$$

wo μ und λ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

1) In den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 9. März und 3. Juni 1889 oder Math. Annalen Bd. XXXIV pag. 494—543.

Vermehrt man aber das Argument u um Vielfache von Theilwerthen jener Grössen, nämlich um Vielfache von $\frac{2\pi i}{m}$ und $\frac{2a}{l}$, wo m und l positive, ganze Zahlen vorstellen, so erhält man die Reihe:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta\left(a, u + \mu \cdot \frac{2\pi i}{m} + \lambda \cdot \frac{2a}{l}\right) \\ = e^{-\frac{\lambda^2 a}{l^2} - \frac{\lambda u}{l}} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{2\pi i}{m}\mu \cdot n} \times e^{a\left(n+\frac{\lambda}{l}\right)^2 + u\left(n+\frac{\lambda}{l}\right)}. \end{cases}$$

Wird nun $\frac{a}{l^2}$ durch a und $\frac{u}{l}$ durch u ersetzt, so erhält man somit folgende Reihe:

$$(4)\quad \begin{cases} e^{\lambda^2 a + \lambda u}\, \vartheta(l^2 a, lu + \mu \cdot \frac{2\pi i}{m} + \lambda \cdot 2al) \\ = \sum e^{\frac{2\pi i}{m}\mu \cdot n} \times e^{a(ln+\lambda)^2 + u(ln+\lambda)}, \end{cases}$$

die ich durch $\vartheta_\lambda^\mu(a, u)$ bezeichne

Da — wie aus dem unmittelbaren Anblick dieser Reihe sich ergiebt —

$$(5)\quad \vartheta_\lambda^{\mu+m}(a \cdot u) = \vartheta_\lambda^\mu(a, u) \quad \text{und} \quad \vartheta_{\lambda+l}^\mu(a, u) = e^{-\frac{2\pi i}{m}\mu}\, \vartheta_\lambda^\mu(a, u),$$

so können die Zahlen λ und μ stets auf ihre kleinsten positiven Werthe bezüglich der Moduln l und m reducirt werden, so dass nur $l \cdot m$ Reihen mit den Indices $\lambda = 0, 1, \cdots (l-1)$; $\mu = 0, 1, \cdots (m-1)$ als wesentlich verschieden bleiben, die eine *Gruppe von $l \cdot m$ Thetareihen* bilden.

Diese allgemeine Gruppe stellt, wenn $l = m = 2$ angenommen wird, die Gruppe der vier Jacobi'schen Thetareihen dar, indem, wenn $e^a = q$ gesetzt wird:

$$\begin{cases} \vartheta_0^0\left(\frac{a}{4}, iu\right) = \sum e^{an^2 + 2iun} \\ \qquad = \Theta_3(u) = 1 + 2q\cos 2u + 2q^4 \cos 4u + \cdots \\ \vartheta_0^1\left(\frac{a}{4}, iu\right) = \sum (-1)^n e^{an^2 + 2iun} \\ \qquad = \Theta(u) = 1 - 2q\cos 2u + 2q^4\cos 4u \mp \cdots \end{cases}$$

(6)
$$\left\{\begin{aligned}\vartheta_1^0\left(\frac{a}{4}, iu\right) &= \sum e^{\frac{a}{4}(2n+1)^2 + iu(2n+1)} \\ &= \Theta_2(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos u + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3u \\ &\qquad + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5u + \cdots \\ \vartheta_1^1\left(\frac{a}{4}, iu\right) &= \sum (-1)^n e^{\frac{a}{4}(2n+1)^2 + iu(2n+1)} \\ &= i\cdot\Theta_1(u) = 2i\sqrt[4]{q}\cdot\sin u - 2i\sqrt[4]{q^9}\cdot\sin 3u \\ &\qquad + 2i\sqrt[4]{q^{25}}\cdot\sin 5u \mp \ldots .\end{aligned}\right.$$

Jede im Folgenden abgeleitete Formel findet daher auf die gewöhnlichen Thetareihen ihre Anwendung und drückt, falls $l = m = 2$ angenommen wird, direct Eigenschaften derselben aus, wenn nur die soeben angegebenen Ueberleitungsformeln berücksichtigt werden.

Der Zusammenhang zwischen den Functionen der allgemeinen Gruppe mit positivem und negativem Argumente wird dargestellt durch:

(7)
$$\vartheta_\lambda^\mu(a, -u) = \vartheta_{-\lambda}^{-\mu}(a, u) = e^{\frac{2\pi i}{m}\mu}\cdot\vartheta_{l-\lambda}^{m-\mu}(a, u);$$

für die Differentialquotienten gilt dagegen die Relation:

(8)
$$-\frac{d}{du}\vartheta_\lambda^\mu(a, -u) = \frac{d}{du}\vartheta_{-\lambda}^{-\mu}(a, u) = e^{\frac{2\pi i}{m}\mu}\cdot\frac{d}{du}\vartheta_{l-\lambda}^{m-\mu}(a, u).$$

Es folgt hieraus:

(9)
$$\vartheta_{\frac{l}{2}}^{\frac{m}{2}}(a, 0) = 0\,;\quad \vartheta_0'^{\,0}(a, 0) = \vartheta_{\frac{l}{2}}'^{\,0}(a, 0) = \vartheta_0'^{\,\frac{m}{2}}(a, 0) = 0\,;$$

wo $\frac{d}{du}\vartheta(a, u)$ für $u = 0$ durch $\vartheta'(a, 0)$ bezeichnet wird.

Auf Grund der Formeln (2) und (4) hat die Function $\vartheta_\lambda^\mu(a, u)$ die Eigenschaft, dass:

(10)
$$\vartheta_\lambda^\mu\left(a, u + \nu\cdot 2al + \nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right) = e^{-a\nu^2 l^2 - u\nu l - \frac{2\pi i}{m}\mu\nu + \frac{2\pi i}{l}\lambda\nu'}\cdot\vartheta_\lambda^\mu(a, u),$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$(11)\qquad \vartheta'^{\mu}_{\lambda}\left(a,\, u+\nu\cdot 2al+\nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right)$$
$$= -\nu l\, e^{-a\nu^2 l^2-u\nu l-\frac{2\pi i}{m}\mu\nu+\frac{2\pi i}{l}\lambda\nu'}\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)+$$
$$+ e^{-a\nu^2 l^2-u\nu l-\frac{2\pi i}{m}\mu\nu+\frac{2\pi i}{l}\lambda\nu'}\cdot\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(a,u)\,,$$

wo ν und ν' ganze Zahlen bedeuten.

Es folgt hieraus für den Quotienten zweier Thetareihen die Relation:

$$(12)\qquad \frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda}\left(a,u+\nu\cdot 2al+\nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}\left(a,u+\nu\cdot 2al+\nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right)} = e^{-\frac{2\pi i}{m}(\mu-\mu')\nu+\frac{2\pi i}{l}(\lambda-\lambda')\nu'}\,\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)}\,.$$

Es folgt ferner für den Differentialquotienten des Logarithmus einer Thetareihe die Relation:

$$(13)\qquad \frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}\left(a,\, u+\nu\cdot 2al+\nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}\left(a,\, u+\nu\cdot 2al+\nu'\cdot\frac{2\pi i}{l}\right)} = -\nu\cdot l+\frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(a,u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)}\,.$$

Aus der Relation (12) ergiebt sich als Eigenschaft der Quotienten von Thetareihen einer allgemeinen Gruppe, dass dieselben doppeltperiodische Functionen sind mit den Perioden $2alm$ und $2\pi i$. Sind aber l und m gerade Zahlen, so bilden die vier Reihen $\vartheta^{\mu}_{\lambda}$, $\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}$, $\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}$, $\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}$ eine Untergruppe in der allgemeinen Gruppe mit Perioden, deren Werthe gleich $\frac{2\pi i}{l}$ und $2al$ oder gleich dem Doppelten sind. Ihre Bestimmung ergiebt sich daraus, dass in (12)

$$(12\,\mathrm{a})\qquad e^{-\frac{2\pi i}{m}(\mu-\mu')\nu+\frac{2\pi i}{l}(\lambda-\lambda')\nu'} = 1\,,$$

dass also, wenn $\mu = \mu'+\eta\cdot\frac{m}{2}$, $\lambda = \lambda'+\varepsilon\cdot\frac{l}{2}$ (wo ε und η gleich 0 oder 1)

$$\varepsilon\cdot\nu'-\eta\cdot\nu \equiv 0 \pmod 2)$$

sein muss, woraus für $\varepsilon = 1$, $\eta = 0$; $\varepsilon = 0$, $\eta = 1$; $\varepsilon = 1$, $\eta = 1$ der Reihe nach $\nu' = 2$, $\nu = 1$; $\nu' = 1$, $\nu = 2$; $\nu' = 1$, $\nu = 1$ als kleinste Werthe sich ergeben. Als Perioden folgen somit der Reihe nach: $2al$, $\frac{4\pi i}{l}$; $4al$, $\frac{2\pi i}{l}$; $2al$, $\frac{2\pi i}{l}$.

Aehnlich folgt allgemein aus (12) dass, falls l und m durch eine beliebige Zahl p theilbar sind, die Reihen: $\vartheta_{\lambda+\pi\cdot\frac{l}{p}}^{\mu+\pi'\cdot\frac{m}{p}}$, für $\pi = 0, 1, 2 \cdots p-1$; $\pi' = 0, 1, 2, \cdots p-1$ eine Untergruppe in der allgemeinen Gruppe bilden, deren Quotienten doppeltperiodische Functionen sind mit Perioden, deren Werthe aus der Bedingungsgleichung (12a) folgen, wenn dortselbst $\mu = \mu' + \pi' \cdot \frac{m}{p}$; $\lambda = \lambda' + \pi \cdot \frac{l}{p}$ gesetzt wird. Sie bestimmen sich somit durch das Aufsuchen der kleinsten Werthe für ν und ν', welche die folgende Congruenz erfüllen:

$$\pi\nu' - \pi'\nu \equiv 0 \pmod{p}\,.$$

Die Werthe ν und ν' geben alsdann die Vielfachen von $2al$ und $\frac{2\pi i}{l}$ an, die für den jeweiligen Quotienten die Perioden darstellen.

Aus der Relation (13) ergiebt sich als Eigenschaft des Logarithmus einer Thetareihe, dass sein Differentialquotient eine einfach periodische Function ist von der aus (13) erkennbaren Beschaffenheit; dass ferner die nochmalige Differentiation zu doppeltperiodischen Functionen führt mit den Perioden $2al$ und $\frac{2\pi i}{l}$. Es ist somit:

$$\eta_\lambda^\mu(a, u) = \frac{d^2}{du^2} \log \vartheta_\lambda^\mu(a, u)$$

eine doppeltperiodische Function der Art, dass

$$\text{(13a)} \qquad \eta_\lambda^\mu\left(a, u + \nu \cdot 2al + \nu' \cdot \frac{2\pi i}{l}\right) = \eta_\lambda^\mu(a, u)\,,$$

wo ν und ν' beliebige ganze Zahlen sind.

Um nun die Relation für die Reihen $\vartheta_\lambda^\mu(a, u)$ zu gewinnen, setze ich:

$$(14)\quad \begin{cases} [a] = \dfrac{a + a' + a'' + a'''}{2}; & [a'] = \dfrac{a + a' - a'' - a'''}{2}; \\ [a''] = \dfrac{a - a' + a'' - a'''}{2}; & [a'''] = \dfrac{a - a' - a'' + a'''}{2}, \end{cases}$$

so dass

$$[a]^2 + [a']^2 + [a'']^2 + [a''']^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2$$

und

$$[a]\cdot[b] + [a']\cdot[b'] + [a'']\cdot[b''] + [a''']\cdot[b''']$$
$$= a\cdot b + a'\cdot b' + a''\cdot b'' + a'''\cdot b''',$$

wenn die eingeklammerten b an die b selbst ebenso geknüpft sind, wie die eingeklammerten a an die a selbst.

Bedeuten hier insbesondere die a, a', a'', a''' ganze Zahlen, so sind die $[a], [a'], [a''], [a''']$ entweder ganze oder halbe Zahlen. Durchlaufen also die a, a', a'', a''' alle Systeme ganzer Zahlen, so durchlaufen die $[a], [a'], [a''], [a''']$ Systemen von ganzen und von halben Zahlen, jedoch nicht alle diese Systeme. Denn setzt man für $[a], [a'], [a''], [a''']$ ein System ganzer Zahlen, von denen nur eine Zahl oder drei Zahlen ungerade sind, so erhält man aus den obigen Gleichungen für die a, a', a'', a''' ein System halber Zahlen. Lässt man aber die a, a', a'', a''' alle Systeme der ganzen und alle Systeme der halben Zahlen durchlaufen, so durchlaufen auch die $[a], [a'], [a''], [a''']$ alle Systeme der ganzen und alle Systeme der halben Zahlen. Denn setzt man nunmehr für die a ein beliebiges System ganzer oder halben Zahlen, so erhält man auch für die $[a]$ ein und nur ein System ganzer oder halber Zahlen, und setzt man andererseits für die $[a]$ ein beliebiges System ganzer oder halber Zahlen, so erhält man auch für die a ein und nur ein System ganzer oder halber Zahlen.

Die Bedeutung der obigen orthogonalen Transformation besteht somit darin, dass durch dieselbe alle Systeme von je vier ganzen und je vier halben Zahlen wiederum in alle Systeme von je vier ganzen und je vier halben Zahlen mit veränderter Anordnung übergeführt werden.

Diese Bemerkung ermöglicht eine einfache Ableitung der Relationen, die zwischen Producten von je vier Thetareihen einer allgemeinen Gruppe statthaben. Es ergiebt sich zugleich unmittelbar die Ableitung der analogen Relationen für die Thetareihen zweier und mehrerer Variablen.

Die Ableitung dieser Relationen beruht auf dem zuerst von Jacobi benutzten Principe der Transformation der Variablen und der Summationsbuchstaben der Thetareihe. Beschränkte sich bei Jacobi die Anwendung dieses Princips auf die von ihm in die Analysis eingeführten Thetareihen, so findet dasselbe Princip seine ausgedehntere Verwendung für die allgemeineren Thetareihen mehrerer Variablen durch Prym in den Abhandlungen: »Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel« und: »Ableitung einer allgemeinen Thetaformel«, die sich im dritten Bande der Acta mathematica vorfinden. Wenn jedoch Prym mit diesem Principe der Substitution noch [1] »das Princip der Einschiebung eines Factors verbindet, der von ähnlicher Wirkung, wie der Dirichlet'sche discontinuirliche Factor bei bestimmten Integralen, die nach geschehener Transformation eingetretene Beschränkung der Summation aufzuheben gestattet«, so wird sich im Folgenden zeigen, dass dieses letztere Princip entbehrt werden kann, wenn dafür beachtet wird, dass jene Transformation alle Systeme der ganzen und der halben Zahlen wiederum in alle Systeme der ganzen und der halben Zahlen überführt.

Es ist mit Benutzung der eingeführten Schreibweise:

$$15)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\cdot n+\mu'\cdot n'+\mu''\cdot n''+\mu'''\cdot n'''=[\mu]\cdot[n]+[\mu']\cdot[n']\\ &\quad+[\mu'']\cdot[n'']+[\mu''']\cdot[n''']\,;\quad (ln+\lambda)^2+(ln'+\lambda')^2\\ &+(ln''+\lambda'')^2+(ln'''+\lambda''')^2=(l[n]+[\lambda])^2+(l[n']+[\lambda'])^2\\ &\qquad+(l[n'']+[\lambda''])^2+(l[n''']+[\lambda'''])^2\,;\\ &\qquad u(ln+\lambda)+u'(ln'+\lambda')+u''(ln''+\lambda'')\\ &+u'''(ln'''+\lambda''')=[u](l[n]+[\lambda])+[u'](l[n']+[\lambda'])\\ &\qquad+[u''](l[n'']+[\lambda''])+[u'''](l[n''']+[\lambda'''])\,. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind blosse Identitäten. Durchlaufen aber n, n', n'', n''' alle Systeme der ganzen und alle Systeme der halben Zahlen, so durchlaufen auch die $[n]$, $[n']$, $[n'']$, $[n''']$ alle Systeme der ganzen und alle Systeme der halben Zahlen in veränderter Reihenfolge. Es ist daher, da die Summen unbedingt convergent sind, wenn nur der reelle Theil des Parameters a negativ ist,

---

1) Acta Math. Bd. 3, pag. 202.

$$(16)\left\{\begin{aligned}&\sum_{n\,n'\,n''\,n'''} e^{\frac{2\pi i}{m}(\mu n+\mu' n'+\mu'' n''+\mu''' n''')}\\
&\times e^{\substack{a(ln+\lambda)^2+a(ln'+\lambda')^2+a(ln''+\lambda'')^2+a(ln'''+\lambda''')^2+\\ +u(ln+\lambda)+u'(ln'+\lambda')+u''(ln''+\lambda'')+u'''(ln'''+\lambda''')}}\\
&=\sum_{[n][n'][n''][n''']} e^{\frac{2\pi i}{m}([\mu][n]+[\mu'][n']+[\mu''][n'']+[\mu'''][n'''])}\\
&\times e^{\substack{a(l[n]+[\lambda])^2+a(l[n']+[\lambda'])^2+a(l[n'']+[\lambda''])^2+a(l[n''']+[\lambda'''])^2\\ +[u](l[n]+[\lambda])+[u'](l[n']+[\lambda'])+[u''](l[n'']+[\lambda''])\\ +[u'''](l[n''']+[\lambda'''])}}\end{aligned}\right.,$$

wo in der ersten Summe über alle ganzzahligen und alle halbzahligen Systeme n, n', n'', n''' und in der zweiten Summe über alle ganzzahligen und alle halbzahligen Systeme $[n]$, $[n']$, $[n'']$, $[n''']$ summirt werden soll. Trennt man aber jede Summe in je zwei Summen, von denen die eine über alle ganzzahligen, die andere über alle halbzahligen Zahlensysteme hinerstreckt wird, so stellt sich jede dieser Theilsummen als ein Product von vier Thetareihen dar. Es ist daher bloss eine andere Schreibweise der Relation (16), wenn ich setze:

$$(17)\left\{\begin{aligned}&\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''}(a,u'')\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''}(a,u''')+e^{2\pi i\frac{[\mu]}{m}}\\
&\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''+\frac{l}{2}}(a,u'')\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''+\frac{l}{2}}(a,u''')\\
&=\vartheta^{[\mu]}_{[\lambda]}(a,[u])\cdot\vartheta^{[\mu']}_{[\lambda']}(a,[u'])\cdot\vartheta^{[\mu'']}_{[\lambda'']}(a,[u''])\cdot\vartheta^{[\mu''']}_{[\lambda''']}(a,[u'''])\\
&+e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{[\mu]}_{[\lambda]+\frac{l}{2}}(a,[u])\cdot\vartheta^{[\mu']}_{[\lambda']+\frac{l}{2}}(a,[u'])\cdot\vartheta^{[\mu'']}_{[\lambda'']+\frac{l}{2}}(a,[u''])\\
&\qquad\cdot\vartheta^{[\mu''']}_{[\lambda''']+\frac{l}{2}}(a,[u'''])\,.\end{aligned}\right.$$

Werden die λ, λ', λ'', λ'''; μ, μ', μ'', μ''' so gewählt, dass auch $[\lambda]$, $[\lambda']$, $[\lambda'']$, $[\lambda''']$; $[\mu]$, $[\mu']$, $[\mu'']$, $[\mu''']$ ganze Zahlen darstellen und wird überdies l als gerade Zahl vorausgesetzt, damit $\frac{l}{2}$ eine ganze Zahl sei, so stellt diese Gleichung eine Relation zwischen Thetareihen einer allgemeinen Gruppe dar. Wird

schliesslich auch m als gerade Zahl vorausgesetzt, so kann statt μ, μ', μ'', μ''' entsprechend $\mu + \frac{m}{2}, \mu' + \frac{m}{2}, \mu'' + \frac{m}{2}, \mu''' + \frac{m}{2}$ gesetzt werden, wodurch $[\mu']$, $[\mu'']$, $[\mu''']$, nicht geändert wird und $[\mu]$ in $[\mu] + m$ übergeht, was ohne Einfluss auf die Thetareihen ist. Es entsteht so eine der Relation (17) analoge Relation, deren rechte Seite, wenn $e^{2\pi i \frac{\mu + \frac{m}{2}}{m}} = -e^{2\pi i \frac{\mu}{m}}$ gesetzt wird, bloss durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes sich von der rechten Seite der Relation (17) unterscheidet. Addirt man dieselbe zur Relation (17), so erhält man die fundamentale Relation:

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &2 \cdot \vartheta^{[\mu]}_{[\lambda]}(a, [u]) \cdot \vartheta^{[\mu']}_{[\lambda']}(a, [u']) \cdot \vartheta^{[\mu'']}_{[\lambda'']}(a, [u'']) \cdot \vartheta^{[\mu''']}_{[\lambda''']}(a, [u''']) \\ &= \vartheta^{\mu}_{\lambda}(a, u) \cdot \vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a, u') \cdot \vartheta^{\mu''}_{\lambda''}(a, u'') \cdot \vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''}(a, u''') \\ &+ e^{2\pi i \frac{[\mu]}{m}} \cdot \vartheta^{\mu}_{\lambda + \frac{l}{2}}(a, u) \cdot \vartheta^{\mu'}_{\lambda' + \frac{l}{2}}(a, u') \cdot \vartheta^{\mu''}_{\lambda'' + \frac{l}{2}}(a, u'') \\ &\cdot \vartheta^{\mu'''}_{\lambda''' + \frac{l}{2}}(a, u''') + \vartheta^{\mu + \frac{m}{2}}_{\lambda}(a, u) \cdot \vartheta^{\mu' + \frac{m}{2}}_{\lambda'}(a, u') \\ &\cdot \vartheta^{\mu'' + \frac{m}{2}}_{\lambda''}(a, u'') \cdot \vartheta^{\mu''' + \frac{m}{2}}_{\lambda'''}(a, u''') + e^{2\pi i \frac{[\mu]}{m}} \cdot \vartheta^{\mu + \frac{m}{2}}_{\lambda + \frac{l}{2}}(a, u) \\ &\cdot \vartheta^{\mu' + \frac{m}{2}}_{\lambda' + \frac{l}{2}}(a, u') \cdot \vartheta^{\mu'' + \frac{m}{2}}_{\lambda'' + \frac{l}{2}}(a, u'') \cdot \vartheta^{\mu''' + \frac{m}{2}}_{\lambda''' + \frac{l}{2}}(a, u''') \,. \end{aligned} \right.$$

Vermehrt man in dieser Relation die Indices $[\lambda]$, $[\lambda']$, $[\lambda'']$, $[\lambda''']$ um $\delta \cdot \frac{l}{2}$ und die Indices $[\mu]$, $[\mu']$, $[\mu'']$, $[\mu''']$ um $\gamma \cdot \frac{m}{2}$ (wo $\delta = 0$ oder 1 und $\gamma = 0$ oder 1), so dass $\lambda', \lambda'', \lambda''', \mu', \mu'', \mu'''$ ungeändert bleibt, dagegen λ in $\delta \cdot l + \lambda$ und μ in $\gamma \cdot m + \mu$ übergeht und berücksichtigt man, dass in Uebereinstimmung mit der Gleichung (5)

$$(16)\quad \vartheta^{\gamma \cdot m + \mu + \eta \cdot \frac{m}{2}}_{\delta \cdot l + \lambda + \varepsilon \cdot \frac{l}{2}} = e^{-2\pi i \left(\delta \cdot \frac{\mu}{m} + \frac{\delta \cdot \eta}{2}\right)} \cdot \vartheta^{\mu + \eta \frac{m}{2}}_{\lambda + \varepsilon \frac{l}{2}}$$

(wo ε und η die Werthe 0 und 1 annehmen können),

so erhält man aus (18) die allgemeinere Relation:

$$(20)\quad \begin{cases} 2e^{2\pi i\cdot\delta\cdot\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta\begin{smallmatrix}[\mu]+\gamma\cdot\frac{m}{2}\\ [\lambda]+\delta\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,[u])\cdot\vartheta\begin{smallmatrix}[\mu']+\gamma\cdot\frac{m}{2}\\ [\lambda']+\delta\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,[u']) \\ \cdot\vartheta\begin{smallmatrix}[\mu'']+\gamma\cdot\frac{m}{2}\\ [\lambda'']+\delta\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,[u''])\cdot\vartheta\begin{smallmatrix}[\mu''']+\gamma\cdot\frac{m}{2}\\ [\lambda''']+\delta\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,[u''']) \\ =\sum_{\varepsilon=0,1;\ \eta=0,1}(-1)^{\varepsilon\gamma-\eta\delta}\times e^{2\pi i\cdot\varepsilon\cdot\frac{[\mu]}{m}}\times\vartheta\begin{smallmatrix}\mu+\eta\cdot\frac{m}{2}\\ \lambda+\varepsilon\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,u) \\ \cdot\vartheta\begin{smallmatrix}\mu'+\eta\cdot\frac{m}{2}\\ \lambda'+\varepsilon\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,u')\cdot\vartheta\begin{smallmatrix}\mu''+\eta\cdot\frac{m}{2}\\ \lambda''+\varepsilon\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,u'')\cdot\vartheta\begin{smallmatrix}\mu'''+\eta\cdot\frac{m}{2}\\ \lambda'''+\varepsilon\cdot\frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a,u''').\end{cases}$$

Es ist dies die allgemeinste derartige Relation zwischen Thetareihen einer Gruppe, die man erhalten kann dadurch, dass Producte von je *vier* Reihen gebildet und in gegenseitige Beziehung gesetzt werden.

Ich bestimme nunmehr, dass $[\lambda'''] = [\mu'''] = [u'''] = 0$ sein soll. Es ist alsdann, da $\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m}{2}\\ \frac{l}{2}\end{smallmatrix}(a, 0) = 0$, die linke Seite der Relation (20) gleich Null, wenn $\delta = \gamma = 1$ angenommen wird. Man erhält somit bei dieser Annahme, wenn die Relation (20) in leichtverständlicher Weise symbolisch in der Form:

$$(20\text{a})\quad \begin{cases} 2\cdot\{\Pi\}_\delta^\gamma = \sum_{\varepsilon,\eta}(-1)^{\varepsilon\gamma-\eta\delta}\cdot\Pi_\varepsilon^\eta \\ = \Pi_0^0 + (-1)^\gamma\cdot\Pi_1^0 + (-1)^\delta\cdot\Pi_0^1 + (-1)^{\gamma+\delta}\cdot\Pi_1^1 \end{cases}$$

geschrieben wird, noch die Relation:

$$(21)\qquad 0 = \Pi_0^0 - \Pi_1^0 - \Pi_0^1 + \Pi_1^1\,.$$

Die Combination dieser beiden Relationen führt zu folgenden einfacheren Relationen:

$$\text{(22)}\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta^{[\mu]}_{[\lambda]}(a,[u])\cdot\vartheta^{[\mu']}_{[\lambda']}(a,[u'])\cdot\vartheta^{[\mu'']}_{[\lambda'']}(a,[u''])\cdot\vartheta^{0}_{0}(a,0)\\ &=\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''}(a,u'')\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''}(a,u''')\\ &+e^{2\pi i\frac{[\mu]}{m}}\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''+\frac{m}{2}}_{\lambda''+\frac{l}{2}}(a,u'')\\ &\qquad\cdot\vartheta^{\mu'''+\frac{m}{2}}_{\lambda'''+\frac{l}{2}}(a,u''')\,, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(23)}\quad \left\{\begin{aligned} &e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{[\mu]}_{[\lambda]+\frac{l}{2}}(a,[u])\cdot\vartheta^{[\mu']}_{[\lambda']+\frac{l}{2}}(a,[u'])\cdot\vartheta^{[\mu]}_{[\lambda'']+\frac{l}{2}}(a,[u''])\\ &\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a,0)=\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''}(a,u'')\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''}(a,u''')\\ &-\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda'}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''+\frac{m}{2}}_{\lambda''}(a,u'')\\ &\qquad\cdot\vartheta^{\mu'''+\frac{m}{2}}_{\lambda'''}(a,u''')\,, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(24)}\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta^{[\mu]+\frac{m}{2}}_{[\lambda]}(a,[u])\cdot\vartheta^{[\mu']+\frac{m}{2}}_{[\lambda']}(a,[u'])\cdot\vartheta^{[\mu'']+\frac{m}{2}}_{\lambda''}(a,[u''])\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a,0)\\ &=\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''}(a,u'')\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''}(a,u''')\\ &-e^{2\pi i\frac{[\mu]}{m}}\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u')\cdot\vartheta^{\mu''}_{\lambda''+\frac{l}{2}}(a,u'')\\ &\qquad\cdot\vartheta^{\mu'''}_{\lambda'''+\frac{l}{2}}(a,u''')\,, \end{aligned}\right.$$

wo

$$\lambda-\lambda'-\lambda''+\lambda'''=\mu-\mu'-\mu''+\mu'''=u-u'-u''+u'''=0\,.$$

Es werde nun schliesslich angenommen, dass überdies $\lambda'''=\mu'''=0$ und $[u'']=0$ sei, dann ist $[\lambda]=\lambda$; $[\lambda']=\lambda'$; $[\lambda'']=\lambda''$; $[\mu]=\mu$; $[\mu']=\mu'$; $[\mu'']=\mu''$; $u=u'$; $u''=u'''$,

was durch v bezeichnet werden möge. Man erhält dann folgende einfache Relationen für beliebige Indicespaare λ, μ; λ', μ':

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta_{\lambda}^{\mu}(a, u+v)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'}(a, u-v)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'}(a, 0)\cdot\vartheta_{0}^{0}(a, 0)\\
&\quad=\vartheta_{\lambda}^{\mu}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'}(a, v)\cdot\vartheta_{0}^{0}(a, v)\\
&+e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\times\vartheta_{\lambda+\frac{l}{2}}^{\mu+\frac{m}{2}}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu'+\frac{m}{2}}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu-\mu'+\frac{m}{2}}(a, v)\\
&\qquad\cdot\vartheta_{\frac{l}{2}}^{\frac{m}{2}}(a, v)\,.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta_{\lambda+\frac{l}{2}}^{\mu}(a, u+v)\cdot\vartheta_{\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu'}(a, u-v)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu-\mu'}(a, 0)\\
&\cdot\vartheta_{\frac{l}{2}}^{0}(a, 0)=\vartheta_{\lambda}^{\mu}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'}(a, v)\cdot\vartheta_{0}^{0}(a, v)\\
&-\vartheta_{\lambda}^{\mu+\frac{m}{2}}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'+\frac{m}{2}}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'+\frac{m}{2}}(a, v)\cdot\vartheta_{0}^{\frac{m}{2}}(a, v)\,.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta_{\lambda}^{\mu+\frac{m}{2}}(a, u+v)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'+\frac{m}{2}}(a, u-v)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'+\frac{m}{2}}(a, 0)\\
&\cdot\vartheta_{0}^{\frac{m}{2}}(a, 0)=\vartheta_{\lambda}^{\mu}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'}^{\mu'}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'}^{\mu-\mu'}(a, v)\cdot\vartheta_{0}^{0}(a, v)\\
&-e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\times\vartheta_{\lambda+\frac{l}{2}}^{\mu}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu'}(a, u)\cdot\vartheta_{\lambda-\lambda'+\frac{l}{2}}^{\mu-\mu'}(a, v)\\
&\qquad\cdot\vartheta_{\frac{l}{2}}^{0}(a, v)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Zu denselben tritt als Ergänzungsrelation die Formel (21) in folgender Form:

(28)
$$\left\{\begin{aligned}
0 &= \vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu-\mu'}_{\lambda-\lambda'}(a,v)\cdot\vartheta^{0}_{0}(a,v)\\
&- e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu-\mu'}_{\lambda-\lambda'+\frac{l}{2}}(a,v)\\
&\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a,v)-\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda'}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu-\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda'}(a,v)\\
&\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a,v)+e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u)\\
&\cdot\vartheta^{\mu-\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda'+\frac{l}{2}}(a,v)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a,v)\,.
\end{aligned}\right.$$

Auf Grund der nunmehr abgeleiteten Relationen will ich zunächst den Zusammenhang zwischen *Quotienten* von Thetareihen einer Gruppe und den einfachen Integralen darlegen und alsdann den Zusammenhang der Differentialquotienten des *Logarithmus* einer Thetareihe mit den einfachen Integralen erörtern.

Es ergeben sich aus der Entwickelung der Gleichungen (25), (26) und (27) nach Potenzen von v durch Gleichsetzen der Coefficienten von v Relationen, die zu der Darstellung des Differentialquotienten von Quotienten zweier Thetareihen durch Reihen derselben Gruppe führen. Man erhält z. B. aus (25):

(29)
$$\frac{d}{du}\cdot\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)}=\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)}\cdot A+\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)}\cdot\frac{\vartheta^{\mu'+\frac{m}{2}}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(a,u)}{\vartheta^{\mu'}_{\lambda'}(a,u)}\cdot B.$$

Die Quotienten des zweiten Gliedes der rechten Seite können aber mittelst der abgeleiteten Relationen nicht durch den Quotienten des ersten Gliedes derselben Seite der Gleichung ausgedrückt werden. Denn die allgemeinste Relation, die *zwei* Quotienten von Thetareihen in Beziehung setzt, erhält man aus (28), wenn dortselbst $\lambda=\lambda'$; $\mu=\mu'$; $v=0$ gesetzt wird. Sie lautet:

(30)
$$\vartheta^{\mu^2}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{0^2}_{0}=\vartheta^{\mu+\frac{m^2}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\frac{m^2}{2}}_{0}+e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{\mu^2}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{0^2}_{\frac{l}{2}},$$

wo nun noch λ und μ durch $\lambda + \frac{l}{2}$ und $\mu + \frac{m}{2}$ ersetzt werden kann.

Es lehrt aber diese Relation, dass die Quotienten von Thetareihen, die einer Untergruppe von vier Gliedern angehören, deren Indices somit λ, μ; $\lambda + \frac{l}{2}, \mu$; $\lambda, \mu + \frac{m}{2}$; $\lambda + \frac{l}{2}$; $\mu + \frac{m}{2}$ sind, die Eigenschaft haben, dass ihre Differentialquotienten durch denselben Quotienten und zwar mittelst Quadratwurzelausdrücke darstellbar sind.

Um diese Darstellung in einfacher Form zu erhalten, beachte man, dass:

$$\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a, 0) = 0\,, \quad \vartheta'^{0}_{0}(a, 0) = \vartheta'^{0}_{\frac{l}{2}}(a, 0) = \vartheta'^{\frac{m}{2}}_{0}(a, 0) = 0\,;$$

und $\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a, 0)$ einen einfachen Werth annimmt, der jetzt ermittelt werden soll.

Man bilde zu diesem Zweck das Product zweier Thetareihen einer Gruppe:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta^{\mu}_{\lambda+\lambda'}(a, u)\cdot\vartheta^{\mu'}_{\lambda-\lambda'}(a, u') = \vartheta^{\mu+\mu'}_{\lambda}(2a, u+u') \\ &\cdot\vartheta^{\mu-\mu'}_{\lambda'}(2a, u-u') + e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\times\vartheta^{\mu+\mu'}_{\lambda+\frac{l}{2}}(2a, u+u') \\ &\cdot\vartheta^{\mu-\mu'}_{\lambda'+\frac{l}{2}}(2a, u-u')\,. \end{aligned}\right.$$

Daraus folgt:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta^{0}_{0}(a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a) = \vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(2a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(2a) \\ &\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a) = \vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(2a)\cdot\vartheta^{0}_{0}(2a), \end{aligned}\right.$$

wo die Argumente gleich Null gesetzt sind.

Durch Differentiation nach u folgt ferner, wenn $\lambda' = \mu' = 0$; $\lambda = \frac{l}{2}$; $\mu = \frac{m}{2}$ gesetzt wird:

$$(33)\qquad \vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a) = 2\cdot\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(2a)\,.$$

Es ist somit:

$$(34)\qquad \frac{\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a)}{\vartheta^{0}_{0}(a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a)} = \frac{\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(2a)}{\vartheta^{0}_{0}(2a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(2a)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(2a)}\,.$$

Dieser Quotient nimmt aber für das unendlich Vielfache des Parameters den Werth $\frac{l}{2}$ an, so dass:

$$(35)\qquad \vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a) = \frac{l}{2}\cdot\vartheta^{0}_{0}(a)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(a)\,.$$

Wird $l = m = 2$ gesetzt, so folgt, wie es sein muss, die von Jacobi abgeleitete Relation.

Mit Benutzung dieses Werthes ergeben sich aus den Relationen (25), (26) und (27) folgende drei Relationen:

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) - \vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) \\ \quad = \dfrac{l}{2}\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\,. \end{cases}$$

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) - \vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\cdot\dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) \\ \quad = -\dfrac{l}{2}\cdot e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\,. \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)-\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\dfrac{d}{du}\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) \\ \quad =\dfrac{l}{2}\cdot\vartheta^{0}_{0}\cdot\vartheta^{0}_{0}\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u)\,. \end{cases}$$

Aus diesen Relationen folgt nun durch Benutzung von (30) das Resultat:

Setzt man

$$x=\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\,;\quad y=\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\,;\quad z=\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\,,$$

so ist:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du}=\dfrac{l}{2}\,\vartheta^{\frac{m}{2}\,2}_{0}\cdot yz \\ =\dfrac{l}{2}\cdot\sqrt{\left(\vartheta^{0\,2}_{0}-e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{0\,2}_{\frac{l}{2}}\cdot x^2\right)\left(\vartheta^{0\,2}_{0}\cdot x^2-e^{-2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{0\,2}_{\frac{l}{2}}\right)}\,; \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} -\dfrac{dy}{du}=e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\,\dfrac{l}{2}\,\vartheta^{0\,2}_{\frac{l}{2}}\cdot zx \\ =\dfrac{l}{2}\sqrt{\left(\vartheta^{0\,2}_{0}-\vartheta^{\frac{m}{2}\,2}_{0}\cdot y^2\right)\left(\vartheta^{\frac{m}{2}\,2}_{0}-\vartheta^{0\,2}_{0}\cdot y^2\right)}\,; \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{du}=\dfrac{l}{2}\,\vartheta^{0\,2}_{0}\cdot xy \\ =\dfrac{l}{2}\sqrt{\left(\vartheta^{\frac{m}{2}\,2}_{0}-e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{0\,2}_{\frac{l}{2}}\cdot z^2\right)\left(\vartheta^{\frac{m}{2}\,2}_{0}\cdot z^2+e^{-2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{0\,2}_{\frac{l}{2}}\right)}\,. \end{cases}$$

Durch diese Formeln ist der Zusammenhang zwischen den Quotienten von Thetareihen der viergliedrigen Untergruppe und den elliptischen Integralen dargelegt. Ich bemerke, dass dieses Resultat aus den Beziehungen abgeleitet wurde, die sich zwischen Producten von je vier Reihen einer allgemeinen Gruppe feststellen liessen.

Als Folgerung ergiebt sich noch:

$$
42)\begin{cases} \left(\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\vartheta^0_0\right)^2\cdot\frac{dx^2}{du}=-e^{-2\pi i\frac{\mu}{m}}\left(\vartheta^0_0\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\right)^2\cdot\frac{dy^2}{du}=\left(\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\cdot\frac{dz^2}{du} \\ =l\left(\vartheta^0_0\,\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\,\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\cdot xyz\,. \end{cases}
$$

Durch Integration folgt daraus:

$$
43)\begin{cases} l\left(\vartheta^0_0\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\int\limits_{u_0}^{u}xyz\,du=\left(\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\,\vartheta^0_0\right)^2\{x^2(u)-x^2(u_0)\} \\ =-e^{-2\pi i\frac{\mu}{m}}\left(\vartheta^0_0\,\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\right)^2\{y^2(u)-y^2(u_0)\} \\ =\left(\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\,\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\{z^2(u)-z^2(u_0)\}\,. \end{cases}
$$

Ich wende mich nun zur Darlegung des Zusammenhangs der Differentialquotienten des Logarithmus einer Thetareihe mit den elliptischen Integralen.

In den Relationen (25), (26) und (27) setze man $\lambda=\lambda'$; $\mu=\mu'$ und bringe sie mittelst (28) in folgende Form:

$$
44)\begin{cases} \vartheta^\mu_\lambda(a,u+v)\cdot\vartheta^\mu_\lambda(a,u-v)\cdot\vartheta^0_0(a,0)\cdot\vartheta^0_0(a,0) \\ =\left(\vartheta^\mu_\lambda(a,u)\cdot\vartheta^0_0(a,v)\right)^2+e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a,v)\right)^2; \end{cases}
$$

$$
(45)\begin{cases} \vartheta^\mu_\lambda(a,u+v)\cdot\vartheta^\mu_\lambda(a,u-v)\cdot\vartheta^0_{\frac{l}{2}}(a,0)\cdot\vartheta^0_{\frac{l}{2}}(a,0) \\ =\left(\vartheta^\mu_\lambda(a,u)\cdot\vartheta^0_{\frac{l}{2}}(a,v)\right)^2-\left(\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_\lambda(a,u)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a,v)\right)^2; \end{cases}
$$

$$(46)\quad \begin{cases} \vartheta^{\mu}_{\lambda}(a, u+v)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a, u-v)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a, 0)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a, 0) \\ =\left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a, u)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(a, v)\right)^2 + e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a, u)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(a, v)\right)^2. \end{cases}$$

Entwickelt man nun die Logarithmen dieser drei Gleichungen nach Potenzen von v und setzt man:

$$\eta^{\mu}_{\lambda}(u) = \frac{d^2}{du^2}\lg\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)\ ,$$

so erhält man der Reihe nach durch Gleichsetzen der Coefficienten von v^2:

$$(47)\quad \eta^{\mu}_{\lambda}(u) = \frac{\vartheta''^{0}_{0}(0)}{\vartheta^{0}_{0}(0)} + e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)\cdot\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(0)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)\cdot\vartheta^{0}_{0}(0)}\right)^2;$$

$$(48)\quad \eta^{\mu}_{\lambda}(u) = \frac{\vartheta''^{0}_{\frac{l}{2}}(0)}{\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(0)} - \left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(u)\cdot\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(0)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)\cdot\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}(0)}\right)^2;$$

$$(49)\quad \eta^{\mu}_{\lambda}(u) = \frac{\vartheta''^{\frac{m}{2}}_{0}(0)}{\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(0)} + e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)\cdot\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(0)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}(0)}\right)^2.$$

Differenzirt man die Relationen (44), (45) und (46) logarithmisch nach u, so erhält man mit Benutzung von (36), (37) und (38) folgende gemeinsame Form:

$$(50)\quad \begin{cases} \frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(u+v)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u+v)} + \frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(u-v)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u-v)} - 2\,\frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)} \\ = l\cdot e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\frac{\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(v)\cdot\vartheta^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(v)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u+v)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u-v)}\cdot\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(v)\cdot\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}. \end{cases}$$

Entwickelt man diese Gleichung nach Potenzen von v und setzt man die Coefficienten von v^2 einander gleich, so erhält man:

$$
51)\quad \frac{d}{du}\,\eta_\lambda^\mu(u) = l\cdot e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}(0)\right)^2\cdot\frac{\vartheta_\lambda^{\mu+\frac{m}{2}}(u)\cdot\vartheta^\mu_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\left(\vartheta_\lambda^\mu(u)\right)^3}.
$$

Da ferner aus den Gleichungen (47), (48) und (49) folgt, dass:

$$
(52)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\eta_\lambda^\mu(u)-\frac{\vartheta''^0_0}{\vartheta^0_0}\right)\left(\frac{\vartheta''^0_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^0_{\frac{l}{2}}}-\eta_\lambda^\mu(u)\right)\left(\eta_\lambda^\mu(u)-\frac{\vartheta''^{\frac{m}{2}}_0}{\vartheta^{\frac{m}{2}}_0}\right)}\\
&=\frac{l}{2}\cdot e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^2\cdot\frac{\vartheta_\lambda^{\mu+\frac{m}{2}}(u)\cdot\vartheta^\mu_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)\cdot\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\left(\vartheta_\lambda^\mu(u)\right)^3},
\end{aligned}\right.
$$

so stellt schliesslich die Relation:

$$
53)\quad \frac{d}{du}\,\eta_\lambda^\mu(u)=2\sqrt{\left(\eta_\lambda^\mu(u)-\frac{\vartheta''^0_0}{\vartheta^0_0}\right)\left(\frac{\vartheta''^0_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^0_{\frac{l}{2}}}-\eta_\lambda^\mu(u)\right)\left(\eta_\lambda^\mu(u)-\frac{\vartheta''^{\frac{m}{2}}_0}{\vartheta^{\frac{m}{2}}_0}\right)}
$$

den Zusammenhang der Functionen $\eta_\lambda^\mu(u)$ mit den elliptischen Integralen her.

Durch Integration von (51) folgt noch mit Benutzung von (43):

$$
54)\quad \left\{\begin{aligned}
\eta_\lambda^\mu(u)-\eta_\lambda^\mu(v) &= e^{\frac{2\pi i}{m}\mu}\cdot\frac{l^3}{4}\left(\vartheta^0_0\,\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\,\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\int_v^u x\; y\cdot z\cdot du\\
&= e^{\frac{2\pi i}{m}\mu}\cdot\frac{l^2}{4}\cdot\left(\vartheta^0_0\,\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\cdot\left(x^2(u)-x^2(v)\right)\\
&= -\frac{l^2}{4}\left(\vartheta^0_0\,\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\right)^2\cdot\left(y^2(u)-y^2(v)\right)\\
&= e^{\frac{2\pi i}{m}\mu}\cdot\frac{l^2}{4}\cdot\left(\vartheta^{\frac{m}{2}}_0\,\vartheta^0_{\frac{l}{2}}\right)^2\cdot\left(z^2(u)-z^2(v)\right).
\end{aligned}\right.
$$

Die Relation (51) kann noch in anderer Form, wie folgt, dargestellt werden.

Aus (18) ergiebt sich durch geeignete Verfügung über die Indices und die Argumente, dass:

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} 2 \cdot \vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u) \cdot \vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u) \cdot \vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(a,u) \cdot \vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(a,u) \\ = \vartheta^{2\mu+\frac{m}{2}}_{2\lambda+\frac{l}{2}}(a, 2u) \cdot \vartheta^{0}_{\frac{l}{2}} \cdot \vartheta^{\frac{m}{2}}_{0} \cdot \vartheta^{0}_{0}\,. \end{aligned}\right.$$

Es ist somit:

$$(56)\quad \frac{d}{du}\,\eta^{\mu}_{\lambda}(u) = e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^3 \cdot \frac{\vartheta^{2\mu+\frac{m}{2}}_{2\lambda+\frac{l}{2}}(a, 2u)}{\left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(a,u)\right)^4}\,.$$

Diese Relation enthält aber nur dann Thetareihen einer und derselben viergliedrigen Untergruppe, wenn λ und μ gleich 0 oder $\frac{l}{2}$ und $\frac{m}{2}$ ist. In diesem Falle wird sie zur Formel *D* der Eingangs citirten Abhandlung über Thetafunctionen und elliptische Integrale des Herrn Scheibner.

Die Formeln (54) kann man auch direct aus den Relationen (47), (48) und (49) ableiten. Dieselben Relationen führen zu folgenden allgemeinen Formeln:

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta^{\mu}_{\lambda}(u) - \eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v) \\ &= \left(\frac{\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^{0}_{0}}\right)^2 \left\{ e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 - e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m}} \left(\frac{\vartheta^{\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda_1+\frac{l}{2}}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\right)^2 \right\} \\ &= -\left(\frac{\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}}\right)^2 \left\{ \left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta^{\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda_1}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\right)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}}\right)^2 \left\{ e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \left(\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 - e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m}} \left(\frac{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1+\frac{l}{2}}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\right)^2 \right\}. \end{aligned}\right.$$

Es bleibt nun noch der Zusammenhang der einfach periodischen Functionen $\frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}}$ und der unendlich vieldeutigen Functionen $\log \vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)$ mit den Integralen zu erörtern.

Da die Differentiation dieser unendlich vieldeutigen Functionen zu einfach periodischen Functionen und die Differentiation dieser einfach periodischen Functionen zu doppelt periodischen Functionen führt, so können die Differentialquotienten der einen und der anderen Art von Functionen nicht algebraisch durch die differenzirten Functionen ausgedrückt werden. Der Zusammenhang dieser Functionen mit den Integralen ist somit verschieden von dem Zusammenhange der Thetaquotienten und der Functionen η^{μ}_{λ}; denn der letztere beruht seinem Wesen nach auf der Darstellbarkeit der Differentialquotienten durch die differenzirten Functionen.

Es können daher bloss solche Integrale hergestellt werden, deren Werthe für gegebene Grenzen durch jene beiden Functionen darstellbar sind.

So findet man für die Function $\frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}$ durch directe Integration:

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)} - \frac{\vartheta'^{\mu}_{\lambda}(v)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(v)} = \int_v^u \eta^{\mu}_{\lambda}\cdot du \\ &= \int_{\eta^{\mu}_{\lambda}(v)}^{\eta^{\mu}_{\lambda}(u)} \frac{\eta^{\mu}_{\lambda}\cdot d\eta^{\mu}_{\lambda}}{2\cdot\sqrt{\left(\eta^{\mu}_{\lambda}-\frac{\vartheta''^{0}_{0}}{\vartheta^{0}_{0}}\right)\left(\frac{\vartheta''^{0}_{\frac{l}{2}}}{\vartheta^{0}_{\frac{l}{2}}}-\eta^{\mu}_{\lambda}\right)\left(\eta^{\mu}_{\lambda}-\frac{\vartheta''^{\frac{m}{2}}_{0}}{\vartheta^{\frac{m}{2}}_{0}}\right)}}. \end{aligned} \right.$$

Um zu den mit $\lg \vartheta^{\mu}_{\lambda}$ zusammenhängenden Integralen zu gelangen, setze man in den Relationen (22), (23) und (24) $\lambda = \lambda'$; $\lambda_1 = \lambda'' = \lambda'''$; $\mu = \mu'$; $\mu_1 = \mu'' = \mu'''$; $u = u'$; $v = u'' = u'''$; so dass

$[\lambda] = \lambda + \lambda_1$; $[\lambda'] = \lambda - \lambda_1$; $[\lambda''] = [\lambda'''] = 0$; $[\mu] = \mu + \mu_1$; $[\mu'] = \mu - \mu_1$; $[\mu''] = [\mu'''] = 0$; $[u] = u + v$; $[u'] = u - v$; $[u''] = [u'''] = 0$.

Man erhält alsdann nach leichten Umformungen der Reihe nach die Relationen:

$$
(59)\quad \left\{
\begin{aligned}
& e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v) \cdot \vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v) \cdot \vartheta^{2\,0}_{\;\;0} \\
& = \left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u) \cdot \vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^2 \cdot \left\{ e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 \right. \\
& \qquad \left. - e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m}} \cdot \left(\frac{\vartheta^{\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda_1+\frac{l}{2}}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\right)^2 \right\};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(60)\quad \left\{
\begin{aligned}
& e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v) \cdot \vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v) \cdot \vartheta^{2\,0}_{\;\;\frac{l}{2}} \\
& = \left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u) \cdot \vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\vartheta^{\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda_1}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(u)}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta^{\mu+\frac{m}{2}}_{\lambda}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 \right\};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(61)\quad \left\{
\begin{aligned}
& e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v) \cdot \vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v) \cdot \vartheta^{2\,\frac{m}{2}}_{\;\;0} \\
& = \left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u) \cdot \vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^2 \cdot \left\{ e^{2\pi i \frac{\mu}{m}} \cdot \left(\frac{\vartheta^{\mu}_{\lambda+\frac{l}{2}}(u)}{\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)}\right)^2 \right. \\
& \qquad \left. - e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m}} \cdot \left(\frac{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1+\frac{l}{2}}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\right)^2 \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Relationen lassen sich mit Hilfe von (57) in folgender gemeinsamen Form darstellen:

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} & e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v)\cdot\vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v)\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^2 \\ & \quad =\left(\vartheta^{\mu}_{\lambda}(u)\cdot\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^2\left(\eta^{\mu}_{\lambda}(u)-\eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right).\end{aligned}\right.$$

Differentiirt man diese Gleichung logarithmisch nach v, so folgt, wenn der Gleichung (56) zufolge

$$\frac{d}{dv}\,\eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)=e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m}}\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^3\cdot\frac{\vartheta^{2\mu_1+\frac{m}{2}}_{2\lambda_1+\frac{l}{2}}(2v)}{\left(\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^4}\ \text{gesetzt wird,}$$

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d}{du}\log\frac{\vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v)}{\vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v)}=2\,\frac{\vartheta'^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)} \\ & \quad -\frac{e^{2\pi i\frac{\mu}{m}}\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^3}{\eta^{\mu}_{\lambda}(u)-\eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}\cdot\frac{\vartheta^{2\mu_1+\frac{m}{2}}_{2\lambda_1+\frac{l}{2}}(2v)}{\left(\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^4}.\end{aligned}\right.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen u_0 und u, die so gewählt werden sollen, dass $\eta^{\mu}_{\lambda}(u)-\eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)$ innerhalb derselben von Null verschieden bleibt, folgt daraus:

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} & \log\frac{\vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u+v)}{\vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u-v)}\cdot\frac{\vartheta^{\mu-\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda-\lambda_1+\frac{l}{2}}(u_0-v)}{\vartheta^{\mu+\mu_1+\frac{m}{2}}_{\lambda+\lambda_1+\frac{l}{2}}(u_0+v)}=2\,\frac{\vartheta'^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}{\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}(u-u_0) \\ & \quad -\frac{e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m}}\cdot\left(\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}\right)^3\cdot\vartheta^{2\mu_1+\frac{m}{2}}_{2\lambda_1+\frac{l}{2}}(2v)}{\left(\vartheta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)\right)^4}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{\eta^{\mu}_{\lambda}(u)-\eta^{\mu_1}_{\lambda_1}(v)}.\end{aligned}\right.$$

Specialisirt man in dieser Formel die Thetareihen auf die Jacobische Gruppe, so erhält man aus derselben die sechzehn Darstellungen der elliptischen Integrale dritter Gattung, wie sie von Herrn Scheibner in der Abhandlung über Thetafunctionen und elliptische Integrale entwickelt werden, wenn $u_0 = 0$ und λ, μ resp. λ_1, μ_1 der Reihe nach gleich 0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1 gesetzt wird.

II.

§ 1. Es bezeichne $\sum\limits_{n_1 \cdots n_\varrho}$ eine über alle positive und negative ganze Zahlen $n_1, n_2 \cdots n_\varrho$ erstreckte ϱ-fach unendliche Summe; dagegen soll $\sum\limits_{\nu}$ und $\sum\limits_{\nu \nu' \nu''}$ eine über die Zahlen ν, ν', ν'' von 1 bis ϱ erstreckte Summe vorstellen; ferner möge es gestattet sein, statt der gebräuchlichen Beziehungsweise e^u das Zeichen Exp (u) zu benutzen, wenn dasselbe mehr Bequemlichkeit bietet.

Es stellt somit:

$$(1) \quad \vartheta(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu) = \sum_{n_1 \cdots n_\varrho} e^{\sum\limits_{\nu\nu'\nu''} (a_{\nu'\nu''} n_{\nu'} n_{\nu''} + u_\nu \cdot n_\nu)}, \quad \text{wo } a_{\nu'\nu''} = a_{\nu''\nu'};$$

die Thetareihe der ϱ Variablen $u_1, u_2 \cdots u_\varrho$ mit den $\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \varrho + 1$ Parametern $a_{\nu'\nu''}$ dar, welch letztere so gewählt sein sollen, dass die bekannte Convergenzbedingung erfüllt ist.

Es reproducirt sich dieselbe bekanntlich bis auf einen hinzutretenden Factor bei Vermehrung der Argumente u_ν um $\mu_\nu \cdot 2\pi i$ und um $\lambda_1 \cdot 2a_{\nu 1} + \lambda_2 \cdot 2a_{\nu 2} + \cdots + \lambda_\varrho \cdot 2a_{\nu\varrho}$, für $\nu = 1, 2, \cdots \varrho$, wo μ_ν und $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\varrho$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Vermehrt man aber die Argumente um Vielfache von Theilwerthen jener Grössen, nämlich um Vielfache von $\frac{2\pi i}{m_\nu}$ und $\frac{2a_{\nu 1}}{l_1}, \frac{2a_{\nu 2}}{l_2}, \cdots \frac{2a_{\nu\varrho}}{l_\varrho}$, so erhält man die Reihe:

$$
2) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + \mu_\nu \cdot \frac{2\pi i}{m_\nu} + \lambda_1 \cdot \frac{2a_{\nu 1}}{l_1} + \lambda_2 \cdot \frac{2a_{\nu 2}}{l_2} + \cdots + \lambda_\varrho \cdot \frac{2a_{\nu\varrho}}{l_\varrho}\right) \\
&= e^{-\sum\limits_{\nu\nu'\nu''}\left(a_{\nu'\nu''} \cdot \frac{\lambda_{\nu'}}{l_{\nu'}} \cdot \frac{\lambda_{\nu''}}{l_{\nu''}} + u_\nu \cdot \frac{\lambda_\nu}{l_\nu}\right)} \cdot \sum_{n_1 \cdots n_\varrho} e^{2\pi i \sum\limits_\nu \frac{\mu_\nu}{m_\nu} \cdot n_\nu} \\
&\quad \cdot e^{\sum\limits_{\nu\nu'\nu''}\left(a_{\nu'\nu''}\left(n_{\nu'} + \frac{\lambda_{\nu'}}{l_{\nu'}}\right)\left(n_{\nu''} + \frac{\lambda_{\nu''}}{l_{\nu''}}\right) + u_\nu\left(n_\nu + \frac{\lambda_\nu}{l_\nu}\right)\right)},
\end{aligned}
\right.
$$

Ich ersetze nun $a_{\nu'\nu''}$ durch $l_{\nu'} \cdot l_{\nu''} \cdot a_{\nu'\nu''}$ und u_ν durch $l_\nu \cdot u_\nu$, so dass folgende Reihe definirt wird:

$$
3) \quad \left\{
\begin{aligned}
&e^{\sum\limits_{\nu\nu'\nu''}(\lambda_{\nu'}\lambda_{\nu''} \cdot a_{\nu'\nu''} + \lambda_\nu \cdot u_\nu)} \\
&\cdot \vartheta\left(l_{\nu'} \cdot l_{\nu''} \cdot a_{\nu'\nu''};\, l_\nu u_\nu + \mu_\nu \cdot \frac{2\pi i}{m_\nu} + l_\nu \lambda_1 2a_{\nu 1} + \cdots l_\nu \lambda_\varrho 2a_{1\varrho}\right) \\
&= \sum_{n_1 \cdots n_\varrho} e^{2\pi i \sum\limits_\nu \frac{\mu_\nu}{m_\nu} \cdot n_\nu} \\
&\quad \cdot e^{\sum\limits_{\nu\nu'\nu''}(a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'} n_{\nu'} + \lambda_{\nu'})(l_{\nu''} n_{\nu''} + \lambda_{\nu''}) + u_\nu(l_\nu n_\nu + \lambda_\nu))},
\end{aligned}
\right.
$$

die durch $\vartheta^{\mu_1 \cdots \mu_\varrho}_{\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ u_\nu)$ oder durch $\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\ u_\nu)$ bezeichnet werden soll.

Es ist diese Reihe, von einem Factor abgesehen, ähnlich denjenigen Reihen, welche Prym und Krazer im 3. Bande der Acta mathematica[1]) ihren Untersuchungen zu Grunde legten, woselbst Relationen für Producte von n solchen Reihen entwickelt werden. In Anlehnung an die dortselbst benutzte Bezeichnungsweise kann das System der Indices $\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho, \mu_1 \cdots \mu_\varrho$ die Charakteristik der soeben definirten Reihe genannt werden.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass eine Vermehrung der Indices μ_ν um m_ν keine Aenderung der Reihe erzeugt; dass ferner für eine Vermehrung der Indices λ_ν um l_ν folgende Relation gilt:

---

1) Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel; Act. Math. Bd. 3; p. 240—276.

$$(4)\qquad \vartheta^{\mu_1\cdots\mu_\nu\cdots\mu_\varrho}_{\lambda_1\cdots\lambda_\nu+l_\nu\cdots\lambda_\varrho} = e^{-\frac{2\pi i}{m_\nu}\cdot\mu_\nu}\cdot\vartheta^{\mu_1\cdots\mu_\nu\cdots\mu_\varrho}_{\lambda_1\cdots\lambda_\nu\cdots\lambda_\varrho}.$$

Die Zahlenwerthe von λ_ν und μ_ν können daher stets auf ihre kleinsten positiven Werthe bezüglich der Moduln l_ν und m_ν reducirt werden, so dass nur die Reihen mit den Indices $\lambda_\nu = 0, 1, 2, \ldots l_\nu - 1$; $\mu_\nu = 0, 1, 2, \ldots m_\nu - 1$ als wesentlich verschieden bleiben. Diese Reihen bilden somit eine *Gruppe von* $l_1\cdot l_2\cdots l_\varrho\cdot m_1\cdot m_2\cdots m_\varrho$ *Thetareihen.*

Für die Reihen dieser Gruppe ergeben sich zunächst die Relationen:

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta^{\mu_1\cdots\mu_\varrho}_{\lambda_1\cdots\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ -u_\nu) = \vartheta^{-\mu_1\cdots-\mu_\varrho}_{-\lambda_1\cdots-\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ +u_\nu) \\ \quad = e^{2\pi i\sum\limits_\nu\frac{\mu_\nu}{m_\nu}}\cdot\vartheta^{m_1-\mu_1\cdots m_\varrho-\mu_\varrho}_{l_1-\lambda_1\cdots l_\varrho-\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ +u_\nu), \end{cases}$$

wo alle Argumente zugleich positiv oder negativ sind, und:

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{\mu_1\cdots\mu_\varrho}_{\lambda_1\cdots\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ -u_\nu) = \frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{-\mu_1\cdots-\mu_\varrho}_{-\lambda_1\cdots-\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ +u_\nu) \\ \quad = e^{2\pi i\sum\limits_\nu\frac{\mu_\nu}{m_\nu}}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{m_1-\mu_1\cdots m_\varrho-\mu_\varrho}_{l_1-\lambda_1\cdots l_\varrho-\lambda_\varrho}(a_{\nu'\nu''};\ +u_\nu) \end{cases}$$

für jedes beliebige u_i aus der Reihe der Argumente.

Aus (5) und (6) folgt, dass:

$$(7)\qquad \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\ 0) = 0\ ,$$

falls die Indices $\lambda_\nu = 0$ oder $\frac{l_\nu}{2}$, $\mu_\nu = 0$ oder $\frac{m_\nu}{2}$ gesetzt werden und eine *ungerade* Anzahl von Indicespaaren λ_ν, μ_ν den bezüglichen Werthenpaaren $\frac{l_\nu}{2}$, $\frac{m_\nu}{2}$ gleich ist; dass ferner:

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\ u_\nu)_{u_\nu=0} = 0\ ,$$

falls die Indices λ_ν, μ_ν aus derselben Werthenreihe genommen werden und eine *gerade* Anzahl von Indicespaaren λ_ν, μ_ν den bezüglichen Werthenpaaren $\frac{l_\nu}{2}$, $\frac{m_\nu}{2}$ gleich ist.

Der Eigenschaft der ursprünglichen Thetareihe zufolge gilt für die Reihen der allgemeinen Gruppe die Relation:

$$(9)\quad \begin{cases} \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1\cdot 2a_{1\nu}l_1 + t_2\cdot 2a_{2\nu}l_2 + \cdots + t_\varrho\cdot 2a_{\varrho\nu}l_\varrho\right) \\ = \mathrm{Exp}\cdot\left\{\sum_\nu s_\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} - \sum_\nu t_\nu\cdot\mu_\nu\cdot\frac{2\pi i}{m_\nu} \right. \\ \left. - \sum_{\nu\nu'\nu''}(t_{\nu'}t_{\nu''}l_{\nu'}l_{\nu''}a_{\nu'\nu''} + t_\nu l_\nu u_\nu)\right\}\cdot\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu)\,, \end{cases}$$

wo s_ν und t_ν beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Es folgt hieraus:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1\cdot 2a_{1\nu}l_1 + \cdots + t_\varrho\cdot 2a_{\varrho\nu}l_\varrho\right)}{\vartheta^{\mu'_\nu}_{\lambda'_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1\cdot 2a_{1\nu}l_1 + \cdots + t_\varrho\cdot 2a_{\varrho\nu}l_\varrho\right)} \\ = e^{\sum_\nu s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu}(\lambda_\nu - \lambda'_\nu) - \sum_\nu t_\nu\cdot\frac{2\pi i}{m_\nu}(\mu_\nu - \mu'_\nu)}\cdot\dfrac{\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu)}{\vartheta^{\mu'_\nu}_{\lambda'_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u'_\nu)}\,; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1\cdot 2a_{1\nu}l_1 + \cdots + t_\varrho\cdot 2a_{\varrho\nu}l_\varrho\right)}{\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1\cdot 2a_{1\nu}l_1 + \cdots + t_\varrho\cdot 2a_{\varrho\nu}l_\varrho\right)} \\ = -t_i\cdot l_i + \dfrac{\frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu)}{\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu)}\,; \quad \text{für } i = 1, 2, \cdots \varrho\,. \end{cases}$$

Aus (10) lassen sich folgende Eigenschaften der *Quotienten* von Thetareihen der allgemeinen Gruppe angeben:

Die Quotienten sind 2ϱ-fach periodische Functionen, deren Periodensysteme aus der Bedingungsgleichung

$$(12)\qquad e^{\sum_\nu s_\nu\cdot\frac{2\pi i}{l_\nu}(\lambda_\nu - \lambda'_\nu) - \sum_\nu t_\nu\cdot\frac{2\pi i}{m_\nu}(\mu_\nu - \mu'_\nu)} = 1$$

zu ersehen sind.

Wenn nun über die Theilbarkeit der Zahlen l_ν und m_ν keine Voraussetzung gemacht wird, so muss $s_\nu = l_\nu$ und $t_\nu = m_\nu$ gesetzt werden. Werden aber alle l_ν und m_ν *geradzahlig* vorausgesetzt, so kann $\lambda_\nu = \lambda'_\nu + \varepsilon_\nu \frac{l_\nu}{2}$, $\mu_\nu = \mu'_\nu + \eta_\nu \frac{m_\nu}{2}$ gesetzt werden, wo die ε_ν und η_ν gleich 0 oder gleich 1 sind. Dann wird die Gleichung (12) erfüllt, falls

$$(13) \qquad \sum_\nu s_\nu \cdot \varepsilon_\nu - \sum_\nu t_\nu \cdot \eta_\nu \equiv 0 \pmod{2},$$

so dass je nach der Bestimmung der Werthe ε_ν und η_ν für s_ν und t_ν sich die Zahlen 1 und 2 ergeben. Es bilden somit die 4^ϱ Reihen $\vartheta\begin{matrix} \mu_1 + \eta_1 \frac{m_1}{2}; \cdots \mu_\varrho + \eta_\varrho \frac{m_\varrho}{2} \\ \lambda_1 + \varepsilon_1 \frac{l_1}{2}; \cdots \lambda_\varrho + \varepsilon_\varrho \frac{l_\varrho}{2} \end{matrix}$ (wo $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho, \eta_1 \cdots \eta_\varrho = 0$ oder 1) eine Untergruppe der allgemeinen Gruppe mit den Periodensystemen:

$$\left.\begin{matrix} 0\,, & 0\,, & \cdots & s_\nu \frac{2\pi i}{l_\nu}\,, & \cdots & 0 \\ t_1 2a_{1\nu} l_1\,, & t_2 2a_{2\nu} l_2\,, & \cdots & t_\nu 2a_{\nu\nu} l_\nu\,, & \cdots & t_\varrho 2a_{\varrho\nu} l_\varrho \end{matrix}\right\} \text{für}$$

$\nu = 1, 2, \cdots \varrho$.

In ähnlicher Weise folgt aus der allgemeinen Voraussetzung, dass alle l_ν und m_ν durch p theilbar seien, die Bemerkung, dass die $p^{2\varrho}$ Reihen:

$$\vartheta\begin{matrix} \mu_\nu + \pi'_\nu \cdot \frac{m_\nu}{p} \\ \lambda_\nu + \pi_\nu \cdot \frac{l_\nu}{p} \end{matrix}, \text{ wo } \pi_\nu = 0, 1, 2, \cdots p-1\,;\ \pi'_\nu = 0, 1, 2 \cdots p-1,$$

für $\nu = 1, 2, \cdots \varrho$ eine Untergruppe bilden, deren Periodensysteme aus (12) sich ergeben, wenn dortselbst $\lambda_\nu = \lambda'_\nu + \pi_\nu \cdot \frac{l_\nu}{p}$; $\mu_\nu = \mu'_\nu + \pi'_\nu \cdot \frac{m_\nu}{p}$ gesetzt wird und die von Null verschiedenen kleinsten Werthe für s_ν und t_ν aus der Gleichung:

$$(14) \qquad \sum_\nu s_\nu \cdot \pi_\nu - \sum_\nu t_\nu \cdot \pi'_\nu \equiv 0 \pmod{p}$$

ermittelt werden.

Aus (11) ergiebt sich folgende Eigenschaft des *Logarithmus* einer Thetareihe der allgemeinen Gruppe:

Differenzirt man den Logarithmus einer Thetareihe nach einer der ϱ Variablen, so erhält man ϱ-fach periodische Functionen von der aus (11) erkennbaren Beschaffenheit. Es führt ferner die successive Differentiation nach zwei beliebigen Variablen zu 2ϱ-fach periodischen Functionen mit den Periodensystemen:

$$\left.\begin{matrix} 0; & 0; & \cdots & \frac{2\pi i}{l_\nu}; & \cdots & 0; \\ 2a_{1\nu}\cdot l_1; & 2a_{2\nu}\cdot l_2; & \cdots & 2a_{\nu\nu}\cdot l_\nu; & \cdots & 2a_{\varrho\nu}\cdot l_\varrho; \end{matrix}\right\} \text{für } \nu = 1, 2, \cdots \varrho.$$

Es ist somit:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_i} \lg \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu \cdot \frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1 \cdot 2a_{1\nu} l_1 + \cdots + t_\varrho \cdot 2a_{\varrho\nu} l_\varrho\right) \\ = -t_i \cdot l_i + \frac{\partial}{\partial u_i} \lg \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu); \quad \text{für } i = 1, 2, \cdots \varrho. \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} \lg \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}\left(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu + s_\nu \cdot \frac{2\pi i}{l_\nu} + t_1 \cdot 2a_{1\nu} l_1 + \cdots + t_\varrho \cdot 2a_{\varrho\nu} l_\varrho\right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} \lg \vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu}(a_{\nu'\nu''};\, u_\nu); \quad \text{für } i = 1, 2, \cdots \varrho;\ k = 1, 2, \cdots \varrho. \end{cases}$$

§ 2. Mit Benutzung der in I, (14) definirten Bezeichnungsweise kann man setzen:

$$(17)\quad \begin{cases} \mu_\nu n_\nu + \mu'_\nu n'_\nu + \mu''_\nu n''_\nu + \mu'''_\nu n'''_\nu \\ = [\mu_\nu][n_\nu] + [\mu'_\nu][n'_\nu] + [\mu''_\nu][n''_\nu] + [\mu'''_\nu][n'''_\nu]; \\ (l_\nu n_\nu + \lambda_\nu)^2 + (l_\nu n'_\nu + \lambda'_\nu)^2 + (l_\nu n''_\nu + \lambda''_\nu)^2 + (l_\nu n'''_\nu + \lambda'''_\nu)^2 \\ = (l_\nu[n_\nu] + [\lambda_\nu])^2 + (l_\nu[n'_\nu] + [\lambda'_\nu])^2 + (l_\nu[n''_\nu] + [\lambda''_\nu])^2 \\ + (l_\nu[n'''_\nu] + [\lambda'''_\nu])^2; \\ u_\nu(l n_\nu + \lambda_\nu) + u'_\nu(l n'_\nu + \lambda'_\nu) + u''_\nu(l n''_\nu + \lambda''_\nu) + u'''_\nu(l n'''_\nu + \lambda'''_\nu) \\ = [u_\nu](l[n_\nu] + [\lambda_\nu]) + [u'_\nu](l[n'_\nu] + [\lambda'_\nu]) \\ + [u''_\nu](l[n''_\nu] + [\lambda''_\nu]) + [u'''_\nu](l[n'''_\nu] + [\lambda'''_\nu]) \end{cases}$$

für $\nu = 1, 2, \cdots \varrho$.

Der Eigenschaft der durch die Klammern bezeichneten quadratischen Transformation zufolge ist alsdann:

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{n\,n'\,n''\,n'''} \mathrm{Exp}\left(2\pi i \sum_{\nu}\left(\frac{\mu_\nu}{m_\nu}\, n_\nu + \frac{\mu'_\nu}{m_\nu}\, n'_\nu + \frac{\mu''_\nu}{m_\nu}\, n''_\nu + \frac{\mu'''_\nu}{m_\nu}\, n'''_\nu\right)\right)\\
&\cdot \mathrm{Exp}\Big[\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}n_{\nu'}+\lambda_{\nu'})(l_{\nu''}n_{\nu''}+\lambda_{\nu''})+u_\nu(l_\nu n_\nu+\lambda_\nu)\}\\
&+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}n'_{\nu'}+\lambda'_{\nu'})(l_{\nu''}n'_{\nu''}+\lambda'_{\nu''})+u'_\nu\,(l_\nu\, n'_\nu+\lambda'_\nu)\}\\
&+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}n''_{\nu'}+\lambda''_{\nu'})(l_{\nu''}n''_{\nu''}+\lambda''_{\nu''})+u''_\nu\,(l_\nu\, n''_\nu+\lambda''_\nu)\}\\
&+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}n'''_{\nu'}+\lambda'''_{\nu'})(l_{\nu''}n'''_{\nu''}+\lambda'''_{\nu''})+u'''_\nu\,(l_\nu\, n'''_\nu+\lambda'''_\nu)\}\Big]\\
&=\sum_{[n][n'][n''][n''']} \mathrm{Exp}\left(2\pi i \sum_{\nu}\left(\frac{[\mu_\nu]}{m_\nu}\,[n_\nu] + \frac{[\mu'_\nu]}{m_\nu}\,[n'_\nu] + \frac{[\mu''_\nu]}{m_\nu}\,[n''_\nu]\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. + \frac{[\mu'''_\nu]}{m_\nu}\,[n'''_\nu]\right)\right)\\
&\cdot \mathrm{Exp}\Big[\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}[n_{\nu'}]+[\lambda_{\nu'}])(l_{\nu''}[n_{\nu''}]+[\lambda_{\nu''}])\\
&\qquad\qquad + [u_\nu]\,(l_\nu[n_\nu]+[\lambda_\nu])\}\\
&\quad+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}[n'_{\nu'}]+[\lambda'_{\nu'}])(l_{\nu''}[n'_{\nu''}]+[\lambda'_{\nu''}])\\
&\qquad\qquad + [u'_\nu](l_\nu[n'_\nu]+[\lambda'_\nu])\}\\
&\quad+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}[n''_{\nu''}]+[\lambda''_{\nu}])(l''_{\nu''}[n''_{\nu''}]+[\lambda''_{\nu''}])\\
&\qquad\qquad + [u''_\nu](l_\nu[n''_\nu]+[\lambda''_\nu])\}\\
&\quad+\sum_{\nu\nu'\nu''}\{a_{\nu'\nu''}(l_{\nu'}[n'''_{\nu'}]+[\lambda'''_{\nu'}])(l_{\nu''}[n'''_{\nu''}]+[\lambda'''_{\nu''}])\\
&\qquad\qquad + [u'''_\nu](l_\nu[n'''_\nu]+[\lambda'''_\nu])\}\Big];
\end{aligned}\right.
$$

falls in beiden Summen über alle ganzzahligen und alle halbzahligen Werthe n_ν, n'_ν, n''_ν, n'''_ν; $[n_\nu]$, $[n'_\nu]$, $[n''_\nu]$, $[n'''_\nu]$ summirt wird, für $\nu = 1, 2, \cdots \varrho$.

Trennt man nun beide Summen in die nur über alle ganzzahligen und nur über alle halbzahligen Werthensysteme n_ν, n'_ν, n''_ν, n'''_ν; resp. $[n_\nu]$, $[n'_\nu]$, $[n''_\nu]$, $[n'''_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \cdots \varrho)$ hinerstreckten Summen, so lässt sich jede dieser Theilsummen als ein Product von vier Thetareihen auffassen. Es ist daher bloss eine andere Schreibweise der Relation (18), wenn ich setze:

$$19)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho} e^{2\pi i\sum_\nu \varepsilon_\nu\cdot\frac{[\mu_\nu]}{m_\nu}}\cdot\vartheta^{\mu_\nu}_{\lambda_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,u_\nu)\\&\cdot\vartheta^{\mu'_\nu}_{\lambda'_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,u'_\nu)\cdot\vartheta^{\mu''_\nu}_{\lambda''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,u''_\nu)\\&\qquad\cdot\vartheta^{\mu'''_\nu}_{\lambda'''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,u'''_\nu)\\&=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho} e^{2\pi i\sum_\nu \varepsilon_\nu\cdot\frac{\mu_\nu}{m_\nu}}\cdot\vartheta^{[\mu_\nu]}_{[\lambda_\nu]+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,[u_\nu])\\&\cdot\vartheta^{[\mu'_\nu]}_{[\lambda'_\nu]+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,[u'_\nu])\cdot\vartheta^{[\mu''_\nu]}_{[\lambda''_\nu]+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,[u''_\nu])\\&\qquad\cdot\vartheta^{[\mu'''_\nu]}_{[\lambda'''_\nu]+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,[u'''_\nu])\,,\end{aligned}\right.$$

wo beide Summen über alle Werthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\varrho$ gleich 0 und gleich 1 zu erstrecken sind.

Man beachte nun noch, dass μ_ν, μ'_ν, μ''_ν, μ'''_ν durch $\mu_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}$, $\mu'_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}$, $\mu''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}$, $\mu'''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}$ (wo $\eta_\nu = 0$ oder 1) ersetzt werden kann, ohne dass dadurch $[\mu'_\nu]$, $[\mu''_\nu]$, $[\mu'''_\nu]$ sich ändern, während $[\mu_\nu]$ in $[\mu_\nu]+m_\nu$ übergeht, was keine Aenderung in den mit diesem Index versehenen Thetareihen verursacht. Führt man diese Substitution an allen Indices μ_ν, μ'_ν, μ''_ν, μ'''_ν von $\nu = 1$ bis $\nu = \varrho$ aus und addirt man alle so entstehenden Gleichungen von der Form der Gleichung (19), so erhält man die fundamentale Relation:

$$20)\quad\left\{\begin{aligned}&2^\varrho\cdot\vartheta^{[\mu_\nu]}_{[\lambda_\nu]}(a_{\nu'\nu''};\,[u_\nu])\cdot\vartheta^{[\mu'_\nu]}_{[\lambda'_\nu]}(a_{\nu'\nu''};\,[u'_\nu])\\&\cdot\vartheta^{[\mu''_\nu]}_{[\lambda''_\nu]}(a_{\nu'\nu''};\,[u''_\nu])\cdot\vartheta^{[\mu'''_\nu]}_{[\lambda'''_\nu]}(a_{\nu'\nu''};\,[u'''_\nu])\\&=\sum_{\eta_1\cdots\eta_\varrho}\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho} e^{2\pi i\sum_\nu \varepsilon_\nu\cdot\frac{[\mu_\nu]}{m_\nu}}\cdot\vartheta^{\mu_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}}_{\lambda_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\,u_\nu)\end{aligned}\right.$$

$$\cdot \vartheta_{\lambda'_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}^{\mu'_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\, u'_\nu)\cdot\vartheta_{\lambda''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}^{\mu''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\, u''_\nu)$$

$$\cdot\vartheta_{\lambda'''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}^{\mu'''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}}(a_{\nu'\nu''};\, u'''_\nu).$$

Es ist hier die Summe über alle Werthe $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_\varrho$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho$ gleich 0 und gleich 1 zu erstrecken. Es ist ferner

$$[\lambda_\nu] = \frac{\lambda_\nu + \lambda'_\nu + \lambda''_\nu + \lambda'''_\nu}{2}; \quad [\lambda'_\nu] = \frac{\lambda_\nu + \lambda'_\nu - \lambda''_\nu - \lambda'''_\nu}{2};$$

$$[\lambda''_\nu] = \frac{\lambda_\nu - \lambda'_\nu + \lambda''_\nu - \lambda'''_\nu}{2}; \quad [\lambda'''_\nu] = \frac{\lambda_\nu - \lambda'_\nu - \lambda''_\nu + \lambda'''_\nu}{2};$$

$$[\mu_\nu] = \frac{\mu_\nu + \mu'_\nu + \mu''_\nu + \mu'''_\nu}{2}; \quad [\mu'_\nu] = \frac{\mu_\nu + \mu'_\nu - \mu''_\nu - \mu'''_\nu}{2};$$

$$[\mu''_\nu] = \frac{\mu_\nu - \mu'_\nu + \mu''_\nu - \mu'''_\nu}{2}; \quad [\mu'''_\nu] = \frac{\mu_\nu - \mu'_\nu - \mu''_\nu + \mu'''_\nu}{2};$$

$$[u_\nu] = \frac{u_\nu + u'_\nu + u''_\nu + u'''_\nu}{2}; \quad [u'_\nu] = \frac{u_\nu + u'_\nu - u''_\nu - u'''_\nu}{2};$$

$$[u''_\nu] = \frac{u_\nu - u'_\nu + u''_\nu - u'''_\nu}{2}; \quad [u'''_\nu] = \frac{u_\nu - u'_\nu - u''_\nu + u'''_\nu}{2}.$$

Es sei schliesslich vorausgesetzt, dass alle l_ν und m_ν gerade Zahlen seien, und dass die Indices λ und μ der Art gewählt seien, dass auch $[\lambda]$ und $[\mu]$ ganze Zahlen darstellen. Alsdann setzt diese Relation Thetareihen einer und derselben Gruppe in Beziehung zu einander.

Wird in dieser Relation $[\mu_\nu]$, $[\mu'_\nu]$, $[\mu''_\nu]$, $[\mu'''_\nu]$ um $\gamma_\nu \cdot \frac{m_\nu}{2}$ und $[\lambda_\nu]$, $[\lambda'_\nu]$, $[\lambda''_\nu]$, $[\lambda'''_\nu]$ um $\delta_\nu \cdot \frac{l_\nu}{2}$ vermehrt, wo $\delta_\nu = 0$ oder 1, $\gamma_\nu = 0$ oder 1 für $\nu = 1, 2, \ldots \varrho$ und setzt man mit Rücksicht auf die Gleichung (4):

$$(21)\quad \vartheta_{\delta_\nu\cdot l_\nu+\lambda_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}^{\gamma_\nu\cdot m_\nu+\mu_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}} = e^{-2\pi i\sum\limits_\nu\left(\delta_\nu\cdot\frac{\mu_\nu}{m_\nu}+\frac{1}{2}\cdot\delta_\nu\cdot\eta_\nu\right)}\cdot\vartheta_{\lambda_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}}^{\mu_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}},$$

so erhält man folgende allgemeine Relation an Stelle von (20):

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} & 2^\rho \cdot e^{2\pi i \sum\limits_\nu \delta_\nu \cdot \frac{\mu_\nu}{m_\nu}} \cdot \vartheta\begin{matrix}[\mu_\nu]+\gamma_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ [\lambda_\nu]+\delta_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}([u_\nu]) \cdot \vartheta\begin{matrix}[\mu'_\nu]+\gamma_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ [\lambda'_\nu]+\delta_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}([u'_\nu]) \\ & \cdot \vartheta\begin{matrix}[\mu''_\nu]+\gamma_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ [\lambda''_\nu]+\delta_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}([u''_\nu]) \cdot \vartheta\begin{matrix}[\mu'''_\nu]+\gamma_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ [\lambda'''_\nu]+\delta_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}([u'''_\nu]) \\ & = \sum_{\eta_1\cdots\eta_\rho}\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu-\eta_\nu\delta_\nu)} \cdot e^{2\pi i \sum\limits_\nu \varepsilon_\nu\cdot\frac{[\mu_\nu]}{m_\nu}} \\ & \cdot \vartheta\begin{matrix}\mu_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ \lambda_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}(u_\nu) \cdot \vartheta\begin{matrix}\mu'_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ \lambda'_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}(u'_\nu) \cdot \vartheta\begin{matrix}\mu''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ \lambda''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}(u''_\nu) \\ & \cdot \vartheta\begin{matrix}\mu'''_\nu+\eta_\nu\cdot\frac{m_\nu}{2}\\ \lambda'''_\nu+\varepsilon_\nu\cdot\frac{l_\nu}{2}\end{matrix}(u'''_\nu)\,. \end{aligned}\right.$$

In leicht verständlicher symbolischer Bezeichnungsweise lautet dieselbe Formel:

$$(22\text{a})\quad 2^\rho\{\Pi\}^{\gamma_1\cdots\gamma_\rho}_{\delta_1\cdots\delta_\rho} = \sum_{\eta_1\cdots\eta_\rho}\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu-\eta_\nu\delta_\nu)} \cdot \Pi^{\eta_1\cdots\eta_\rho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}\,.$$

Diese Relation stellt die allgemeinste derartige Beziehung zwischen Thetareihen einer Gruppe dar und gründet sich darauf, dass Producte von *vier* Thetareihen einer Gruppe gebildet wurden.

Setzt man in dieser Relation alle l_ν und alle m_ν gleich 2, so geht dieselbe über in die von Herrn Prym in der schon genannten Abhandlung[1]) entwickelte analoge Formel, da nunmehr die λ_ν und μ_ν gleich 0 oder 1 zu setzen sind und unter den vier Zahlen λ_ν, λ'_ν, λ''_ν, λ'''_ν resp. μ_ν, μ'_ν, μ''_ν, μ'''_ν keine ungerade Anzahl den Werth 1 annehmen darf. In der Prym'schen Formel ist dieser Bedingung Rechnung getragen. Da diese letztere mit Hilfe des früher (S. 317) erwähnten Princips abgeleitet wurde,

1) Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. Act. Math. Bd. 3, pag. 214.

während die hier entwickelte allgemeinere Relation mit Benutzung des Wesens der orthogonalen Transformation, alle ganzen und alle halben Zahlensysteme in dieselben Zahlensysteme mit veränderter Anordnung überzuführen, gewonnen wurde, so sind die hier gegebenen Entwickelungen unabhängig von denjenigen des Herrn Prym.

Mit dieser Relation (22) resp. (22a) ist indessen noch nicht die in jedem Falle brauchbare Beziehung zwischen den Thetareihen entwickelt. Es können aber aus derselben ohne Mühe andere Relationen, die für besondere Untersuchungen und insbesondere für die Untersuchung des Zusammenhangs der Thetareihen mit den mehrfachen Integralen algebraischer Functionen vortheilhaft sind, abgeleitet werden.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, dass die Symbole $\{\Pi\}$ und Π ihre Bedeutung nicht verändern, wenn die Indices δ_ν, γ_ν resp. ε_ν, η_ν in beliebiger Weise um 2 vermehrt oder vermindert werden. Es ist ferner vortheilhaft, das Symbol $\Pi^{\eta_1 \cdots \eta_\varrho}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho}$ in Form des Productes $\Pi_{\varepsilon_1} \cdot \Pi_{\eta_1} \cdot \Pi_{\varepsilon_2} \cdot \Pi_{\eta_2} \cdots \Pi_{\varepsilon_\varrho} \cdot \Pi_{\eta_\varrho}$ zu schreiben. Dieses Product ist lediglich eine symbolische Umsetzung, so dass seine Factoren nicht vertauscht werden dürfen und das Product selbst mit Berücksichtigung der Aufeinanderfolge seiner Factoren jederzeit in die ursprüngliche Form des Symbols wieder umgesetzt werden kann.

Auf Grund dieser Schreibweise kann alsdann die Relation (22a) auch folgendermassen dargestellt werden:

$$(22\text{b}) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2^\varrho \cdot \{\Pi\}^{\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho}_{\delta_1 \cdots \delta_\varrho} \\ & = (\Pi_0 + (-1)^{\gamma_1} \cdot \Pi_1) \cdot (\Pi_0 + (-1)^{\delta_1} \cdot \Pi_1) \\ & \cdot (\Pi_0 + (-1)^{\gamma_2} \cdot \Pi_1) \cdot (\Pi_0 + (-1)^{\delta_2} \cdot \Pi_1) \cdots \\ & \cdot (\Pi_0 + (-1)^{\gamma_\varrho} \cdot \Pi_1) \cdot (\Pi_0 + (-1)^{\delta_\varrho} \cdot \Pi_1) \,. \end{aligned} \right.$$

Es ist nun unmittelbar ersichtlich, dass die Addition oder Subtraction der entsprechenden Relation für

$$\{\Pi\}^{\gamma_1 + \gamma'_1 \cdots \gamma_\varrho + \gamma'_\varrho}_{\delta_1 + \delta'_1 \cdots \delta_\varrho + \delta'_\varrho} \,,$$

wenn nicht alle δ'_ν, γ'_ν, die gleich Null oder gleich 1 sein sollen, gleich Null sind, sondern mindestens einer dieser Indices gleich

1 ist, die 4^ρ Glieder der rechten Seiten auf die halbe Anzahl reducirt.

Es ist ferner in derselben Weise evident, dass die Summe oder Differenz der Formeln für $\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1''\cdots\gamma_\rho+\gamma_\rho''}_{\delta_1+\delta_1''\cdots\delta_\rho+\delta_\rho''}$ und $\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'+\gamma_1''\cdots\gamma_\rho+\gamma_\rho'+\gamma_\rho''}_{\delta_1+\delta_1'+\delta_1''\cdots\delta_\rho+\delta_\rho'+\delta_\rho''}$ zu denselben Symbolen $\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\rho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}$ führt wie die Summe oder Differenz der Formeln für $\{\Pi\}^{\gamma_1\cdots\gamma_\rho}_{\delta_1\cdots\delta_\rho}$ und $\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'\cdots\gamma_\rho+\gamma_\rho'}_{\delta_1+\delta_1'\cdots\delta_\rho+\delta_\rho'}$, so dass die beide Male resultirenden $\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\rho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}$ sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden können, wofern — was vorausgesetzt werden soll — die Indices δ_ν'' und γ_ν'' nicht alle gleich Null und nicht der Reihe nach den Indices δ_ν', γ_ν' gleich sind.

Schliesslich ergiebt die additive oder subtractive Verbindung der beiden resultirenden Formeln eine abermalige Reduction der $\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\rho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}$ auf die halbe Anzahl.

Man erhält somit, wenn i' und i'' unabhängig von einander die Werthe $+1$ oder -1 bedeuten, zunächst:

$$\text{23a)}\quad \begin{aligned} &2^{\rho-1}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1\cdots\gamma_\rho}_{\delta_1\cdots\delta_\rho}+i'\cdot 2^{\rho-1}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'\cdots\gamma_\rho+\gamma_\rho'}_{\delta_1+\delta_1'\cdots\delta_\rho+\delta_\rho'}\\ &=\tfrac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1}\cdot\Pi_1)\cdots(\Pi_0+(-1)^{\delta_\rho}\cdot\Pi_1)+\\ i'\cdot(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma_1'}\cdot\Pi_1)\cdots(\Pi_0+(-1)^{\delta_\rho+\delta_\rho'}\cdot\Pi_1)\end{array}\right\}\\ &=\tfrac{1}{2}\cdot\sum_{\varepsilon_\nu;\,\eta_\nu}(-1)^{\sum_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu-\eta_\nu\delta_\nu)}\cdot\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\rho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\rho}\\ &\qquad\cdot\left(1+i'\cdot(-1)^{\sum_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu'-\eta_\nu\delta_\nu')}\right); \end{aligned}$$

sodann:

$$(23\,\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}
&2^{\varrho-2}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1\cdots\gamma_\varrho}_{\delta_1\cdots\delta_\varrho}+i'\cdot 2^{\varrho-2}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma'_1\cdots\gamma_\varrho+\gamma'_\varrho}_{\delta_1+\delta'_1\cdots\delta_\varrho+\delta'_\varrho}\\
&\quad+i''\cdot 2^{\varrho-2}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma''_1\cdots\gamma_\varrho+\gamma''_\varrho}_{\delta_1+\delta''_1\cdots\delta_\varrho+\delta''_\varrho}+i'\cdot i''\cdot 2^{\varrho-2}\\
&\quad\cdot\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma'_1+\gamma''_1\cdots\gamma_\varrho+\gamma'_\varrho+\gamma''_\varrho}_{\delta_1+\delta'_1+\delta''_1\cdots\delta_\varrho+\delta'_\varrho+\delta''_\varrho}\\
&=\tfrac{1}{4}\cdot\left\{\begin{array}{l}
(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1}\cdot\Pi_1)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho}\cdot\Pi_1)\\
+i'\cdot(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma'_1}\cdot\Pi_1)\cdots(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho+\delta'_\varrho}\cdot\Pi_1)\\
+i''\,(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma''_1}\cdot\Pi_1)\cdots(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho+\delta''_\varrho}\cdot\Pi_1)\\
+i'\cdot i''\cdot(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma'_1+\gamma''_1}\cdot\Pi_1)\cdot(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho+\delta'_\varrho+\delta''_\varrho}\cdot\Pi_1)
\end{array}\right\}\\
&=\tfrac{1}{4}\cdot\sum_{\varepsilon_\nu;\,\eta_\nu}(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu-\eta_\nu\delta_\nu)}\cdot\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\varrho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho}\\
&\quad\cdot\left(1+i'\cdot(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma'_\nu-\eta_\nu\delta'_\nu)}\right)\cdot\left(1+i''\cdot(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma''_\nu-\eta_\nu\delta''_\nu)}\right).
\end{aligned}\right.$$

Die Fortführung der Reduction der Anzahl der $\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\varrho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho}$ führt schliesslich zu einer Relation, die 2^ϱ Symbole $\{\Pi\}$ durch 2^ϱ Symbole Π ausdrückt. Wird $\{\Pi\}^{\gamma_1\cdots\gamma_\varrho}_{\delta_1\cdots\delta_\varrho}$ durch $\{\Pi\}^{\gamma_\nu}_{\delta_\nu}$ ersetzt und wählt man ϱ von einander verschiedene Indicessysteme δ'_ν, γ'_ν; δ''_ν, γ''_ν; ... $\delta^{(\varrho)}_\nu$, $\gamma^{(\varrho)}_\nu$, so dass die 2^ϱ Symbole $\{\Pi\}^{\gamma_\nu}_{\delta_\nu}$, $\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma'_\nu}_{\delta_\nu+\delta'_\nu}$, ... $\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma^{(\varrho)}_\nu}_{\delta_\nu+\delta^{(\varrho)}_\nu}$, ... $\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma'_\nu+\cdots+\gamma^{(\varrho)}_\nu}_{\delta_\nu+\delta'_\nu+\cdots+\delta^{(\varrho)}_\nu}$ verschiedene Indicessysteme aufweisen und bedeuten schliesslich i', i'' ... $i^{(\varrho)}$ unabhängig von einander die Werthe $+1$ oder -1, so lässt sich diese Relation in folgender Weise darstellen:

$$
(23\text{c})\left\{\begin{aligned}
&\{\Pi\}^{\gamma_\nu}_{\delta_\nu}+i'\cdot\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma'_\nu}_{\delta_\nu+\delta'_\nu}+i''\cdot\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma''_\nu}_{\delta_\nu+\delta''_\nu}\\
&+i'\cdot i''\cdot\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma'_\nu+\gamma''_\nu}_{\delta_\nu+\delta'_\nu+\delta''_\nu}+\cdots+i^{(\varrho)}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma^{(\varrho)}_\nu}_{\delta_\nu+\delta^{(\varrho)}_\nu}+\cdots\\
&\cdots+i'\cdot i''\cdots i^{(\varrho)}\cdot\{\Pi\}^{\gamma_\nu+\gamma'_\nu+\gamma''_\nu+\cdots+\gamma^{(\varrho)}_\nu}_{\delta_\nu+\delta'_\nu+\delta''_\nu+\cdots+\delta^{(\varrho)}_\nu}\\
&=\frac{1}{2^\varrho}\cdot\left\{\begin{array}{l}
(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1}\cdot\Pi_1)\cdot\;\cdots\;\cdot(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho}\cdot\Pi_1)\\
+i'\cdot(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma'_1}\cdot\Pi_1)\cdot(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho+\delta'_\varrho}\cdot\Pi_1)\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
+i'\cdots i^{(\varrho)}\cdot(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\cdots\gamma^{(\varrho)}_1}\cdot\Pi_1)\\
\qquad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\Pi_0+(-1)^{\delta_\varrho+\cdots+\delta^{(\varrho)}_\varrho}\Pi_1)
\end{array}\right\}\\
&=\frac{1}{2^\varrho}\cdot\sum_{\varepsilon_\nu;\,\eta_\nu}(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma_\nu-\eta_\nu\delta_\nu)}\cdot\Pi^{\eta_1\cdots\eta_\varrho}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\varrho}\\
&\cdot\left(1+i'(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma'_\nu-\eta_\nu\delta'_\nu)}\right)\cdot\left(1+i''(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma''_\nu-\eta_\nu\delta''_\nu)}\right)\\
&\quad\cdots\left(1+i^{(\varrho)}(-1)^{\sum\limits_\nu(\varepsilon_\nu\gamma^{(\varrho)}_\nu-\eta_\nu\delta^{(\varrho)}_\nu)}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Einen speciellen Fall dieser allgemeinen Formel stellt die Relation (19) dar. Es ergiebt sich diese letztere aus der allgemeinen Formel, wenn alle $\gamma_\nu, \gamma'_\nu, \gamma''_\nu, \ldots \gamma^{(\varrho)}_\nu$ gleich Null und von den $\delta_\nu, \delta'_\nu, \delta''_\nu, \ldots \delta^{(\varrho)}_\nu$ bloss $\delta'_1, \delta''_2, \delta'''_3, \ldots \delta^{(\varrho)}_\varrho$ gleich 1, alle übrigen gleich Null angenommen werden und wenn $i' = i'' \cdots = i^{(\varrho)} = +1$ gesetzt wird.

Die Relationen (22) und (23), insbesondere die zuletzt abgeleitete Relation (23 c), bieten eine bequeme Grundlage, um den Zusammenhang der Thetareihen mehrerer Variablen mit den mehrfachen Integralen algebraischer Functionen darzulegen.

Ich erörtere im Folgenden diesen Zusammenhang unter Beschränkung auf die Thetareihen zweier Variablen und auf Doppelintegrale.

§ 3. Für die Thetareihen zweier Variablen folgt aus (3) folgende Definitionsformel:

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1;\,\mu_2}_{\lambda_1;\,\lambda_2}\begin{pmatrix} a_{11} & u_1 \\ a_{12} & u_2 \\ a_{22} & \end{pmatrix} = \sum_{n_1 n_2} e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1} n_1 + \frac{\mu_2}{m_2} n_2\right)} \\
&\quad\cdot e^{a_{11}(l_1 n_1+\lambda_1)^2 + 2a_{12}(l_1 n_1+\lambda_1)(l_2 n_2+\lambda_2) + a_{22}(l_2 n_2+\lambda_2)^2 + u_1(l_1 n_1+\lambda_1) + u_2(l_2 n_2+\lambda_2)}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Wird in dieser Formel $l_1 = m_1 = l_2 = m_2 = 2$ gesetzt, so stellt dieselbe die 16 Rosenhain'schen Thetareihen dar. Es ist nämlich, wenn

$$
a_{11} = \tfrac{1}{4}\log p\,;\quad a_{22} = \tfrac{1}{4}\log q\,;\quad a_{12} = \tfrac{1}{2}A
$$

gesetzt wird, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$ die Werthe 0 und 1 bedeuten,

$$
\vartheta^{\eta_1;\,\eta_2}_{\varepsilon_1;\,\varepsilon_2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\log p & v \\ \frac{1}{2}A & w \\ \frac{1}{4}\log q & \end{pmatrix} = \sum_{m;\,n} (-1)^{\eta_1 m + \eta_2 n} \cdot p^{\frac{(2m+\varepsilon_1)^2}{4}} \cdot q^{\frac{(2n+\varepsilon_2)^2}{4}}
$$
$$
\cdot\, e^{A(2m+\varepsilon_1)(2n+\varepsilon_2) + v(2m+\varepsilon_1) + w(2n+\varepsilon_2)}
$$

und es ist alsdann nach der von Rosenhain[1]: »Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrals ultra-elliptiques de la première classe« im 3. Capitel gegebenen Definition:

$$
(24\,\mathrm{a})\quad \left\{\begin{array}{llll}
\varphi_{33} = \vartheta^{00}_{00}; & \varphi_{03} = \vartheta^{10}_{00}; & \varphi_{13} = \vartheta^{10}_{10}; & \varphi_{23} = \vartheta^{00}_{10}; \\
\varphi_{30} = \vartheta^{01}_{00}; & \varphi_{00} = \vartheta^{11}_{00}; & \varphi_{10} = \vartheta^{11}_{10}; & \varphi_{20} = \vartheta^{01}_{10}; \\
\varphi_{31} = \vartheta^{01}_{01}; & \varphi_{01} = \vartheta^{11}_{01}; & \varphi_{11} = \vartheta^{11}_{11}; & \varphi_{21} = \vartheta^{01}_{11}; \\
\varphi_{32} = \vartheta^{00}_{01}; & \varphi_{02} = \vartheta^{10}_{01}; & \varphi_{12} = \vartheta^{10}_{11}; & \varphi_{22} = \vartheta^{00}_{11}.
\end{array}\right.
$$

Die Symbole und die mit ihnen gebildeten Formeln (22) erhalten durch die Specialisirung auf zwei Variable folgende Bedeutung:

---

1) Mémoires presentés à l'académie des sciences. t. XI. Paris 1851.

$$
25)\left\{\begin{aligned}
&\{\Pi\}^{\gamma_1\,;\,\gamma_2}_{\delta_1\,;\,\delta_2} = e^{2\pi i\left(\delta_1 \frac{\mu_1}{m_1} + \delta_2 \frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta\begin{array}{c}[\mu_1]+\gamma_1\frac{m_1}{2}\,;\,[\mu_2]+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ [\lambda_1]+\delta_1\frac{l_1}{2}\,;\,[\lambda_2]+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}[u_1]\\ [u_2]\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{array}{c}[\mu_1']+\gamma_1\frac{m_1}{2}\,;\,[\mu_2']+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ [\lambda_1']+\delta_1\frac{l_1}{2}\,;\,[\lambda_2']+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}[u_1']\\ [u_2']\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{array}{c}[\mu_1'']+\gamma_1\frac{m_1}{2}\,;\,[\mu_2'']+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ [\lambda_1'']+\delta_1\frac{l_1}{2}\,;\,[\lambda_2'']+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}[u_1'']\\ [u_2'']\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{array}{c}[\mu_1''']+\gamma_1\frac{m_1}{2}\,;\,[\mu_2''']+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ [\lambda_1''']+\delta_1\frac{l_1}{2}\,;\,[\lambda_2''']+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}[u_1''']\\ [u_2''']\end{pmatrix};\\
&\Pi^{\eta_1\,;\,\eta_1}_{\varepsilon_1\,;\,\varepsilon_2} = e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{[\mu_1]}{m_1} + \varepsilon_2\frac{[\mu_2]}{m_2}\right)}\cdot\vartheta\begin{array}{c}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\,;\,\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,;\,\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{array}{c}\mu_1'+\eta_1\frac{m_1}{2}\,;\,\mu_2'+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1'+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,;\,\lambda_2'+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{array}{c}\mu_1''+\eta_1\frac{m_1}{2}\,;\,\mu_2''+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1''+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,;\,\lambda_2''+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}u_1''\\ u_2''\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{array}{c}\mu_1'''+\eta_1\frac{m_1}{2}\,;\,\mu_2'''+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1'''+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,;\,\lambda_2'''+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{array}\begin{pmatrix}u_1'''\\ u_2'''\end{pmatrix};\\
&4\{\Pi\}^{\gamma_1\,;\,\gamma_2}_{\delta_1\,;\,\delta_2} = \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\,;\,\eta_1\eta_2}(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1+\varepsilon_2\gamma_2-\eta_1\delta_1-\eta_2\delta_2}\,\Pi^{\eta_1\,;\,\eta_2}_{\varepsilon_1\,;\,\varepsilon_2}\\
&= (\Pi_0+(-1)^{\gamma_1}\Pi_1)(\Pi_0+(-1)^{\delta_1}\Pi_1)\\
&\quad(\Pi_0+(-1)^{\gamma_2}\Pi_1)(\Pi_0+(-1)^{\delta_2}\Pi_1)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Die Formel (23 a) nimmt nun folgende Gestalt an:

$$
(25a)\left\{\begin{aligned}
&2\{\Pi\}^{\gamma_1\,;\,\gamma_2}_{\delta_1\,;\,\delta_2} \pm 2\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'\,;\,\gamma_2+\gamma_2'}_{\delta_1+\delta_1'\,;\,\delta_2+\delta_2'}\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1}\Pi_1)\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\quad(\Pi_0+(-1)^{\delta_2}\Pi_1)\\ \pm(\Pi_0+(-1)^{\gamma_1+\gamma_1'}\Pi_1)\cdot\;\cdot(\Pi_0+(-1)^{\delta_2+\delta_2'}\Pi_1)\end{array}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\,;\,\eta_1\eta_2}(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1+\varepsilon_2\gamma_2-\eta_1\delta_1-\eta_2\delta_2}\\
&\cdot\Pi^{\eta_1\,;\,\eta_2}_{\varepsilon_1\,;\,\varepsilon_2}\cdot\left(1\pm(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1'+\varepsilon_2\gamma_2'-\eta_1\delta_1'-\eta_2\delta_2'}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Setzt man $l_1 = m_1 = l_2 = m_2 = 2$, so ist diese Relation der zusammenfassende Ausdruck für *alle* Relationen, durch welche je zwei Producte von je vier Rosenhain'schen Thetareihen acht Producten von je vier Reihen derselben Art gleichgesetzt werden. Relationen dieser Art stellt Rosenhain in der genannten Abhandlung in der Formeltabelle des Anhangs pag. 443—468 zusammen. Aus der hier entwickelten Relation können somit alle jene von Rosenhain angegebenen, sowie die von ihm nicht angegebenen, ausserdem noch möglichen Relationen abgelesen werden.

Wird z. B. vorausgesetzt, dass alle Indices $[\lambda]$ und $[\mu]$ gleich Null seien, so dass

$$\{\Pi\}_{\delta_1;\,\delta_2}^{\gamma_1;\,\gamma_2} = e^{2\pi i\left(\delta_1\frac{\mu_1}{m_1}+\delta_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)} \cdot \vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2};\,\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2};\,\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\left(\begin{matrix}[u_1]\\ [u_2]\end{matrix}\right)$$

$$\cdot\,\vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2};\,\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2};\,\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\left(\begin{matrix}[u_1']\\ [u_2']\end{matrix}\right)\cdot\vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2};\,\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2};\,\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\left(\begin{matrix}[u_1'']\\ [u_2'']\end{matrix}\right)\cdot\vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2};\,\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2};\,\delta_1\frac{l_2}{2}\end{matrix}\left(\begin{matrix}[u_1''']\\ [u_2''']\end{matrix}\right),$$

so lehrt die Formel (25 a), dass jedes der so definirten 16 Producte $\{\Pi\}_{\delta_1;\,\delta_2}^{\gamma_1;\,\gamma_2}$ mit jedem der 15 übrigen Producte durch Addition oder Subtraction verknüpft gleich acht Producten derselben Art gesetzt werden kann. Da diese Producte direct den Producten der Rosenhain'schen Gruppe entsprechen, so heisst das in der Schreibweise Rosenhain's nichts anders als dass z. B. $2\varphi_{33}\cdot\varphi_{33}\cdot\varphi_{33}\cdot\varphi_{33} \pm 2\varphi_{rs}\cdot\varphi_{rs}\cdot\varphi_{rs}\cdot\varphi_{rs}$ gleich acht Producten $\varphi_{r_1s_1}\cdot\varphi_{r_2s_2}\cdot\varphi_{r_3s_3}\cdot\varphi_{r_4s_4}$ gesetzt werden kann. Von diesen Relationen findet sich in der Tabelle Rosenhain's bloss $\varphi_{33}\cdot\varphi_{33}\cdot\varphi_{33}\cdot\varphi_{33} \pm \varphi_{32}\cdot\varphi_{32}\cdot\varphi_{32}\cdot\varphi_{32}$ direct in der angegebenen Weise dargestellt.

Die Relation (23 b) und die für den Fall zweier Variablen mit derselben identische Relation (23 c) schliesslich kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\{\Pi\}^{\gamma_1\,\gamma_2}_{\delta_1\,\delta_2} \pm \{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'\;\gamma_2+\gamma_2'}_{\delta_1+\delta_1'\;\delta_2+\delta_2'}\right] \mp \left[\{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1''\;\gamma_2+\gamma_2''}_{\delta_1+\delta_1''\;\delta_2+\delta_2''}\right.\\ &\qquad\qquad \left.\pm \{\Pi\}^{\gamma_1+\gamma_1'+\gamma_1''\;\gamma_2+\gamma_2'+\gamma_2''}_{\delta_1+\delta_1'+\delta_1''\;\delta_2+\delta_2'+\delta_2''}\right]\\ &\quad = \tfrac{1}{4}\cdot\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\eta_1\eta_2}(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1+\eta_1\delta_1+\varepsilon_2\gamma_2+\eta_2\delta_2}\cdot \Pi^{\eta_1\,\eta_2}_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\\ &\qquad\cdot\left[1\pm(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1'+\eta_1\delta_1'+\varepsilon_2\gamma_2'+\eta_2\delta_2'}\right]\\ &\qquad\cdot\left[1\mp(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1''+\eta_1\delta_1''+\varepsilon_2\gamma_2''+\eta_2\delta_2''}\right], \end{aligned}\right.$$

wo die Zeichen $\pm$ und $\mp$ unabhängig von einander das positive oder negative Vorzeichen bedeuten sollen.

Von wesentlicher Bedeutung wird diese allgemeine Formel, wenn die Indices und die Argumente der in der Formel auftretenden Thetareihen derart specialisirt werden, dass drei der Producte $\{\Pi\}$ den Werth Null annehmen.

Man kann dies erreichen, wenn die Indices $[\lambda_1''']=[\mu_1''']=[\lambda_2''']=[\mu_2''']=0$ und ebenso die Argumente $[u_1''']=[u_2''']=0$ gesetzt werden. Es wird alsdann $\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_1\delta_2}=0$, wenn $\delta_1=\gamma_1=1$ und δ_2, γ_2 der Reihe nach gleich 0, 0; 0, 1; 1, 0 ist oder wenn $\delta_2=\gamma_2=1$ und δ_1, γ_1 der Reihe nach gleich 0, 0; 1, 0; 0, 1 ist, da unter denselben Bedingungen $\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1\frac{m_1}{2} & \gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2} & \delta_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$ ist.

Es können somit in der Relation (26) für jedes $\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_1\delta_2}$ die Indices $\delta_1', \delta_2', \gamma_1', \gamma_2'$; $\delta_1'', \delta_2'', \gamma_1'', \gamma_2''$ so bestimmt werden, dass drei $\{\Pi\}$ den Werth Null haben.

Ist z. B. $\delta_1=\gamma_1=\delta_2=\gamma_2=0$, so setze man $\delta_1'=\gamma_1'=0$; $\delta_2'=\gamma_2'=1$; $\delta_1''=\gamma_1''=\delta_2''=1$; $\gamma_2''=0$ oder man setze $\delta_1'=\gamma_1'=1$; $\delta_2'=\gamma_2'=0$; $\gamma_1''=0$; $\delta_1''=\delta_2''=\gamma_2''=1$. Es ist alsdann:

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \{\Pi\}^{00}_{00} &= \tfrac{1}{4}\cdot\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\eta_1\eta_2}\Pi^{\eta_1\,\eta_2}_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\left[1\pm(-1)^{\varepsilon_2+\eta_2}\right]\cdot\left[1\mp(-1)^{\varepsilon_1+\eta_1+\eta_2}\right]\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\eta_1\eta_2}\Pi^{\eta_1\,\eta_2}_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\left[1\pm(-1)^{\varepsilon_1+\eta_1}\right]\cdot\left[1\mp(-1)^{\varepsilon_2+\eta_1+\eta_2}\right]. \end{aligned}\right.$$

In ähnlicher Weise können alle $\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_1\delta_2}$, die nicht selbst gleich Null sind, durch zwei vierfach bestimmbare Ausdrücke dargestellt werden.

Auf diese Weise erhält man Formeln, die, wenn auch noch $[u_1''] = [u_2''] = 0$ gesetzt wird, das Additionstheorem für die Thetareihen der allgemeinen Gruppe darstellen und es ermöglichen, den Differentialquotienten eines beliebigen Quotienten zweier Thetareihen durch Quotienten von Thetareihen derselben allgemeinen Gruppe auszudrücken.

Setzt man nämlich, abgesehen von den schon festgesetzten Beschränkungen $\lambda_1''' = \lambda_2''' = \mu_1''' = \mu_2''' = 0$, so ist $[\lambda_i] = \lambda_i$; $[\mu_i] = \mu_i$; $[\lambda_i'] = \lambda_i'$; $[\mu_i'] = \mu_i'$; $[\lambda_i''] = \lambda_i''$; $[\mu_i''] = \mu_i''$; ferner ist $u_i' = u_i$; $u_i'' = u_i''' = v_i$ für $i = 1$ und 2 und es stellen somit die Symbole Π folgende Producte dar:

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_2\delta_2} &= e^{2\pi i\left(\delta_1\frac{\mu_1}{m_1}+\delta_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1+\gamma_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\delta_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1'+\gamma_1\frac{m_1}{2} & \mu_2'+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1'+\delta_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2'+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1-\mu_1'+\gamma_1\frac{m_1}{2} & \mu_2-\mu_2'+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1-\lambda_1'+\delta_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2-\lambda_2'+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2} & \gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2} & \delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\\
\Pi^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} &= e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_1}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1'+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2'+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1'+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2'+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1-\mu_1'+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2-\mu_2'+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1-\lambda_1'+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2-\lambda_2'+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Zu den sich in dieser Weise ergebenden Relationen von der Gestalt der Relation (27) treten als ergänzende Relationen

diejenigen, welche aus den sechs Gleichungen $\{\Pi\}_{10}^{10} = \{\Pi\}_{10}^{11} = \{\Pi\}_{11}^{10} = \{\Pi\}_{01}^{01} = \{\Pi\}_{01}^{11} = \{\Pi\}_{11}^{01} = 0$ und den Combinationen dieser Gleichungen folgen. Die Anzahl der Glieder dieser Relationen lässt sich noch wesentlich verringern, wenn in denselben $v_1 = v_2 = 0$ gesetzt wird, da alsdann auch $\Pi_{10}^{10} = \Pi_{10}^{11} = \Pi_{11}^{10} = \Pi_{01}^{01} = \Pi_{01}^{11} = \Pi_{11}^{01} = 0$ zu setzen ist. Dieselben Relationen bringen zugleich die geringst mögliche Anzahl von Thetareihen in Verbindung, wenn $\lambda_i = \lambda_i'$; $\mu_i = \mu_i'$ für $i = 1$ und 2 gesetzt wird. Die Symbole Π haben alsdann folgende Bedeutung:

29)
$$\left\{\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\eta_1 \eta_2} &= e^{2\pi i\left(\varepsilon_1 \frac{\mu_1}{m_1} + \varepsilon_2 \frac{\mu_2}{m_2}\right)} \\ &\cdot \left(\vartheta\begin{matrix} \mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2} \\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{matrix} \eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2} \\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^2 . \end{aligned}\right.$$

Unter den angegebenen Beschränkungen erhält man zunächst sechs Gleichungen, für welche die symbolische Umsetzung des Zeichens $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\eta_1 \eta_2}$ in $\Pi_{\varepsilon_1} \cdot \Pi_{\eta_1} \cdot \Pi_{\varepsilon_2} \cdot \Pi_{\eta_2}$ insoweit benutzt werden kann, dass $\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\eta_1 \eta_2}$ durch $\Pi_{\varepsilon_1}^{\eta_1} \cdot \Pi_{\varepsilon_2}^{\eta_2}$ mit Beachten der Aufeinanderfolge der Factoren dargestellt wird. Zwei derselben sind beispielsweise:

30)
$$\left\{\begin{aligned} \Pi_{10}^{10} &= (\Pi_0^0 - \Pi_1^0 - \Pi_0^1)(\Pi_0^0 + \Pi_1^0 + \Pi_0^1) + \Pi_{11}^{11} = 0 \\ \Pi_{11}^{10} &= (\Pi_0^0 - \Pi_1^0 - \Pi_0^1)(\Pi_0^0 + \Pi_1^0 - \Pi_0^1) - \Pi_{11}^{11} = 0 . \end{aligned}\right.$$

Aus diesen und den übrigen vier Gleichungen ähnlicher Art erhält man durch Addition oder Subtraction 15 Relationen einfachster Art, die bloss je vier Producte Π in Beziehung setzen. So folgt aus den Gleichungen (30):

31)
$$\Pi_{00}^{01} - \Pi_{10}^{01} - \Pi_{00}^{11} + \Pi_{11}^{11} = 0 .$$

Diese Relationen lehren im Hinblick auf die in (29) dargestellte Specialisirung der Symbole Π, dass die geringste Anzahl von Thetareihen einer allgemeinen Gruppe, die in Abhängigkeit von einander gebracht werden können, vier beträgt und dass

diese vier Thetareihen einer und derselben Untergruppe von 16 Reihen:

$$\vartheta\begin{matrix} \mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\,;\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{1} \\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,;\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2} \end{matrix} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2 = 0, 1)$$

angehören.

Wenn nun auch die Differentialquotienten eines Quotienten zweier beliebiger Thetareihen der allgemeinen Gruppe durch Quotienten von Thetareihen derselben allgemeinen Gruppe ausgedrückt werden können, und wenn man folglich auch den aus zwei Quotienten x und y je zweier beliebiger Thetareihen der allgemeinen Gruppe gebildeten Ausdruck:

$$\left(\frac{dx}{du_1}\cdot\frac{dy}{du_2}-\frac{dx}{du_2}\cdot\frac{dy}{du_1}\right)$$

durch Thetaquotienten derselben Gruppe darzustellen vermag, so können doch diese letzteren Thetaquotienten nicht wieder mittelst der oben abgeleiteten Formeln durch die Quotienten x und y ausgedrückt werden, es sei denn, dass die Quotienten x und y aus den Reihen einer und derselben 16-gliedrigen Untergruppe gebildet worden seien.

Zur Herstellung eines Zusammenhangs von Quotienten der allgemeinen Thetareihen mit den Doppelintegralen ist es aber nothwendig, den genannten Ausdruck durch die Functionen x und y selbst auszudrücken.

Es zeigt sich somit, dass es zur Herstellung dieses Zusammenhangs nothwendig ist, sich auf Quotienten von Thetareihen einer 16-gliedrigen Untergruppe zu beschränken, da die im Vorhergehenden abgeleiteten Relationen zwischen den Thetareihen einer allgemeinen Gruppe nur unter dieser Beschränkung zum Ziele führen.

Der Zusammenhang der *Thetareihen der 16-gliedrigen Untergruppe* mit den Doppelintegralen soll demgemäss in einer nachfolgenden Arbeit dargelegt werden.

SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1892.

Hermann Credner, *Ueber die geologische Stellung der Klinger Schichten.* **Mit 2 Figuren.**

Die diluvialen Thonmergel und die Torfablagerungen von Klinge bei Cottbus, sowie die in ihnen enthaltenen Thier- und Pflanzenreste, mit welchen A. Nehring neuerdings die Wissenschaft durch eine grössere Anzahl von Publicationen bekannt gemacht hat[1]), haben die besondere Aufmerksamkeit weiterer geologischer Kreise auf sich gezogen. Und in der That besitzen dieselben eine grosse Bedeutung für die Geologie des nordeuropäischen Glacialgebietes, obschon bis dahin die genaue Stellung dieses Schichtencomplexes innerhalb der Diluvialformation mit Sicherheit noch nicht ermittelt war. Letzteres beruht zunächst darauf, dass sich die in jenen Schichten vorhandenen organischen Reste als zu neutral, also für diesen Zweck untauglich erwiesen, indem sie keine Entscheidung darüber lieferten, ob sie und die sie bergenden Lagerstätten der präglacialen oder einer interglacialen Zeit entstammen.

Unter solchen Verhältnissen wird der Geologe behufs specieller Altersfixirung des fraglichen Schichtencomplexes auf die Ausnutzung der Verbandsverhältnisse des letzteren, also auf die Altersbestimmung mit Hülfe von Lagerungsbeziehungen verwiesen. Dass auch die Beschreitung dieses Weges bis dahin zu endgültigen Resultaten nicht geführt hatte, geht daraus hervor,

---

1) Sitzungsber. d. Ges. nat. Freunde. Berlin 1891. S. 151, S. 190; 1892 S. 3, S. 27. — Verh. d. Berl. anthrop. Ges. 1891 S. 883. — Naturw. Wochenschrift 1892 Nr. 4, Nr. 24 u. 25. — Ausland 1892 Nr. 20. — Botan. Centralbl. 1892 Nr. 30. — Zeitschr. d. Deutsch. geol. Gesellsch. 1892 S. 371.

dass sich A. Nehring auch in seinen letzten Publicationen zwischen präglacialer (also jungpliocäner) und interglacialer Stellung der Klinger Schichten noch nicht entscheiden konnte, bald mehr der einen, bald mehr der anderen Anschauung zuneigt und zwischen einer Parallelisirung mit den Utznacher Schichten der Schweiz und dem Cromer Forest Bed Englands schwankt.

Um, wenn irgend möglich, die noch offene Frage nach dem speciellen Niveau der Klinger Schichten ihrer Beantwortung näher zu führen, stattete ich am 22. und 23. August d. J. den dortigen Thongruben einen Besuch ab, dessen Erfolg durch die zuvorkommende Unterstützung der Betriebsbeamten jener Ziegeleien, der Herren Kayser und Schmidt, wesentlich gefördert wurde.

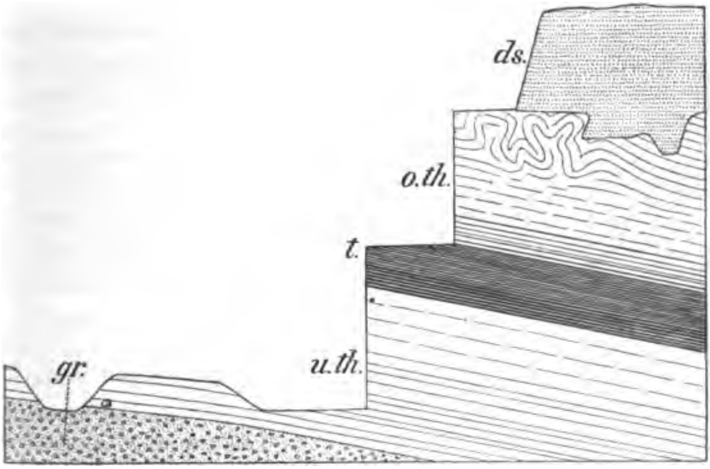
Erst nach Niederschrift der dort gewonnenen Resultate und Anschauungen geht mir das neueste Heft der Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft zu, in welchem H. Keilhack S. 369—371 über seinen Besuch von Klinge berichtet, eine tabellarische Gliederung des dortigen Schichtencomplexes giebt und constatirt, dass derselbe von Diluvialsand unterteuft und von »nordischen Geschiebesanden« überlagert werde, also zweifellos diluvial sei, wenn auch seine interglaciale oder altdiluviale Stellung noch unentschieden bleibe. Trotzdem scheint es Nehring auch dann noch, dass gewisse Gründe für ein präglaciales Alter der Klinger Schichten sprechen, in welchem Falle das dortige Torfflötz »ein Aequivalent des englischen Cromer Forest Bed darstellen dürfte« (l. c. S. 377).

Die Verbands- und Lagerungsverhältnisse der Klinger Schichten.

Im Osten der Stadt Cottbus beginnt das Terrain ganz allmählich in sanftester Böschung den weit ausgedehnten Thalboden der Spree zu überhöhen, fast unmerklich hebt sich das flache, bei seiner Durchkreuzung beinahe horizontal erscheinende Gelände, in etwa 10 km Erstreckung kaum 16 m emporsteigend zu jener Hochfläche, auf welcher die neuerdings in der Diluvialliteratur so vielgenannten Thongruben von Klinge angesetzt sind. Und auch auf ihr bis zu weiter Entfernung kein Hügel, keine Unterbrechung der Ebenheit, nur hier und dort eine flache haufenförmige Düne von Flugsand zwischen den local mit Birken gemischten Kiefernbeständen, welche mit den Feldflächen abwechseln.

Die Aufschlüsse in der Schulz'schen Thongrube.

Nur wenig nördlich von der Eisenbahnlinie Cottbus-Sorau und deren Station Klinge liegt der ausgedehnte und tiefe Tagebau der Schulz'schen Ziegelei, dessen Wände die mehrfach von Nehring beschriebene und jüngst von Keilhack aufgezählte Schichtenreihe im Profile blosslegen. Die Wiederholung und Aufzählung aller der Einzelbänke, welche sich in dem dortigen Complex von Thonmergeln und Torf unterscheiden lassen, ist für



Figur 1.

Profil durch die im südlichen Theile der Schulz'schen Thongrube bei Klinge aufgeschlossenen Diluvialgebilde.

gr = sandiger Grand; *u. th* = unterer Thonmergel; *t* = Torfflötz, zu unterst Lebertorf; *o. th* = oberer Thonmergel, zu unterst mit dünnen Lagen von Torf, im nördlichen Theile des Tagebaues zu oberst mit einer wolkig begrenzten humosen bis torfigen Einlagerung; *ds* = Decksand.

unsere Zwecke überflüssig. Vom rein geologischen Standpunkte aus repräsentiren die von den Steilwänden in terrassenförmigem Abbau angeschnittenen und von ihnen freigelegten Schichten (vgl. Figur 1) zwei Stufen, die untere derselben mit drei Horizonten:

1) Die Klinger Schichten.

a. unterer grünlichgrauer *Thonmergel* (*u. th* des umstehenden Profils), zu unterst mit ausserordentlich regelmässiger Bänderung und Bankung, 2—3 m mächtig (NEHRING's Schicht 8);

b. ebenfalls schichtig gesonderter *Torf* (*t* des Profils), zu unterst sogen. Lebertorf, 1—1,5 m mächtig (NEHRING's Schicht 7 und 6);

c. oberer graugelber *Thonmergel* (*o. th* des Profils), etwa 4 m mächtig, zu unterst durch dünne vegetabilische Lagen schwarz gebändert oder liniirt (NEHRING's Schicht 5 und 4), nach oben zu local innig gemengt mit pflanzlicher Masse, welche sich im nördlichen Theile des Tagebaues zu reinerem Torfe anreichert und dann das in seinem Auftreten und seiner Mächtigkeit ganz unbeständige, sogenannte obere Flötz der Schulz'schen Thongrube bildet.

Dieser einheitliche Complex von drei, insgesammt 7—8 m mächtigen, concordant und innigst mit einander verknüpften Gliedern, dem liegenden und hangenden Thonmergel und dem eingelagerten Torf, wird nach oben zu abgeschnitten und discordant überlagert vom:

2) Decksand (*ds* des Profils),

einem weissen bis hellgelben, dünnschichtigen Sand (NEHRING's Schicht 1 und 2).

Aus dem *liegenden Thonmergel a* stammt die von NEHRING beschriebene Geweihstange eines Riesenhirsches von alterthümlichem Typus (Cerv. megaceros var. Ruffii Nehr.), ferner ein Paar Unterkiefer eines Fuchses und zwar wahrscheinlich Eisfuchses, sowie eine Anzahl Knochenreste des Rhinoceros und des Elches. Seiner obersten Lage sind Skelete von Fischen (Schleie) und einer Sumpfschildkröte entnommen worden. Das *Torfflötz* selbst setzt sich aus Resten der von NEHRING, WITTMACK, WARNSTORF und C. WEBER untersuchten, von ersterem zuletzt im Botan. Centralbl. 1892 Nr. 30 aufgezählten Pflanzenarten zusammen, welche auf ein gemässigtes Klima hinweisen und auch heute noch in Deutschland vorkommen. Nur eine Species, Cratopleura helvetica Web., ist sicher in Europa ausgestorben. Gleiches gilt wahrscheinlich von denjenigen beiden Pflanzen, welche die bisher unbestimmbaren »wurstförmigen Früchte« sowie die kleinen

»metallisch glänzenden Samen« im Klinger Torfe geliefert haben. Die Samen von Cratopleura werden in den interglacialen Schieferkohlen von Dürnten und in dem Torflager von Gross-Bornholdt in Holstein, die wurstförmigen Früchte in dem präglacialen Cromer Forest Bed sowie in einer jüngeren Diluvialablagerung Suffolks in grosser Zahl gefunden. Die *hangenden Thonmergel c* bergen nach Nathorst zu unterst Früchte und Zapfenschuppen von Betula adorata und Bet. nana, weiter oben ausschliesslich Reste von letzterer, jedoch sämmtlich angeschwemmt und auf secundärer Lagerstätte.

Von allen durch den Schulz'schen Tagebau aufgeschlossenen Schichten wird man sich, um die Altersbestimmung des Thonmergel-Torfcomplexes auf stratigraphischem Wege zu erzielen, zunächst den obersten, jenen discordant abschneidenden *Sanden* zuwenden. Dieselben heben sich in Folge ihrer lichten, fast schneeweissen Farbe scharf von ihrem Liegenden, dem oberen Thonmergel, ab. Ihre Auflagerungsfläche auf diesem ist streckenweise eine höchst unregelmässige (vgl. Fig. 1), indem der Sand graben- und sackförmig, ja in flach geneigten Ausläufern apophysenartig in die Thone eingreift. Zugleich zeichnet er sich durch eine ausserordentlich feine Schichtung aus, deren horizontale Ebenflächigkeit nur hier und dort durch zierliche Undulationen unterbrochen wird. Ihm sind stellenweise schlank linsenförmige Nester und Schmitzen, sowie dünne Lagen eines Grandes eingeschaltet, welcher fast ausschliesslich aus weissen Quarzkieseln zusammengesetzt wird und vereinzelte Splitter und kleine Stücke von Feuerstein enthält. Ich selbst habe innerhalb des anstehenden feinschichtigen Decksandes, obwohl er an den Wänden des Tagebaues für grosse Erstreckung frisch aufgeschlossen war, kein einziges Geschiebe erblicken können, dahingegen hat Nehring demselben bei seinen früheren Besuchen zahlreiche bis faustgrosse Geschiebe entnommen [1]. E. Dathe, der durch seine frühere Thätigkeit als Geolog der Landesuntersuchung von Sachsen auch mit dem Habitus der Lausitzer Gesteinsvarietäten vertraut ist, stellte die südliche Herkunft eines Theiles dieser Geschiebe fest, während sich der Rest als nordisch ergab (l. c. S. 234). Einzelne derselben besassen typische Dreikanterform.

Wenn Nehring glaubt, diese Sande auf Grund seiner Be-

---

1) Naturw. Wochenschrift 1892. Nr. 24, S. 234.

obachtungen als »*Geschiebe*sand« bezeichnen zu dürfen und sie »als Producte des Schmelzwassers der letzten Eiszeit betrachtet«, so steht dem zunächst die Thatsache entgegen, dass dieselben nicht nur nordische, sondern auch solche Geschiebe führen, welche von Süden und zwar aus mindestens 75 km südlicher Entfernung stammen. Ferner besitzt das Vorkommen der im Geschiebesande der Mark und anderer Gegenden so häufigen Kantengeschiebe im Klinger Decksande keinerlei Beweiskraft für dessen Zugehörigkeit zu irgend einem Formationsgliede, bekundet vielmehr nur, dass die betreffenden Gerölle und Geschiebe längere Zeit hindurch äolischer Einwirkung ausgesetzt gewesen sind. Auch die Vermuthung Nehring's (l. c. Nr. 25, S. 245), dass die wellenförmigen Lagerungsverhältnisse des unteren Thones und des Torfflötzes »durch den Druck des sich vorschiebenden Binnenland-Eises der zweiten Eiszeit verursacht worden seien« entbehrt der Berechtigung: die Lagerungsform dieser Schichten ist vielmehr die ursprüngliche, durch die Configuration des Untergrundes bedingte.

Bei dem später anzustellenden Vergleiche der Diluvialablagerungen von Klinge mit denen der sächsischen Lausitz wird auf diesen Decksand zurückzukommen sein.

Wenden wir uns nun zur Untersuchung des *Liegenden* der Klinger Schichten.

Da der Zweck des Tagebaues mit der Gewinnung des unteren Thonmergels zur Ziegelfabrikation erfüllt ist, so reicht die Sohle der Grube fast nirgends unter diejenige des abzubauenden Thones hinab. Das Liegende des letzteren ist also nicht angeschnitten. Nach Nehring wird dasselbe zunächst gebildet von einer groben, gelblichen Kiesschicht, die oft conglomeratartig zusammengebacken ist. Diejenige Probe dieses Kieses, welche mir Herr Prof. Dr. Nehring im Mai d. J. zur Beurtheilung übersandte, bestand ausschliesslich aus kleinen Quarzgeröllen und enthielt nicht einen einzigen Splitter von Feuerstein oder sonstigem nordischem Material. E. Dathe hingegen »fand in einigen Stücken des kiesigen Conglomerates, welche ihm Prof. Nehring vorlegte, eine Anzahl abgerundeter Steinchen, denen er mit Bestimmtheit eine nordische Herkunft zuschrieb« (l. c. S. 245).

Die definitive Entscheidung, ob sich das Liegende der Klinger Schichten als diluviale oder aber als präglaciale Ablagerung erweisen würde, war aus dem Grunde von besonderer Trag-

weite, weil in ersterem Falle alle wiederholt ausgesprochenen Vermuthungen einer Aequivalenz der Klinger Torfflötze mit dem jungpliocänen Cromer Forest Bed Norfolks mit einem Schlage hinfällig werden mussten.

Durch gefällige Vermittlung des Verwalters der Schulz'schen Ziegelei, des Herrn Kayser, liess ich in einem Graben auf der Sohle des Tagebaues und zwar direct an der Basis der flach nach W. einfallenden Bänke des gebänderten, unteren Thonmergels mehrere kleine Schurflöcher herstellen (bei *gr* Fig. 1). Schon der Aushub der ersten Spatenstiche war entscheidend: der hierbei angetroffene sandige, bald graue, bald intensiv gelbbraune Grand erwies sich zwar als vorwiegend aus Körnern und Kieseln von Quarz bestehend, aber *so reich an Feuersteinen, sowie an erbsen- bis taubeneigrossen Geröllen von rothen oder bunten nordischen Gesteinen*, dass ich dem ausgestochenen Grand im Zeitraume von weniger als einer Viertelstunde Dutzende derselben entnehmen konnte. Dem nordischen war jedoch auch zweifellos *südliches*, namentlich granitisches Material beigemengt.

Bei dem zu unserer Schürfung erforderlichen Abräumen der das directe Hangende dieser Diluvialgrande bildenden Basisschichten des unteren Thonmergels wurde diesem ein fast kopfgrosses Geschiebe eines dichten, röthlichen Quarzites von ausgezeichneter Dreikanterform entnommen. Es stimmt dies mit der Beobachtung Nehring's überein, nach welcher in diesen unteren Thonmergeln hier und da grössere Blöcke vorkommen, die ich jedoch auf Grund der mir übersandten Proben zum Theil für lausitzer Herkunft halte.

Nach Obigem ergiebt sich für das Diluvium des Schulz'schen Tagebaues folgendes Profil:

Decksand bis 2,5 m mächtig.

Discordanz.

Klinger Schichten (Thonmergel mit eingelagertem Torf), bis etwa 7,5 m mächtig.

Diluvialgrand, reich an nordischem, jedoch auch mit lausitzer Material. In ihm local noch eine tiefere Einlagerung von Thon.

Was nun die Lagerungsverhältnisse der Klinger Schichten betrifft, so sind dieselben durchaus diejenigen einer *muldenförmigen Einlagerung* innerhalb einer trogartigen Vertiefung im Diluvialgrand, über welche beide sich der Decksand

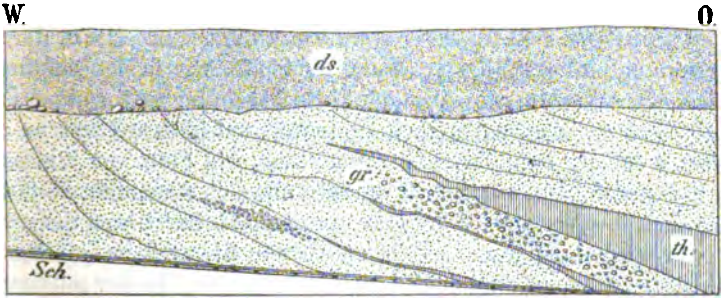
discordant ausbreitet. Der derzeitige Abbau in der Schulz'schen Grube steht nahe der Muldensohle, von welcher aus sich der östliche und westliche Muldenflügel, wie dies der Abbau auf ersterem, ferner die in systematischer Vertheilung zur Untersuchung der Thonablagerung geschlagenen Bohrlöcher beweisen, mit 25—30° auf den unterlagernden Sanden und Granden herausheben und sich gleichzeitig auskeilen, wobei das Torfflötz zugleich in einen humosen, bräunlichen Thon übergeht. Die Breite dieser Mulde soll nach mir an Ort und Stelle gegebener Auskunft nur 150—160 m betragen, ihre nord-südliche Erstreckung hingegen viel beträchtlicher sein. In ihrer nördlichen Fortsetzung ist die sich an die Schulz'sche anschliessende alte Dominial-Thongrube angesetzt. Sowohl im Querschnitte, als namentlich auch in der Längsachse dieser langgestreckten, schmalen Mulde machen sich mehrfache Undulationen geltend, die von Unregelmässigkeiten des Untergrundes herrühren und sich deshalb vorzugsweise in den liegenden Muldenschichten geltend machen, sich aber nach oben zu bereits ausgeglichen haben. Mit Glacialschub »während der zweiten Eiszeit« (siehe oben S. 390) hat dieser flach wellenförmige Schichtenverlauf durchaus nichts zu schaffen.

Ganz anderer Art sind die zum Theil fast gekrösartig verschlungenen Windungen, welche der hangende dünngebänderte Thonmergel (1, *c* S. 388) nahe seiner vom Decksand unregelmässig abgeschnittenen Oberfläche aufweist (siehe Fig. 1). Sie ähneln den mehrfach aus dem norddeutschen Vereisungsgebiete beschriebenen Glacialstauchungen so sehr, dass ich sie ohne Bedenken auf die gleiche Ursache zurückgeführt haben würde, wenn ich nicht seitdem an verschiedenen Stellen, welche zweifellos keine Eisbedeckung getragen haben, gesehen hätte, wie sich plastische Thone und Mergel z. B. der oberen Kreideformation unter einer Bedeckung von Flussschotter in ganz ähnlicher Weise aufbäumen können.

Die Aufschlüsse in der neuen Dominial-Thongrube.

Wandert man vom Schulz'schen Tagebau aus nach Osten, so überschreitet man zunächst den freilich hier vom Decksand verhüllten, aber durch Bohrungen bis zu seinem Auskeilen verfolgten östlichen Flügel der beschriebenen Mulde, überquert

den sich übrigens topographisch kaum markirenden Grandrücken zwischen dieser und der nächsten Thonmulde und gelangt dann in die auf dieser letzteren angesetzte neue Dominial-Thongrube. In diese führt ein mit Schienengeleis versehener, bis 2 m tiefer Einschnitt hinab (vergl. Fig. 2).



Figur 2.

Profil in dem zur neuen Dominial-Thongrube bei Klinge hinabführenden Einschnitt.

gr = sandiger Grand, local mit Nestern von grobem, kiesigem Grand; *th* = Thonmergel; *ds* = Decksand, stellenweise mit kiesiger Steinsohle. *Sch* = Schienengeleis.

Derselbe steht zunächst nur in den Sanden und Granden des Trennungsrückens. Der Sand und die Grundmasse des Grandes enthalten viel Feldspathfragmente, die jedoch nicht frisch und glänzend, sondern bereits matt und von der Kaolinisirung ergriffen erscheinen, was an diejenigen Sande erinnert, zu denen die leicht verwitternden Lausitzer Granite Material beigesteuert haben. Die Grande (*gr* des beistehenden Profils 2) zeichnen sich durch grossen Reichthum an gelben und schwarzen Feuersteinen aus, die als kleinste Splitter und Scherbchen auch den Sanden beigemengt sind und führen ausser vielen weissen Quarzen zahlreiche wohlgerundete Gerölle *doppelter, nämlich nördlicher und südlicher Herkunft.* Unter ersteren machen sich Dalaquarzite, Aalander Rapakivis, Hälleflinten, rothe sogenannte Elfdalener Porphyre, verschiedenartige Gneisse bemerklich; ihnen gesellen sich in reichlicher Beimischung Lausitzer Granite (und zwar wohl meist aus den Königshainer Bergen und dem Iser-

gebirge), Phyllitquarze mit chloritischen Flammen, weissgeäderte Kieselschiefer, sowie Rollstücke von Quader bei. Es repräsentiren somit diese Grande ganz wie diejenigen im Liegenden der mit der Schulz'schen Grube abgebauten Mulde (S. 391) keine reine Glacialablagerung, sondern ein *fluviatiles Mischgebilde*.

Die zunächst ziemlich steile Neigung ihrer Schichten wird nach Osten zu flacher und *hier schieben sich zwischen letztere die sich spitz auskeilenden Ausläufer eines grauen Thonmergels ein*, deren oberster und mächtigster (*th* des Profils 2), wie in den continuirlichen Aufschlüssen ohne jede Unterbrechung zu verfolgen ist, ziemlich rasch an Mächtigkeit zunimmt, und in dem Tagebau, zu welchem der Bahneinschnitt hinabführt, ein Flötz von 2 m und schliesslich von 3 m Stärke bildet, um sich nach den Mittheilungen des Verwalters der Dominialziegelei, des Herrn Schmidt, bald wieder auf einem zweiten östlichen Kiesrücken »jählings« heraus zu heben und sich hierbei auszukeilen. In der mittleren Zone dieser Mulde bildet der hangende Sand, unter welchen sich das spitz keilförmige Ausgehende des Thonflötzes einschiebt, nur noch isolirte Kessel und schmitzförmige Nester, stellt sich aber nach Osten zu wieder in grösserer Mächtigkeit über dem Thone ein. Durch mehrere kleine bis jenseits der Mitte der Thongrube von uns ausgeführte Schürfungen wurde erwiesen, dass auch hier das Liegende des Thonmergels von dem nämlichen feuersteinführenden, schwach grandigen Sande gebildet wird, ganz analog dem Befunde in der Schulz'schen Thongrube (S. 391). Gleichzeitig aber stellen sich auch inmitten des grauen, ausserordentlich scharf und zierlich dunkel gebänderten Thonflötzes selbst einzelne dessen Bänderung und bankartiger Absonderung conforme Schmitzen von feuersteinführendem Sand ein.

Im südlichen Theile des Tagebaues lagert sich das *Torfflötz* dem Thone auf, wiederum stellenweise von ihm getrennt durch eine dünne Lage von Grand.

Ueber das Ganze zieht sich discordant der weisse, fein- und horizontalschichtige *Decksand*, dessen untere Grenze sich streckenweise durch eine grandige Steinsohle noch schärfer markirt (*ds* des Profils).

Aus obigen Beobachtungen ergiebt sich:

1) dass der Thonmergel-Torf-Complex jenseits des Kiesrückens im Osten der Schulz'schen Mulde eine zweite, von dieser

durch eben diese Grande getrennte enge Mulde bildet (wobei jedoch die Möglichkeit derer Vereinigung in ihrer etwaigen nördlichen Fortsetzung nicht ausgeschlossen ist);

2) dass dieser Diluvialgrand neben Feuerstein und Geröllen von echt nordischen Gesteinen auch noch, und zwar z. Th. sogar reichlich, Material enthält, welches von aus dem *Süden* kommenden Strömen zugeführt sein muss;

3) dass derselbe nicht nur den Trennungsrücken zwischen beiden Mulden und deren continuirliches Liegendes bildet, sondern auch über die Thone der östlichen Dominial-Mulde übergreift und sich hier sogar zwischen sie, sowie unter das Torfflötz einschiebt;

4) dass nach diesen Thatsachen die Klinger Schichten durch auskeilende Wechsellagerung mit den fluviatilen Diluvialsanden und -granden in engster Verknüpfung stehen und deshalb mit dem obersten Horizonte derselben gleichalterig sein müssen.

Beim Versuche der *Fixirung des speciellen geologischen Alters dieser Flussablagerungen* sehen wir uns durch deren südliches Geröllmaterial darauf hingewiesen, im *Süden* nach einem Ausgangspunkte und nach Anknüpfungen zu suchen.

Das Lausitzer Schotter- und Decksand-Gebiet[1]).

Zwischen den ausgedehnten Gebieten des unteren Geschiebemergels im Westen und im äussersten Osten Sachsens, die sich einerseits von Leipzig-Grimma, anderseits von Görlitz aus noch weit nach Süden erstrecken, schiebt sich östlich der Elbe und zwar von der nördlichen Abdachung des Lausitzer Granitgebirges aus eine 70 bis 80 km breite Zunge diluvialer Gebilde nach Norden vor, an derem Aufbau sich die lehmig-mergelige nordische Grundmoräne in nur verschwindendem Maasse betheiligt. Dem gegenüber gelangen die Ablagerungen der Schmelzwässer des Eisrandes und der diesen von Süden her an-

1) Das Lausitzer Schotter- und Decksand-Gebiet ist zur kartographischen und textlichen Darstellung gelangt auf folgenden Blättern der geologischen Specialkarte des Königr. Sachsen, sowie in den zugehörigen Erläuterungen: Section Stolpen von E. Geinitz und G. Klemm; Sect. Neustadt, Sect. Pillnitz von G. Klemm; Sect. Schirgiswalde, Sect. Bischofswerda, Sect. Radeburg, Sect. Pulsnitz, Sect. Königsbrück, Sect. Marienstern, Sect. Schönfeld von O. Herrmann; Sect. Radeberg, Sect. Kamenz, Sect. Strassgräbchen und Sect. Schwepnitz von E. Weber.

fänglich gleichzeitig zufliessenden, dann auf dem eisfrei gewordenen Abschmelzfelde ihren Weg suchenden Ströme fast zur Alleinherrschaft. Das dortige Diluvium aus der Zeit der am weitesten nach Süden reichenden Invasion des Inlandeises und der folgenden Abschmelz- und Ueberfluthungsperiode setzt sich deshalb fast ausschliesslich aus mächtigen Complexen von mit einander innig verwobenen Sanden, Granden, Kiesen und grobem Rollschutt (*altdiluvialen Schottern*) zusammen, während der normale Geschiebelehm und mehr noch der Geschiebemergel nur ganz sporadisch und dann meist in höchst geringfügiger Ausdehnung, zuweilen in Form von Nestern, Schmitzen und plumpen bankartigen Einlagerungen zwischen oder unter den Schottern zur Entwicklung gelangt oder erhalten geblieben ist. Unter den letztgenannten Ablagerungen spielen solche von ausschliesslich nordischem oder rein nördlichem Materiale, also von echter, durch die Schmelzwasser ihrer thonigen und feinsandigen Theile beraubter Grundmoräne, nur eine zurücktretende Rolle. Die Structur derselben ist dann z. Th. eine chaotische, z. Th. eine regellos geschichtete. Geschliffene und geschrammte Geschiebe selbst von erst in Nordsachsen aufgenommenen Gesteinen sind in ihnen nicht selten. Durch Uebergänge ist dieser Glacialschutt einerseits mit einer stark sandig-grandigen, bankartig geschichteten, also ebenfalls stark durchwässerten Facies des Geschiebelehmes, — anderseits und zwar durch reichliche Aufnahme von Geröllen einheimischen und südlichen Materials mit den wohlgeschichteten benachbarten und z. Th. gleichalterigen Schottern verknüpft. Letztere sind es, welche der Hauptmasse nach das ganze Diluvialgebiet der Nordlausitz mit den Städten Bautzen, Bischofswerda, Stolpen, Pulsnitz, Radeberg, Radeburg, Königsbrück, Ortrand, Kamenz, Wittichenau und Königswartha zusammensetzen.

Das Charakteristische aller dieser in ihrer innigen Vergesellschaftung als *altdiluviale Schotter* bezeichneten Sande, Grande und groben Kiese ist ihre Zusammensetzung aus einem Gemische von nordischem oder nördlichem (also *glacialem*) mit einheimischem, sowie aus dem Süden stammendem (also *fluviatilem*) Material. Die Gerölle dieser zum grössten Theile wohlgeschichteten, auf weite Flächen vollkommen horizontal gelagerten Schotter sind fast durchweg ausgezeichnet, z. Th. geradezu kugelig gerundet. Das in seiner Menge sehr schwankende, oft

sehr zurücktretende, zuweilen aber auch reichliche nordische Material wird in erster Linie von Feuerstein, ferner von den unverkennbaren Dalaquarziten, Scolithussandsteinen, Rapakivis, Elfdalener Porphyren, bunten Gneissen und Graniten sowie von Amphiboliten gebildet. Dem Felsuntergrunde der Nachbarschaft, z. Th. auch dem südlich angrenzenden Lausitzer Gebirge entstammen die monotonen Varietäten des Lausitzer Hauptgranites, Diabase, untersilurische Grauwacken und die charakteristischen Contactgesteine der letzteren. Zu beiden gesellen sich und zwar namentlich im westlichen Theile dieses Gebietes, durch die Flüsse der ältesten Glacialzeit aus Süden oder Südosten herbeigeführt: silurische Kieselschiefer, porphyrische Basalte, Phonolithe und Quadersandsteine Nordböhmens oder der Südlausitz, deren Geschiebe sich selbst noch an der Nordgrenze Sachsens einen Durchmesser von 0,3 bis 0,5 m bewahrt haben können. Hierzu treten überall, z. Th. vorwiegend weisse Quarzkiesel aus der Braunkohlenformation.

Das Mischungsverhältniss aller dieser Gerölle von verschiedener Herkunft ist je nach der Reichlichkeit des nordischen Materiales und je nach der Zugehörigkeit der Schotterablagerungen zu einem der zahlreichen von Süden her eingreifenden altdiluvialen Flussgebiete (der Elbe, Pulsnitz, Elster, des Schwarzwassers, der Spree, Neisse) ein sehr schwankendes, im Allgemeinen aber herrschen neben Tertiärquarzen jedenfalls Lausitzer Granite, in gewissen Arealen auch Lausitzer Grauwacken und deren Contactproducte vor und ihre Mischung mit dem nordischen Materiale ist es, welche in erster Linie den Gesammthabitus dieser Schotter kennzeichnet.

Nach Norden zu wird das Lausitzer Schotterareal von einem bis über 10 km breiten, fast vollkommen horizontalen, von Thalsanden und -lehmen ausgekleideten *jungdiluvialen Strombette* abgeschnitten, welches sich ungefähr die nördliche Grenze Sachsens entlang von Osten bis zu der bei Strehla sogar 14 km breiten Fläche einer gleichalterigen Elbthalebene zieht und sich mit dieser nordöstlich von letztgenannter Stadt (bei Frauenhain auf Section Collmnitz) vereint. Dass aber die nämlichen altdiluvialen Schotter auch jenseits dieser jungdiluvialen Thalfläche noch weiter nach NW. und N. fortsetzen, dass sich also letztere in das nordlausitzer Schotterfeld eingeschnitten hat, beweist der Umstand, dass die Kiese und Grande des nördlichen Steilufers

dieses weiten Thales z. B. bei Plessa, Elsterwerda und Liebenwerda ebenfalls noch Gerölle und grössere Geschiebe von Grauwacke, Granit, Basalt, Phonolith und Quader führen.

Eine ähnliche, nur durch die mehr nordwestliche Richtung der Materialzuführung in ihrer Art modificirte Beimischung von südlichen Flussgeröllen ist es, welche den kiesigen Sanden im Liegenden und Hangenden der Klinger Schichten ihren gegenüber den rein nordischen Granden eigenartigen Habitus aufprägt. Dieser sowie die Thatsache, dass dortselbst ein Geschiebemergel nirgends beobachtet worden ist[1]), macht es in hohem Grade wahrscheinlich, dass die Grande der Hochfläche zwischen Spree und Neisse bei Cottbus die nördliche Fortsetzung der Lausitzer Randfacies des Altdiluviums vorstellen, also dem durch fluviatile Beisteuer und Umlagerung modificirten Abschmelzfelde der *ersten und ausgedehntesten Eisinvasion Norddeutschlands angehören.* Die mit dem obersten Horizonte dieser Sand- und Grandablagerungen durch auskeilenden Wechsel verknüpften *Klinger Schichten besitzen das gleiche Alter wie jene.* Die von ihnen ausgefüllten, langgestreckten Mulden mögen *todte, versumpfte Flussarme* repräsentiren, in denen sich vegetabilische Massen anhäuften und Trübtheile der Hochwasser absetzten[2]).

---

1) Nach Analogie mit dem Lausitzer Diluvium ist jedoch die Möglichkeit seines localen Auftretens zwischen den Granden durchaus nicht ausgeschlossen.

2) Darüber, dass das Pflanzenmaterial der z. Th. nur papierdünnen Torflagen, welche den Thonmergeln im Hangenden des Torfflötzes der Schulz'schen Thongrube eine haarscharfe schwarze Bänderung und Liniirung verleihen (Seite 388; 1 c), ferner dasjenige des humosen Thones, welches sich local im obersten Niveau der hangenden Thonmergel einstellt und bei besonderer Anreicherung mit pflanzlicher Substanz als oberes Torfflötz bezeichnet wird (l. c.), — darüber, dass dieses Pflanzenmaterial nicht an Ort und Stelle gewachsen, sondern durch Strömungen angeschwemmt ist, herrscht kein Zweifel.

Gleiches aber scheint mir auch von den Fragmenten und Früchten der Holzgewächse im unteren (eigentlichen) Torfflötze von Klinge (S. 388; 1b) *zu gelten.*

C. WEBER entwirft in der Naturw. Wochenschrift 1892 Nr. 4, S. 33 von der Bildungsstätte des Klinger Torfflötzes folgendes Vegetationsbild: »Es war dort ein Sumpf, vielleicht ein See mit flachen, sumpfigen Ufern. Letztere waren bedeckt von einem Gebüsch von Birken, Weiden, Hainbuchen und verkümmerten Fichten; dazwischen standen einzelne stattlichere Bäume der letzten Art, ferner spärliche Haseln und Espen.« Einer ähnlichen Vorstellung verleiht NEHRING im Ausland 1892, Nr. 20,

Der hohe Kalkgehalt der auf letztere Weise entstehenden, die Pflanzenaccumulate hermetisch abschliessenden Thone dürfte auf den Kalkreichthum des durch die Gewässer zerstörten und ausgeschlämmten Geschiebemergels zurückzuführen sein.

Uebrigens fehlen auch dem Lausitzer Abschmelz- und Schotterareale ganz analoge Einlagerungen von Thonsand, Thon und kalkhaltigem Bänderthon nicht gänzlich, wenn auch in ihnen bis jetzt nirgends pflanzliche Reste beobachtet worden sind.

Ausser dem, wie sich gezeigt hat, altdiluvialen Complex von Sanden und Granden mit muldenförmig eingelagerten Thonmergeln nebst Torfflötz kommt jedoch behufs specieller Fixirung der dort herrschenden Altersverhältnisse noch eine zweite Ablagerung des bei Klinge aufgeschlossenen Diluviums in Betracht: *der dünn- und ebenschichtige Sand, welcher die beschriebene altdiluviale Schichtenreihe discordant bedeckt* (siehe S. 389 und *ds* des Profiles 1 und 2). Wenden wir uns auch behufs seiner geologischen Erörterung nach Süden.

S. 5 Ausdruck, indem er schreibt: »Unter den Bäumen, welche unmittelbar am Ufer des Sumpfes wuchsen, spielen Birke, Fichte und Weiden die Hauptrolle. Die Kiefer trat mehr zurück. . . . In einiger Entfernung vom Wasser scheint die Hainbuche zahlreich vorhanden gewesen zu sein.«

Mit derartigen Anschauungen steht jedoch der thatsächliche Befund durchaus in Widerspruch! Die Klinger Lagerstätten füllen kein Seebecken mit flachen Ufern aus, sondern schmale, verhältnissmässig steilrandige, trogartige Rinnen. Von früher an sie angrenzendem Waldboden keine Andeutung, — nirgends eine noch so gering mächtige Schicht von humosem Lehm zwischen den Granden und dem Decksand der »Kiesrücken«, welche auf eine ehemalige Pflanzendecke in der Nachbarschaft der Torfmulden hinwiese, — nirgends die Spur eines einstmaligen Bestandes mit jenen Bäumen und Sträuchern, deren Stämme, Aeste und Früchte sich in dem Torfflötze in solcher Masse aufgespeichert finden, dass an ihr Wachsthum auf so schmalem Striche gar nicht gedacht werden darf.

Auch die Vermischung von Stämmen der kümmerlichen *Moorfichte*, »die bei einem Alter von 20 und mehr Jahren kaum die Dicke eines Daumens besitzen« mit Aesten stattlicher Fichten von flottem Wachsthum weist auf deren Zusammengeschwemmtsein aus dem oberen Flussgebiete, vielleicht aus dem lausitzer-sudetischen Randgebirge hin, welches, ebenso wie heute das obere Erzgebirge, an besonders nasskalten Stellen die Zwergbirke und krüppelhafte Nadelhölzer getragen haben mag.

Uebrigens gilt ja auch das *Cromer Forest Bed*, auf die Aehnlichkeit dessen pflanzlichen Charakters Nehring und Nathorst wiederholt aufmerksam machen, als ein *fluviatiles Anschwemmungsproduct* und zwar als ein solches nahe der damaligen Mündung des Rheines in die Nordsee.

Bis weit hinein in das Lausitzer Gebirge werden die altdiluvialen Schotter und die sich aus ihnen erhebenden Kuppen und Rücken von Granit, Grauwacke und Tertiär überzogen durch eine höchst wechselvoll ausgebildete *Deckschicht*. Bald erscheint diese als eine wenig mächtige Hülle von ungeschichtetem, schwach lehmigem Sand, bald als eine solche von reinem oder grandigem Sand, dann zuweilen geschichtet. Für weite Strecken gehen diese Decksande ganz allmählich in einen geschiebefreien Decklehm oder aber in Lösssand und durch diesen in kalkhaltigen normalen Löss über. Ersteren ist die Führung kleinerer oder grösserer Geschiebe gemeinsam, welche entweder unregelmässig in der sandigen Grundmasse vertheilt oder an der Basis des Decksandes zu einer Steinsohle concentrirt sind. Viele, mancherorts die Mehrzahl dieser Gerölle sind als *Dreikanter* ausgebildet, grössere Geschiebe wenigstens stellenweise mit Kanten, aber rundum narbig mit ausgeätzter Sculptur versehen. Auch in der Masse des Lösssandes und Lösslehmes sind einzelne kleine Gerölle vertheilt, im Löss zuweilen schmitzenartig angehäuft oder lagenförmig angeordnet, meist aber ruhen auch diese Gebilde auf einer Steinsohle mit Kantengeröllen.

Discordant, oft topfartig eingreifend, schneidet diese Deckschicht die Bänke der Diluvialkiese und -sande ab, meist scharf von ihnen durch die Steinsohle getrennt, wo aber diese fehlt, ist der Decksand mit deren Oberfläche verwachsen. Wie eine dicht sich anschmiegende, local sogar auf eine blosse Steinbestreuung reducirte Hülle überzieht die Deckschicht das gesammte bereits fertige Relief des Hügellandes und der Hochflächen bis hinab zu den Thalsanden und -lehmen des grossen jungdiluvialen Flussthales im äussersten Norden Sachsens.

Was aber dieser Deckschicht ihren ganz absonderlichen Charakter verleiht, ist der Umstand, dass nur ein Theil der in ihr enthaltenen Geschiebe und Blöcke nordischen Ursprunges ist, während ein reichlicher, ja flächenweise ein vorwiegender Procentsatz derselben *südliche* Herkunft besitzt. Unter letzteren verdienen neben Lausitzer Graniten, Grauwacken und deren Contactgesteinen, Quarzporphyren, Kieselhölzern und Quarziten besonders die südlausitzer und böhmischen Basalte, Phonolithe, Quader und silurischen Kieselschiefer um so grössere Beachtung, als deren Blöcke wenigstens im westlichen Theile des Lausitzer Schotterfeldes, hier aber noch in 75 km Entfernung von der

sächsisch-böhmischen Grenze, nicht selten einen Durchmesser von 0,3 bis 0,5 m erreichen.

Als Product eines zweiten Vorstosses des Inlandeises lässt sich dieser Decksand nicht erklären. Hiergegen spricht zunächst seine Ausdehnung über die gesammte Randzone des nordlausitzer Diluviums bis zu dessen äusserster Südgrenze, namentlich aber seine Führung reichlichen südlichen Materiales, das sich nicht allein durch Aufnahme aus den liegenden Flussschottern erklären lässt. Je genauer die Kenntniss ist, welche man durch das Studium dieser Deckschicht und aller ihrer Einzelzüge innerhalb ihres sächsischen Verbreitungsgebietes erlangt, desto mehr häufen sich die Wahrscheinlichkeitsgründe dafür, dass die Deckschicht hierselbst einer Reihe von Folgeerscheinungen der nämlichen Abschmelz-, Ueberfluthungs- und Thalbildungsperiode ihre Entstehung verdankt, aus der die sie unterlagernden Glacial- und Flussschotter, nebst den ihnen untergeordneten Thonen und Thonsanden hervorgegangen sind.

Ein den rein sandigen Modificationen Nordsachsens ganz ähnlicher Decksand ist es, der auch bei Klinge die älteren Diluvialschichten überlagert. Auch er schneidet dieselben discordant ab, bildet Töpfe und Zähne in deren Oberfläche und führt (nach Dathe und Nehring) isolirte nordische und *südliche* Geschiebe, beide zum Theil in Dreikanter umgestaltet und local zu einer Steinsohle an seiner Basis concentrirt, — ist ausserdem in seinem ganzen dortigen Aufschlussgebiete, an den Wänden aller dortigen Tagebaue scharf horizontal geschichtet.

Das geologische Alter der Klinger Schichten.

Ist einerseits das *präglaciale* Alter der Klinger Schichten und deren geologische Aequivalenz mit dem Cromer Forest Bed Norfolks auf das Bestimmteste *ausgeschlossen*, so sind nach Obigem anderseits in den Verbandsverhältnissen der Klinger Schichten keinerlei Anhaltspunkte gegeben, vermittelst deren sich auf stratigraphischem Wege die *interglaciale* Stellung dieses Schichtencomplexes beweisen liesse. Den einzigen und zwar paläontologischen Hinweis auf diese letztere könnte man mit Nathorst darin erblicken, dass sich in den das Torfflötz überlagernden Thonen und in deren torfigen Zwischenlagen (siehe S. 388), freilich eingeschwemmte, durch Wasserfluthen herbeigeführte Reste

von *Betula nana* vorfinden, während die Gewächse in dem Torflager selbst auf ein wärmeres Klima hinweisen. Das Erscheinen dieser an kältere klimatische Verhältnisse gebundenen Pflanze scheint Nathorst[1]) auf eine Temperaturerniedrigung hinzuweisen, welche dann mit einem erneuten Vordringen des Inlandeises in Zusammenhang gestanden haben könnte. Dafür aber, dass dieses die Ablagerungsstätte der Klinger Schichten erreicht und überschritten hätte, liegen keinerlei geologische Anzeigen vor. Nur so viel dürfte aus den dortigen Verhältnissen hervorgehen, dass die Klinger Schichten ebenso wie die mit ihnen durch Wechsellagerung verknüpften Grande und Sande demjenigen Abschnitte der Glacialzeit entstammen, in welchem sich das Inlandeis bereits weit von der äussersten Südgrenze seiner ersten und intensivsten Ausbreitung zurückgezogen hatte, — einer Zeit, während deren sich mächtige Ströme aus dem lausitzer-sudetischen Randgebirge nach Norden ergossen, — während deren sich endlich in dem nördlich anstossenden Ländergebiete bereits wieder neue oscillatorische Vorstösse des Eisrandes vollzogen haben mögen, ohne dass es jedoch bis zur Ueberschreitung der bei Klinge abgelagerten Schichten gelangt wäre.

Will man etwa die *randlichen* Ablagerungen aus dieser eben skizzirten altdiluvialen Aera als »*interglacial*« bezeichnen, so dürfte auch den Klinger Schichten diese Benennung zukommen. Jedoch nur in *diesem* Sinne, — denn ein sogenanntes »*Interglacialprofil*« liefert das Diluvium von Klinge *nicht*. Sieht man vielmehr von den gleichzeitigen Ereignissen auf nördlicheren Landstrichen ab und fasst ausschliesslich die Gegend von Klinge und das Lausitzer Schotterareal in's Auge, bis wohin nach Ausfüllung der Torfmulden das nordische Inlandeis nicht wieder vorgedrungen ist, so muss man die Ablagerungen von Klinge als *postglacial* betrachten.

---

1) Naturw. Wochenschr. 1892. Nr. 25, S. 247. Jedoch macht Nathorst selbst darauf aufmerksam, dass aus den eingeschwemmten Resten von Betula nana »keine bestimmten Schlussfolgerungen« gezogen werden dürften. (Vgl. auch oben S. 398, Anmerkung 2.)

INHALT.

	Seite
F. Stohmann u. *H. Langbein*, Calorimetrische Untersuchungen. Achtundzwanzigste Abhandlung	307
Gottl. Friedr. Lipps, Über Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. Vorgelegt von Herrn Scheibner	340
Hermann Credner, Über die geologische Stellung der Klinger Schichten. Mit 2 Figuren	385

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD COLLEGE
JAN 24 1893
LIBRARY.

SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1892.

Ernst von Meyer, *Vergleichende Charakteristik der dimolekularen Nitrile.* (Nach eignen Untersuchungen und Versuchen von Dr. P. S. Burns.)

Die von mir aufgefundenen dimolekularen Nitrile[1]) verdanken ihre Entstehung der eigenthümlichen Einwirkung von Natrium auf Nitrile bei niedriger Temperatur, welche am besten durch Arbeiten in absolut ätherischer Lösung erzielt und regulirt wird. Die Reaction besteht, wie von mir nachgewiesen ist, nicht nur in einer Aneinanderlagerung von 2 Mol. Nitril unter Mitwirkung des Natriums, sondern gleichzeitig betheiligt sich ein drittes Mol. des betreffenden Cyanids an der Wechselwirkung, indem es durch Natrium in Cyannatrium und das mit Cyan verbundenen Radical (Alkyl) gespalten wird, welch' letzteres mit dem bei der Polymerisirung frei werdenden Wasserstoffatom einen Kohlenwasserstoff bildet. Für Acetonitril z. B. verläuft die gesammte Reaction nach folgenden Gleichungen:

$$CH_3CN + Na = CH_2NaCN + H$$
$$CH_2NaCN + CH_3CN = \underbrace{C_4H_5NaN_2}_{\text{Natriumverbindung des Di-Acetonitrils}}$$
$$CH_3CN + Na = NaCN + CH_3$$
$$CH_3 + H = CH_4 .$$

Aus den chemischen Umwandlungen des Di-Propionitrils hat sich seine Constitution klar ergeben: es ist als

1) Journ. f. prakt. Chem. (2) XXXVII, 411; XXXVIII, 336; XXXIX, 189.

α-**Imidopropyl-Cyanäthyl**: $\begin{array}{l} C_2H_5C(NH) \\ \quad\ \ | \\ CH_3 \cdot CHCN \end{array}$ aufzufassen. Das aus Cyanmethyl dargestellte, von Holtzwart[1]) untersuchte Di-Acetonitril wird entsprechend als Imidoäthyl-Cyanmethyl: $\begin{array}{l} CH_3C(NH) \\ | \\ CH_2CN \end{array}$ betrachtet[2]). — Zu diesen aus 2 Mol. eines Nitrils hervorgehenden Körpern gesellen sich noch zwei Dinitrile, welche durch Polymerisation von zwei verschiedenen Cyaniden entstanden sind: das Imidobenzylcyanmethyl, kürzer Benzoacetodinitril[3]): $C_6H_5C(NH) \cdot CH_2CN$, aus Benzo- und Acetonitril, und das Benzopropiodinitril[4]):

$$C_6H_5C(NH) \cdot CH(CH_3)CN.$$

Die drei erstgenannten Dinitrile, welche nach den früher mit ihnen ausgeführten Untersuchungen einige Verschiedenheiten in ihrem chemischen Verhalten erkennen liessen, sind inzwischen einem genaueren vergleichenden Studium unterworfen worden, dessen Ergebnisse im Folgenden mitgetheilt werden.

Obwohl von gleichartiger Constitution, zeigen diese Körper unter einander in vielen Fällen ein so abweichendes Verhalten, wie es bei Angehörigen einer und derselben Körperclasse bisher kaum beobachtet sein mag. Die Ursache dieser Unterschiede aufzuklären, ist gewiss eine lohnende Aufgabe. — Bei Betrachtung der Formeln jener drei Dinitrile:

$$\begin{array}{l} CH_3 \cdot C(NH) \cdot CH_2CN \\ C_6H_5 \cdot C(NH) \cdot CH_2CN \\ C_2H_5 \cdot C(NH) \cdot CH(CH_3)CN \end{array}$$

erkennt man, dass die Verschiedenheit dieser Körper wesentlich durch die Natur und Function der Radicale bedingt ist, die in das Cyanmethyl eingeführt sind; denn von diesem letzten lassen sich alle drei ungezwungen ableiten. — Somit können diese Untersuchungen zur Aufklärung des Einflusses dienen, welchen Radicale in organischen Verbindungen ausüben.

---

1) Journ. f. prakt. Chem. (2) XXXIX, 230.

2) Statt der umständlichen rationellen Bezeichnungen werde ich die kürzeren Namen Di-Propionitril und Di-Acetonitril gebrauchen, aus denen die Herkunft dieser Körper direct zu erkennen ist.

3) Journ. f. prakt. Chem. (2) XXXIX, 242.

4) Daselbst XXXIX, 189.

1. Einwirkung von Wasser auf Dinitrile.[1])

a. Di-Acetonitril zersetzt sich durch kochendes Wasser unter Bildung von Ammoniak und Blausäure, mit deren Dämpfen geringe Mengen des höchst unbeständigen Cyanacetons entweichen, welches durch Ueberführung in sein Hydrazon (97° Schmelzpunkt) nachgewiesen wurde. Als Hauptproduct krystallisirt aus der wässrigen gelben Lösung ein Körper von der Zusammensetzung $C_8H_8N_2O$, dessen Entstehung aus primär gebildetem Cyanaceton kaum zu bezweifeln ist. Die Einwirkung des Wassers auf Di-Acetonitril kann durch folgende Gleichungen wesentlich ausgedrückt werden:

$$CH_3C(NH)\cdot CH_2CN + H_2O = H_3N + \underbrace{CH_3CO\cdot CH_2CN}_{\text{Cyanaceton}}$$

$$2\,CH_3CO\cdot CH_2CN = H_2O + C_8H_8N_2O\ .$$

Die Blausäure verdankt ihre Entstehung wahrscheinlich der Zersetzung eines Theils des Cyanacetons in Oxyaceton:

$$CH_3COCH_2CN + H_2O = HCN + CH_3COCH_2OH\ .$$

Was die Constitution des Körpers: $C_8H_8N_2O$[2]) anlangt, so ist die Condensation des Cyanacetons vielleicht analog der des Acetons vor sich gegangen:

$$\begin{array}{llll} 2\,CH_3CO & = H_2O + & CH_3C & = CHCOCH_3 \\ \quad\;\; | & & \;\;\; | & \\ \quad CH_3 & & \;\; CH_3 & \end{array}$$

Mesityloxyd

$$\begin{array}{llll} 2\,CH_3CO & = H_2O + & CH_3C & = C\cdot CN\cdot COCH_3 \\ \quad\;\; | & & \;\;\; | & \\ \quad CH_2CN & & \;\; CH_2CN & \end{array}$$

Dicyanmesityloxyd.

Hiernach sind die zwei Wasserstoffatome des in dem einen Mol. Cyanaceton enthaltenen Cyanomethyls CH_2CN, als besonders reactionsfähig, mit dem Sauerstoffatom des zweiten Mol. ausgetreten, wodurch die Condensation ermöglicht ist.

---

1) Vergl. Journ. f. prakt. Chem. (2) XXXIX, 191 u. 239.

2) Dieselbe Verbindung ist wahrscheinlich von Held aus Cyanacetessigäther durch Erhitzen mit Wasser erhalten worden (Ann. Chim. [6] XVIII, 517). Vergl. auch die kritischen Bemerkungen Obregia's über ihre muthmassliche Constitution (Ann. Chem. CCLXVI, 342).

b. Das Benzoaceto-Dinitril: $C_6H_5C(NH)$ welches sich
$\overset{|}{CH_2CN}$,
nach seiner Constitution von dem Di-Acetonitril nur dadurch unterscheidet, dass es Phenyl an Stelle von Methyl enthält, zeigt beim Erhitzen mit Wasser ein anderes Verhalten. Durch Kochen unter gewöhnlichem Druck erfährt es so gut wie keine Zersetzung; erst wenn es im geschlossenen Rohre auf 120°—130° erhitzt wird, zerlegt es sich wesentlich in Ammoniak und Cyanacetophenon, welche unter diesen Bedingungen grösstentheils unter Aufnahme von 2 Mol. Wasser und Abspaltung von Ammoniak in Acetophenoncarbonsäure und weiter in Kohlensäure und Acetophenon umgewandelt wird, gemäss folgenden Gleichungen:

$$C_6H_5C(NH)\cdot CH_2CN + H_2O = H_3N + C_6H_5CO\cdot CH_2CN$$
$$C_6H_5CO\,CH_2CN + 2H_2O = H_3N + C_6H_5CO\cdot CH_2COOH$$
$$C_6H_5CO\cdot CH_2COOH = CO_2 + C_6H_5COCH_3\,.$$

Blausäure bildet sich aber gar nicht, dagegen ein amorphes Product, über dessen Natur ein Aufschluss nicht gewonnen werden konnte.

c. Di-Propionitril liefert beim Kochen mit Wasser als Hauptproduct das von mir früher untersuchte α-Cyandiäthylketon und Ammoniak, daneben Blausäure und muthmasslich Oxydiäthylketon. Die Hauptreaction entspricht also der Gleichung:

$$C_2H_5\,C(NH)\cdot CH(CH_3)CN + H_2O = H_3N + \underbrace{C_2H_5CO\cdot \underset{\displaystyle CN}{\underset{|}{CH}}(CH_3)}_{\alpha\text{-Cyandiäthylketon.}}$$

Die Zersetzung bleibt hier bei der Bildung des Cyanketons stehen, während bei dem Di-Acetonitril das Cyanaceton sich grösstentheils condensirt.

2. **Die Einwirkung von Säuren auf die drei Dinitrile** verläuft wesentlich gleichartig, insofern das in ihnen fungirende Imid (NH) durch Sauerstoff ersetzt wird, und Cyanketone entstehen. In Folge der geringen Beständigkeit des aus Di-Aceto-

nitril hervorgehenden Cyanacetons lässt sich dieses nur in minimalen Mengen erhalten, während die Gewinnung des Cyanmethylphenyl- und des Cyandiäthylketons keinerlei Schwierigkeiten bietet.

3. Einwirkung von salzsaurem Hydroxylamin auf Dinitrile.

(Nach Versuchen von Burns.)

Auf die drei, zu vergleichenden Dinitrile wirkt salzsaures Hydroxylamin sehr leicht und glatt ein; es entstehen hierbei Verbindungen von der Zusammensetzung der zu erwartenden Oxime. Jedoch ist bemerkenswerther Weise nur das Product aus Di-Acetonitril ein wirkliches Oxim, während die beiden andern Dinitrile ganz anders constituirte Körper liefern, welche den Oximen isomer sind.

a. Di-Acetonitril und salzsaures Hydroxylamin.

Beide reagiren in Gegenwart von Wasser sofort auf einander; aus der hellgelben Lösung scheiden sich bald lange Nadeln von 96° Schmelzpunkt aus, welche in Wasser wenig, in Alkohol, Aether, auch in heissem Benzol leicht löslich sind. Die Verbindung hat die Zusammensetzung: $C_4H_6N_2O$.

	Berechnet	Gefunden
C	48,97 %	48,7 % [1]
H	6,12 »	6,5 »
N	28,50 »	28,8 »

Nach ihrem Verhalten ist dieselbe das Oxim des Cyanacetons; sie wird, analog andern Oximen, durch Erhitzen mit concentrirter Salzsäure in salzsaures Hydroxylamin und Cyanaceton, das grösstentheils weitere Zersetzung erfährt, gespalten, gemäss der Gleichung:

$$\begin{matrix} CH_3C{=}NOH \\ | \\ CH_2CN \end{matrix} + H_2O + HCl = H_2N\cdot OH\cdot HCl + \begin{matrix} CH_3CO \\ | \\ CH_2CN \end{matrix}$$

Sehr bemerkenswerth ist die Umwandlung des Cyanacetonoxims durch Erhitzen mit Wasser. Noch ehe man die Temperatur

---

1) Die Zahlen zum Beleg dieser und anderer Analysen sollen in ausführlichen Abhandlungen an anderer Stelle mitgetheilt werden.

seiner wässrigen Lösung bis zum Sieden gesteigert hat, tritt lebhaftes Aufwallen ein. Der nach dem Verdampfen bleibende Rückstand: ein Oel, welches bald zu schönen Prismen erstarrt, hat die gleiche Zusammensetzung, wie das Oxim. Aus Benzol scheidet sich der isomere Körper in federförmigen Krystallen von 84° Schmelzpunkt ab.

	Berechnet	Gefunden
C	48,97 %	48,86 %
H	6,12 »	6,40 »
N	28,50 »	28,30 »

Dass diese Verbindung nicht mehr ein Oxim ist, ergiebt sich aus ihrem ganzen Verhalten: Mit Salzsäure zersetzt, giebt sie kein Hydroxylamin (dagegen Ammoniak), in Alkalien ist sie schwerer, als in Wasser löslich. Während das isomere Cyanacetoxim kein salzsaures Salz zu bilden vermag, liefert die obige Verbindung, in ätherischer Lösung mit Chlorwasserstoff behandelt, ein solches von der Zusammensetzung: $C_4H_6N_2O \cdot HCl$.

Was ihre Constitution anlangt, so ist man auf Grund des Verhaltens der beiden andern Dinitrile zu Hxdroxylamin berechtigt, ihre Zusammensetzung durch folgende Formel auszudrücken:

$$\begin{array}{lcl} CH_3C & = & N \\ | & & \;\;>O \\ CH_2 - C & = & NH \end{array}$$

und sie als Methylisoxazolonimid zu bezeichnen. Ihre Entstehung aus dem isomeren Cyanacetoxim $\begin{array}{l} CH_3C = NOH \\ \;\;\;\;\;| \\ CH_2 - CN \end{array}$ beruht, wie man beim Vergleich der beiden Formeln leicht erkennt, auf der Wanderung des Hydroxyl-Wasserstoffs zum Stickstoff des Cyans; in Folge davon ist eine Ringschliessung ermöglicht.

b. Benzoaceto-Dinitril und salzsaures Hydroxylamin.

Beide wirken in weingeistiger Lösung leicht auf einander ein. Der Verdampfungsrückstand, mit Wasser zur Entfernung von Chlorammonium und salzsaurem Hydroxylamin behandelt und aus Benzollösung mit Petroläther gefällt, giebt eine in Na-

deln von 111° Schmelzpunkt krystallisirende Verbindung von der erwarteten Zusammensetzung: $C_9H_8N_2O$.

	Berechnet	Gefunden
C	67,50 %	67,27 %
H	5,00 »	5,34 »
N	17,50 »	17,60 »

Schon das Verhalten dieses Körpers zu mässig verdünnter Salzsäure zeigt unzweideutig an, dass er nicht mehr das in erster Linie entstehende Cyanacetophenonoxim:

$$\begin{array}{l} C_6H_5C = NOH \\ \quad | \\ \quad CH_2CN \end{array}$$

ist, sondern das diesem gleich zusammengesetzte Phenylisoxazolonimid:

$$\begin{array}{l} C_6H_5C = N \\ \quad | \qquad\quad >O \\ \quad CH_2 - C = NH \end{array},$$

also der obigen Methylverbindung (vor. S.) analog. Durch gelindes Erwärmen der Phenylverbindung in salzsaurer Lösung wird sie nämlich in das von CLAISEN[1]) und OBREGIA[2]) beschriebene, auf anderem Wege dargestellte Phenylisoxazolon glatt umgewandelt, gemäss folgender Gleichung:

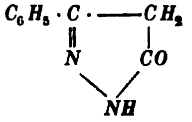
$$\begin{array}{l} C_6H_5C{=}N \\ \quad | \quad >O \\ \quad CH_2C(NH) \end{array} + H_2O + HCl = H_4NCl + \begin{array}{l} C_6H_5C{=}N \\ \quad | \quad >O \\ \quad CH_2CO \end{array}.$$

Die Identität des Productes dieser Reaction mit CLAISEN's Phenylisoxazolon wurde durch den Schmelzpunkt: gegen 148° (unter Zersetzung), die Analyse: $C = 66,86$ % (ber. 67,08),

---

1) Ber. XXIV, 141.

2) Ann. Chem. CCLXVI, 329. OBREGIA hat auch das oben beschriebene Phenylisoxazolonimid dargestellt, und zwar durch Einwirkung von Hydroxylamin auf Cyancetophenon, legt ihm aber die unwahrscheinliche Constitution:



bei.

$H = 4,58\,\%$ (ber. 4,34), $N = 9,04\,\%$ (ber. 8,7) und seine Umwandlung in das Nitrosoderivat von 141—143° Schmelzpunkt sicher erwiesen.

Für die obige Verbindung, $C_9H_8N_2O$ kann demnach die ihr ertheilte Constitution angenommen werden. Zu ihrer Charakterisirung sei noch Folgendes mitgetheilt: Als Imidoverbindung ist sie fähig, Salze, sowie eine Acetylverbindung:

$$\begin{array}{l} C_6H_5C{=}N \\ \quad\;\; | \qquad\quad > O \\ \;\; CH_2C = NCOCH_3 \end{array}$$

zu bilden, welche in Krystallen von 164° Schmelzpunkt erhalten wird. — Mit Brom in Aetherlösung behandelt, nimmt sie 2 At. desselben auf, unter Bildung einer krystallinischen Fällung, welche zwischen 128° und 130° unter Zersetzung schmilzt. Dieses Dibromid geht durch Kochen mit Wasser unter Verlust von 1 Mol. Bromwasserstoff und Austausch von Imid gegen Sauerstoff in Phenylbromisoxazolon:

$$\begin{array}{l} C_6H_5C = N \\ \quad\;\; | \qquad\quad > O \\ \;\; CHBrCO \end{array}$$

über, welches in feinen, bei 134° unter Zersetzung schmelzenden Nadeln krystallisirt.

c. Di-Propionitril und salzsaures Hydroxylamin.

Die Wechselwirkung dieser beiden Verbindungen vollzieht sich in wässriger Lösung sehr leicht; das theils als erstarrendes Oel abgeschiedene, theils mit Aether ausgeschüttelte Product bildet Prismen von 42° Schmelzpunkt, ist in Wasser wenig, in wässrigen Alkalien kaum löslich, leicht dagegen in Alkohol, Aether, Benzol; es hat die erwartete Zusammensetzung: $C_6H_{10}N_2O$.

	Berechnet	Gefunden
C	57,14 %	57,57 %
H	7,93 »	7,76 »
N	22,22 »	22,22 »

Da diese Verbindung, welche inzwischen von Hanriot[1]) aus Cyandiäthylketon und salzsaurem Hydroxylamin dargestellt und

1) Bull, soc. chem. (3) V, 773. Die erste Mittheilung hierüber machte Herr Burns im Journ. pr. Chem. (2) XLIII, 406. (April 1891).

ausführlich untersucht worden ist, sich der aus Benzoacetodinitril gewonnenen (s. oben) genau gleich verhält, so ist die Annahme gerechtfertigt, dass hier das analog zusammengesetzte Aethylmethylisoxazolonimid vorliegt, dessen Entstehung aus primär gebildetem Oxim aus der Nebeneinanderstellung der Formeln erhellt:

$$\underbrace{\begin{matrix} C_2H_5 \cdot C = NOH \\ | \\ CH_3CH - CN \end{matrix}}_{\text{Cyandiäthylketoxim}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\begin{matrix} C_2H_5 \cdot C = N \\ | \quad\quad >O \\ CH_3 \cdot CH - C = NH \end{matrix}}_{\text{Aethylmethylisoxazolonimid.}}$$

Henriot betrachtet den letzteren Körper als das tautomere Aethylmethylisoxazol:

$$\begin{matrix} C_2H_5 \cdot C = N \\ | \quad\quad >O\,; \\ CH_3C \cdot CNH_2 \end{matrix}$$

jedoch spricht die Analogie desselben mit dem Phenylisoxazolonimid, sowie dessen leichte Umwandlung in das Phenylisoxazolon (s. ob. S. 409) für die oben angewandte Betrachtungsweise.

4. Einwirkung von Säurechloriden, insbesondere Benzoylchlorid, auf Dinitrile.

(Wesentlich nach Versuchen von Herrn Burns.)

Von den drei Dinitrilen verhält sich gegenüber dem Benzoylchlorid wiederum das Di-Acetonitril ganz eigenartig und verschieden von dem Benzoacetodinitril und von dem Di-Propionitril. Letztere liefern durch directe Einwirkung des Chlorids Monobenzoylderivate derselben, das Di-Acetonitril dagegen gestattet unter genau gleichen Bedingungen die Substitution von 2 At. Wasserstoff durch zwei Benzoyle. Auf Grund sorgfältiger Untersuchung dieses Dibenzoyldiacetonitrils ist der Nachweis geführt, dass das eine Benzoyl direct an Stelle eines mit Kohlenstoff verbundenen Wasserstoffatoms getreten ist: ein unter ähnlichen Bedingungen bisher noch nicht beobachteter Fall.

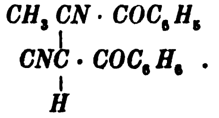
a. Di-Acetonitril und Benzoylchlorid. Dibenzoyldiacetonitril.

Schon in ätherischer Lösung wirken beide (im Verhältniss von 1 Mol. zu 2 Mol.) auf einander ein; nach Verjagen des Aethers

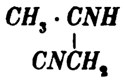
und Erwärmen des Rückstandes auf dem Wasserbade bleibt eine Krystallmasse, welche, nach Waschen mit wenig Alkohol und mit Wasser, aus heissem Weingeist umkrystallisirt wird; man gewinnt so lange, bei 158° schmelzende Nadeln, in Wasser, Säuren und Alkalien nicht löslich. Diese Verbindung ist Dibenzoyl-Diacetonitril: $C_4H_4(COC_6H_5)_2N_2$.

	Berechnet	Gefunden
C	74,48 %	74,68 %
H	4,82 »	5,04 »
N	9,65 »	9,71 »

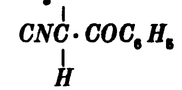
Die beiden Benzoyle besitzen darin verschiedene Functionen. Aus den Umwandlungen des Körpers ergiebt sich für ihn folgende Constitutionsformel:



Die Abkunft von Di-Acetonitril



ist daraus unmittelbar ersichtlich. Durch Einwirkung von weingeistigem Kali, sowie von Schwefelsäure auf das Dibenzoylacetonitril wird nur das eine Benzoyl eliminirt, jedoch geht die Zersetzung in beiden Fällen weiter: im ersteren, bei Anwendung von alkoholischem Kali, tritt zugleich das eine Stickstoffatom als Ammoniak aus, und der Complex Benzoylimid ($NCOC_6H_5$) wird durch 1 At. Sauerstoff ersetzt, so dass α-Cyan-Benzoylaceton:



entsteht. — Im zweiten Falle, durch Einwirkung von halbverdünnter kochender Schwefelsäure, geht die Spaltung weiter, insofern das vielleicht zuerst entstandene Cyanbenzoylaceton in Ammoniak, Kohlensäure, Essigsäure und Acetophenon gespalten wird, welche Producte sämmtlich leicht nachzuweisen sind. Die

obigen Reactionen erklären sich durch die Wirkung des Wassers und erhellen aus folgenden Gleichungen:

I.
$$\begin{array}{l} CH_3\cdot CN\,CO\,C_6H_5 \\ \quad | \\ CNCH\cdot COC_6H_5 \end{array} + 2\,H_2O = H_3N + C_6H_5COOH + \underbrace{\begin{array}{l} CH_3CO \\ \quad | \\ CNCHCOC_6H_5 \end{array}}_{\alpha\text{-Cyanbenzoylaceton}}$$

II.
$$\begin{array}{l} CH_3CO \\ \quad | \\ CNCHCOC_6H_5 \end{array} + 2\,H_2O = \underbrace{\begin{array}{l} \qquad\quad CH_3CO \\ \qquad\qquad | \\ COOH\cdot CHCOC_6H_5 \end{array}}_{\text{Hypothet. Benzoylaceton-carbonsäure}} + H_3N$$

III.
$$\begin{array}{l} \quad CH_3\cdot CO \\ \qquad | \\ COOHCHCOC_6H_5 \end{array} + H_2O = CO_2 + CH_3COOH + \underbrace{CH_3COC_6H_5}_{\text{Acetophenon.}}$$

Ueber Darstellung und Eigenschaftea des Cyan-Benzoylacetons sei Folgendes mitgetheilt: Das Product der Einwirkung von weingeistigem Kali auf Dibenzoyl-Diacetonitril wird nach Verdampfen des Alkohols in Eiswasser gelöst; durch vorsichtiges Neutralisiren mit Salzsäure erhält man die Verbindung als krystallinische Fällung, welche aus alkoholischer Lösung in feinen, bei 74° schmelzenden Nadeln anschiesst. Ihre Zusammensetzung entspricht der oben aufgeführten Formel des Cyanbenzoylacetons: $C_{11}H_9NO_2$.

	Berechnet	Gefunden
C	70,58 %	70,65 %
H	4,81 »	5,26 »
N	7,48 »	7,49 7,47

Dasselbe bildet als Säure ein krystallinisches Silbersalz von der Zusammensetzung:

$$\begin{array}{l} CH_3CO \\ \quad | \\ CNC\cdot Ag\cdot COC_6H_5. \end{array}$$

Seine Beziehung zum Benzoylaceton erhellt aus seiner Umwandlung in dieses durch Erhitzen mit Wasser (im Rohre auf 150°):

$$\begin{array}{l} CH_3CO \\ \quad | \\ CNCH \cdot COC_6H_5 \end{array} + 2H_2O = H_3N + CO_2 + \begin{array}{l} CH_3CO \\ \quad | \\ CH_2 \cdot COC_6H_5 \end{array}.$$

Analog dem Benzoylaceton reagirt dessen Cyanderivat mit Ammoniak unter Bildung eines in glänzenden, bei 148° schmelzenden Imids von der wahrscheinlichen Constitution:

$$\begin{array}{l} CH_3C = NH \\ \quad | \\ CNCH \cdot COC_6H_5 \end{array},$$

also eines Benzoyl-Diacetonitrils. Mit Phenylhydrazin liefert das Cyanbenzoylaceton das ebenfalls bisher unbekannte Methyldiphenylcyanpyrazol, muthmasslich wie folgt constituirt:

$$\begin{array}{l} CH_3 \cdot C = N \\ \qquad | \qquad\quad > NC_6H_5 \\ CNC = CC_6H_5 \end{array}.$$

Dasselbe krystallisirt aus Alkohol in rhombischen Blättchen von 189° Schmelzpunkt und bildet sich auch direct aus dem Dibenzoyldiacetonitril mittelst Phenylhydrazin unter Abspaltung von Ammoniak, Benzoësäure und Wasser.

b. Benzoaceto-Dinitril und Benzoylchlorid. Monobenzoyl-Benzoacetodinitril.

Unter gleichen Bedingungen, wie oben (unter a), treten beide Ingredienzien in Wechselwirkung und liefern ein Monobenzoylderivat des Benzoacetodinitrils, welches, am besten aus Eisessig umkrystallisirt, seideglänzende Nadeln von 250° Schmelzpunkt bildet und in den gebräuchlichen Lösungsmitteln sehr schwer oder gar nicht löslich ist. Seine Zusammensetzung: $C_9H_7(COC_6H_5)N_2$ ergiebt sich aus der Analyse.

	Berechnet	Gefunden
C	77,42 %	77,20 %
H	4,83 »	4,99 »
N	11,65 »	11,30 »

Die grosse Beständigkeit dieses Körpers gegen Alkalien und Säuren (selbst bei 160°) lässt auf eine analoge Constitution desselben mit der des unter c. näher beschriebenen Benzoyl-Dipropionitrils schliessen, so dass die obige Verbindung muthmasslich die rationelle Formel:

$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot C{=}N{-}C(OH)\cdot C_6H_5 \\ \;| \\ C\cdot HCN \end{array} \quad \text{besitzt.}$$

c. Di-Propionitril und Benzoylchlorid liefern in ätherischer Lösung, also unter gleichen Bedingungen wie bei obigen Versuchen, zusammengebracht, nur ein Monobenzoylderivat: $C_6H_9(COC_6H_5)N_2$, welches aus Alkohol in kleinen Nadeln (von 199° Schmelzpunkt) krystallisirt und mit dem unter b. beschriebenen Abkömmlinge des Benzoacetodinitrils grosse Aehnlichkeit im chemischen Verhalten zeigt. Seine Zusammensetzung wurde durch die Analyse und durch Gewinnung verschiedener Derivate bestätigt.

	Berechnet	Gefunden
C	72,89 %	72,95 %
H	6,54 »	6,73 »
N	13,08 »	12,85 »

Das Benzoyldipropionitril bildet mit starken Säuren krystallisirende, durch Wasser in ihre Componenten zersetzbare Salze. — Von Säuren, Alkalien, salzsaurem Hydroxylamin wird es, selbst bei hoher Temperatur, nicht verändert.

Die Einwirkung von Fünffach-Chlorphosphor auf dasselbe und namentlich das Verhalten der dabei erhaltenen Chlorverbindung machen es wahrscheinlich, dass das Benzoyldipropionitril nicht mehr Benzoyl: COC_6H_5 enthält; das muthmasslich zuerst entstandene Benzoylderivat:

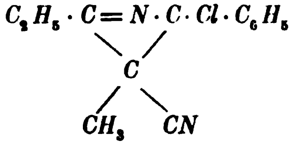
$$\begin{array}{l} C_2H_5C{=}NCOC_6H_5 \\ \quad\;\; | \\ CH_3CHCN \end{array}$$

scheint sich durch Wanderung des einen freien Wasserstoffatoms an das Sauerstoffatom umgelagert zu haben in das tautomere:

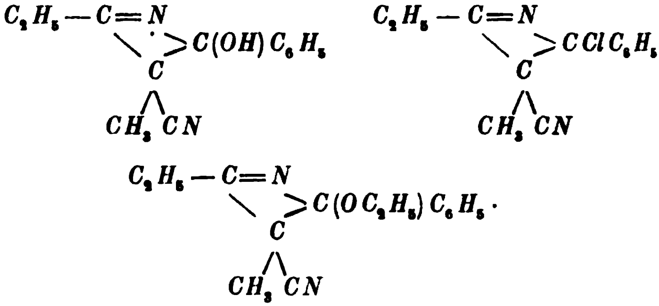
$$\begin{array}{c} C_2H_5C{=}N\cdot C(OH)C_6H_5\cdot \\ \diagdown \quad \diagup \\ CH_3\;CCN \end{array}$$

Denn durch Wechselwirkung gleicher Mol. dieser Verbindung und von Fünffach-Chlorphosphor erhält man ein in feinen Nadeln von 97° Schmelzpunkt krystallisirendes Product von der Zusammensetzung: $C_{13}H_{13}N_2Cl$ (gef. $N = 12,47$ %, berechnet 12,05 %. Gef. $Cl = 15,32$ %, berechn. 15,26 %).

Seine Constitution ist kaum anders auszudrücken, als durch die Formel:



Dasselbe liefert mit alkoholischem Kali, indem Aethoxyl die Stelle von Chlor einnimmt, die krystallinische, bei 55° schmelzende Aethoxylverbindung, welche mit concentrirter Salzsäure im Rohr auf 160° erhitzt, unter Abspaltung von Chloräthyl glatt in das ursprüngliche »Benzoyldipropionitril« umgewandelt wird. Letzteres entsteht auch durch gleiche Behandlung des Chlorids (mit Salzsäure). Hiernach werden die gegenseitigen Beziehungen dieser drei Körper am besten durch folgende Formeln ausgedrückt:



d. Acetylchlorid verhält sich ebenfalls ganz anders gegen Di-Acetonitril, als gegen Di-Propionitril. Mit ersterem in ätherischer Lösung zusammengebracht, liefert es zunächst ein Additionsproduct: $(C_4H_6N_2)_2 \cdot CH_3COCl$, welches, durch Wasser zersetzt, unter Abspaltung von Ammoniak, Salz- und Essigsäure in eine Base von der Zusammensetzung: $C_8H_9N_3$ übergeht. Diese hat mit einem Acetylderivat des Di-Acetonitrils gar nichts

zu thun (über eine andere Bildungsweise der Base siehe folgenden Abschnitt 5).

Dipropionitril und Acetylchlorid reagiren dagegen in normaler Weise unter Bildung eines Monoacetyldipropionitrils: $C_6H_9(CO\,CH_3)N_2$, welches, nicht krystallinisch, als ein in Wasser nicht, in Säuren leicht lösliches Oel gewonnen wird.

Benzoacetodinitril scheint sich gegen Acetylchlorid ähnlich dem Di-Acetodinitril zu verhalten; wenigstens entsteht zunächst eine sehr unbeständige Doppelverbindung. Die Zersetzung dieser soll noch genauer erforscht werden.

5. Einwirkung von Chlorkohlensäureäther auf Dinitrile.

Die Untersuchung dieser Reaction hat ergeben, dass sich das Di-Acetonitril dem Chlorkohlensäureäther gegenüber ganz anders verhält, als das Di-Propionitril, während das Benzoacetodinitril wahrscheinlich ein dem ersteren ähnliches Verhalten zeigt.

Di-Acetonitril und Chlorkohlensäureäther.

Beide treten schon bei gewöhnlicher Temperatur langsam in Wechselwirkung. Zur Beförderung der Reaction wurden die Körper in Röhren eingeschlossen (im Verhältniss 3 : 7) und einige Stunden lang auf 100° erhitzt. Die ziemlich fest gewordene Masse gab an trocknen Aether, ausser Chlorkohlensäureäther einen chlorfreien Körper (a) ab, während ein weisses Salz (b) ungelöst zurückblieb.

Der erstere (a), nach Abdunsten des $Cl\,COOC_2H_5$ durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser und dann aus Ligroin gereinigt, bildet weisse Blättchen von 84° Schmelzpunkt. Die Vermuthung, es sei Carboxäthyl ($COOC_2H_5$) an Stelle eines Atoms Wasserstoff des Di-Acetonitrils eingetreten, hat sich nicht bestätigt. Die Zahlen der Analysen stimmten am besten auf die Formel: $C_{10}H_9N_3O_3$, aus welcher eine Beziehung zu dem Diacetonitril bisher nicht abgeleitet werden konnte.

	Berechnet	Gefunden	
C	54,8 %	55,05	55,15 %
H	4,1 »	4,7	—
N	19,2 »	19,3	19,7 »

Das in Aether unlösliche, chlorhaltige Product (b), das sich bei der näheren Untersuchung und Analyse als nicht einheitlich erwies, lieferte, mit Kalilauge behandelt, unter starker Ammoniakentwicklung ein chlorfreies Product, welches, aus heissem Wasser umkrystallisirt, eine bei 221—222° schmelzende Base von der Zusammensetzung: $C_8H_9N_3$ ergab.

	Berechnet	Gefunden
C	65,31 %	65,4 %
H	6,12 »	6,0 »
N	28,57 »	28,2 »

Bei näherer Untersuchung hat sich gezeigt, dass diese Verbindung mit der von Holtzwart[1]) aus Di-Acetonitril und Acetylchlorid durch Zersetzung mit Wasser erhaltenen identisch ist. Ihre Entstehung beruht auf dem Austritt eines Mol. Ammoniak aus 2 Mol. Di-Acetonitril.

Bisher war diese Base nur flüchtig beschrieben. Sie ist in Wasser sehr schwer, in Alkohol wenig, in Aether und Benzol noch weniger löslich. Ihre salzsaure Lösung wird, selbst stark verdünnt, durch Platinchlorid gefällt. Das schöne, in hellgelben, langen, dünnen Prismen krystallisirende Doppelsalz: $(C_8H_9N_3 \cdot HCl)_2PtCl_4$ (*Pt* gefunden 27,65 %, berechnet 27,72 %) scheidet sich, zumal nach Rühren mit dem Glasstabe, fast vollständig aus.

Mit Essigsäureanhydrid gekocht, geht die Base in das Acetylderivat: $C_8H_8(COCH_3)N_3$ über, welches aus Alkohol in schneeweissen Nadeln von 250° Schmelzpunkt krystallisirt.

	Berechnet	Gefunden
C	63,45 %	63,50 %
N	22,22 »	22,5 »

Salpetrige Säure verwandelt die Base unter Stickstoffentwickelung in ein sauerstoffhaltiges Product: $C_8H_8N_2O$. Man löst zweckmässig jene in verdünnter Schwefelsäure und fügt, ohne zu erwärmen, überschüssige Lösung von Natriumnitrit hinzu. Sehr bald beginnt die Abscheidung eines weissen Niederschlags, welcher aus heissem Alkohol in hübschen Nadelaggregaten krystallisirt. Die Analyse ergab folgende Werte:

---

1) Journ. pr. Chem. (2) XXXIX, 236. Vergl. Abschnitt 4.

	Berechnet	Gefunden
C	65,0 %	64,86 %
H	5,43 »	5,41 »
N	19,1 »	18,92 »

Eine Verbindung von gleicher Zusammensetzung und sehr ähnlicher Beschaffenheit ist durch Zersetzung des Di-Acetonitrils mit kochendem Wasser erhalten worden (siehe Abschnitt 1). An und für sich war die Entstehung des gleichen Körpers aus der obigen Base mit salpetriger Säure sehr wahrscheinlich. Jedoch hat der Vergleich beider unverkennbare Verschiedenheiten ergeben. Da sie sich aber chemisch sehr ähnlich verhalten, so ist die Frage nach ihrer Constitution noch schwieriger geworden und bisher ungelöst geblieben.

Während der aus der Base $C_8H_9N_3$ erhaltene Körper (α) aus Wasser in kleinen Nädelchen krystallisirt, bildet der isomere (β) lange, glänzende Nadeln. Die Löslichkeit beider im Wasser ist einander ähnlich, die in absolutem Alkohol dagegen weist eine beträchtliche Verschiedenheit auf:

	α	β
100 Theile Wasser lösen bei 16°	0,042	0,052
100 Theile Alkohol lösen bei 16°	0,09	0,54

Beide Verbindungen haben weder einen bestimmten Schmelzpunkt, noch scharfen Zersetzungspunkt; jedoch liegt der letztere bei α höher: über 260°, während β sich schon oberhalb 230° zu schwärzen beginnt.

Um zu prüfen, ob in diesen Verbindungen Carbonylgruppen enthalten sind, die durch Phenylhydrazin oder salzsaures Hydroxylamin angegriffen werden, wurde jede der beiden mit diesen Agentien stark erhitzt; jedoch konnte keine Veränderung bemerkt werden. — Essigsäureanhydrid bildet weder aus der einen noch der andern Verbindung ein stabiles Acetylderivat; es scheint vielmehr dabei β in α umgewandelt zu werden.

Nach der Bildungsweise des Körpers β (siehe Abschnitt 1) mag die Annahme, er sei Dicyanmesityloxyd, einstweilen gelten Der von Holtzwart[1]) daraus mit Fünffach-Chlorphosphor gewonnenen Verbindung: $C_8H_6N_2$ würde dann muthmasslich die Constitution:

---

1) Journ. pr. Chem. (2) XXXIX, 242.

$$\begin{array}{c} CH_3 \cdot C = C \cdot CN \\ \quad\;\; | \quad\;\; | \\ CN \cdot C = C \cdot CH_3 \end{array}$$

zukommen.

Di-Propionitril und Chlorkohlensäureäther treten unter den oben beschriebenen Bedingungen ebenfalls in Wechselwirkung, doch verhält sich das Product ganz anders. Einmal ist sehr hoher Druck vorhanden (CO_2), sodann wird der in Aether unlösliche grössere Theil desselben von Wasser klar aufgenommen: er besteht aus Chlorammonium und dem Salz einer sehr flüchtigen, stark narcotisch riechenden Base, die bisher nicht rein gewonnen werden konnte.

Die Versuche über die Wechselwirkung von Benzoacetodinitril und Chlorkohlensäureäther sind ebenfalls noch nicht abgeschlossen.

6. Condensation der Dinitrile mit Benzaldehyd.

Bei den Versuchen, die drei zur Untersuchung vorliegenden Dinitrile mit Benzaldehyd zu condensiren, zeigte es sich, dass jedes derselben auf eine besondere Weise reagirt. Die Versuche wurden in der gleichen Art, wie folgt, ausgeführt: Zu einer Lösung von 1 Mol. des betreffenden Dinitrils in der drei- bis fünffachen Menge Eisessig wurde Benzaldehyd ($1^1/_2$—2 Mol.), sodann concentrirte wässrige Salzsäure (mit etwas mehr als 1 Mol. HCl) zugesetzt. Sofort machte sich eine Reaction bemerklich, sowohl durch Wärmeentwicklung, als besonders durch Abscheidung einer krystallinischen, sich allmählich vermehrenden Fällung. Nach mehrtägigem Stehen wurde das Product verarbeitet. War ein reichlicher Niederschlag gebildet (wie bei a und b), so wurde dieser filtrirt und nach Auswaschen mit Wasser durch Umkrystallisiren gereinigt; das mit viel Wasser verdünnte Filtrat lieferte, nachdem durch Kochen der überschüssige Benzaldehyd verjagt war, noch mehr von dem Condensationsproduct. Die Ergebnisse der Versuche waren folgende.

a. Di-Acetonitril lieferte eine Verbindung von der Zusammensetzung: $C_{15}H_{13}N_3$, welche demnach aus 2 Mol. des Dinitrils und 1 Mol. Benzaldehyd unter Austritt von je 1 Mol. Ammoniak und Wasser entstanden ist. Dieselbe bildet schöne

weisse Nadeln von 205° Schmelzpunkt, ist nicht in Wasser, wenig in Aether, Benzol, ziemlich in Alkohol löslich.

Analyse.

	Berechnet	Gefunden	
C	76,59 %	75,8	76,2 %
H	5,53 »	5,6	4,9 »
N	17,88 »	17,8	17,8 »

Da bei dem Diacetonitril die Tendenz beobachtet ist, sich unter günstigen Umständen zu condensiren, z. B. aus 2 Mol. desselben unter Austritt von Ammoniak die Base $C_8H_9N_3$ zu bilden (siehe oben), so ist sehr wahrscheinlich, dass obiges Product $C_{15}H_{13}N_3$ aus gleichen Mol. jener (nascirenden) Base und Benzaldehyd unter Austritt von Wasser hervorgeht:

$$C_8H_9N_3 + C_6H_5COH = H_2O + C_8H_7(CHC_6H_5)''N_3.$$

Versuche, diese Vermuthung durch Synthese der fraglichen Verbindung aus beiden Conponenten zu bestätigen, haben keinen Erfolg gehabt. Ebenso wenig konnte durch Spaltung derselben mit Salzsäure die Base $C_8H_9N_3$, sowie Benzaldehyd aufgefunden worden. Doch sollen die Bemühmungen, die Constitution des Körpers aufzuklären, noch fortgesetzt werden.

b. Aus Benzoacetodinitril und Benzaldehyd bildet sich unter den oben beschriebenen Bedingungen eine Verbindung durch Condensation gleicher Mol. der Ingredienzien unter Austritt von 1 Mol. Wasser, gemäss der Gleichung:

$$C_9H_8N_2 + C_6H_5COH = H_2O + C_9H_6(CHC_6H_5)''N_2.$$

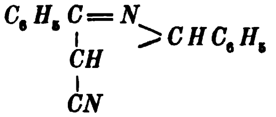
	Berechnet	Gefunden
C_{16}	82,75 %	82,5 %
H_{12}	5,18 »	4,9 »
N_2	12,07 »	11,85 »

Das Condensationsproduct: Benzyliden-Benzoacetodinitril ist in Wasser nicht, in Alkohol wenig, in Aether kaum löslich; aus heissem Alkohol krystallisirt es in rhombischen Blättchen, welche sehr hoch schmelzen. Ob diese Verbindung durch Austritt der 2 At. Wasserstoff des Complexes (CH_2CN)

oder eines derselben und des Imidwasserstoffs entstanden ist, ob sie also nach der Formel:

$$C_6H_5C(NH)\cdot C(CHC_6H_5)''CN$$

oder



zusammengesetzt ist, bleibt noch unentschieden. Auch hier sind weitere Untersuchungen zur Aufklärung der Constitution dieses Körpers angezeigt.

c. Dipropionitril scheint sich mit Benzaldehyd unter gleichen Bedingungen, wie die zwei andern Dinitrile, behandelt, gar nicht zu condensiren, wenigstens konnte das Product einer solchen Reaction nicht isolirt werden.

7. Einwirkung von Diazobenzolchlorid auf Dinitrile.

Die Versuche wurden so ausgeführt, dass man die weingeistige, mit einem Ueberschuss essigsauren Natriums versetzte Lösung von 1 Mol. des Dinitrils mit der kalten, frisch (nach gewöhnlichem Verfahren) bereiteten Lösung von etwas mehr als 1 Mol. Diazobenzolchlorid langsam vermischte. Der Zusatz von Natriumacetat soll die vielleicht ungünstige Wirkung der in der Diazolösung enthaltenen freien Salzsäure aufheben. — Durch die Versuche war vor Allem festzustellen, ob jedes der drei Dinitrile im Stande ist, ein Benzolazo-Derivat zu bilden.

a. Di-Acetonitril und salzsaures Diazobenzol.

Bei der Wechselwirkung dieser beiden scheidet sich ein tiefbrauner, aus Nädelchen bestehender Körper aus, der aus viel Wasser, Alkohol, Aether oder Ligroïn in langen, gelben, seideglänzenden Nadeln von 165—166° Schmelzpunkt krystallisirt. Die Zusammensetzung des einmal umkrystallisirten Productes wies auf ein molekulares Gemisch zweier Verbindungen hin, die unter obigen Umständen sehr wohl entstehen konnten, nämlich:

$$CH_3C(NH)\cdot C(N_2C_6H_5)HCN + CH_3CO\cdot C(N_2C_6H_5)HCN.$$

	Berechnet	Gefunden
C	64,34 %	64,40 %
H	5,11 »	5,30 »
N	26,28 »	26,43 »

Wurde das Umkrystallisiren dieses Körpers aus Alkohol unter Zusatz von Thierkohle und wenig Salzsäure wiederholt, so blieb zwar der Schmelzpunkt der gleiche: 165°, auch das Aussehen der Substanz fast unverändert, jedoch hatte diese jetzt die Zusammensetzung des Benzolazocyanacetons:

$$CH_3CO\cdot \underset{\displaystyle H}{\overset{|}{C}}(N_2C_6H_5)CN.$$

	Berechnet	Gefunden	
C	64,2 %	64,0 %	—
H	4,8 »	4,4 »	—
N	22,46 »	22,4 »	22,5 %

Die Entstehung desselben aus dem primär gebildeten Benzolazodiacetonitril, sowie die des letzteren lässt sich, wie folgt, ausdrücken: Zuerst tritt der Complex $(N_2C_6H_5)'$ an Stelle eines At. Wasserstoff des Cyanomethyls (CH_2CN); in Folge der Wirkung von Salzsäure wird sodann das Imid (NH) durch Sauerstoff ersetzt:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} CH_3C(NH) \\ \,| \\ CH_2CN \end{array} + C_6H_5N_2Cl = HCl + \begin{array}{l} CH_3C(NH) \\ \,| \\ HC(N_2C_6H_5)CN \end{array}$$

$$\text{II.}\quad \begin{array}{l} CH_3C(NH) \\ \,| \\ HC(N_2C_6H_5)CN \end{array} + H_2O + HCl = H_4NCl + \begin{array}{l} CH_3CO \\ \,| \\ HC(N_2C_6H_5)CN \end{array}$$

Zuerst bildet sich ein molekulares Gemisch der beiden durch die Gleichungen angezeigten Verbindungen (siehe oben). Ammoniak war als Product der Reaction immer reichlich nachzuweisen.

Um die Ketonnatur des zuletzt beschriebenen Körpers, also des Benzolazocyanacetons nachzuweisen, wurde er in alkoholischer Lösung mit Phenylhydrazin einige Zeit erhitzt; beim Abkühlen schieden sich seideglänzende gelbe Nadeln aus, die keinen scharfen Schmelzpunkt hatten (162—170°). Aus

dem Stickstoffgehalt[1]) derselben (gefunden 25,05 %, berechnet 25,08 %) ergiebt sich, dass das erwartete Hydrazon:

$$\begin{array}{l} CH_3C{=}N_2HC_6H_5 \\ \quad\;| \\ CNCHN_2C_6H_5 \end{array}$$

entstanden ist.

b. Benzoacetodinitril und Diazobenzolchlorid.

Bei diesem Versuche wurde essigsaures Natrium erst nach dem Vermischen der kalten Lösungen von Diazobenzolchlorid und Benzoacetodinitril zugesetzt; die bald ausgeschiedene braune Masse liefert, aus Alkohol mehrmals umkrystallisirt, schöne gelbe, bei 135° schmelzende Nadeln, welche die Zusammensetzung des Benzolazocyanacetophenons:

$$C_{15}H_{11}N_3O = C_6H_5CO\,.\,CH(N_2C_6H_5)CN$$

besitzen.

	Berechnet	Gefunden
C	72,3 %	72,3 %
H	4,45 »	5,0 »
N	16,9 »	17,0 »

Diese Verbindung, deren Entstehung nach dem unter a. Gesagten ohne Weiteres verständlich ist, hat die Eigenschaft einer Säure, löst sich mit intensiv gelber Farbe in wässrigem Ammoniak, liefert ein gelbes, in Nädelchen krystallisirendes Silbersalz. Dieses Verhalten spricht zu Gunsten der oben für diesen Körper angenommenen Constitution, welche wahrscheinlicher ist, als die der isomeren Hydrazonverbindung:

$$\begin{array}{l} C_6H_5CO\cdot C{=}N{-}NHC_6H_5 \\ \qquad\qquad | \\ \qquad\quad\; CN \end{array}$$

c. Dipropionitril und Diazobenzolchlorid.

Bei dem ersten mit diesen Ingredienzien ausgeführten Versuche entstand allmählich ein gelber, krystallinischer Niederschlag, der — im Gegensatz zu den oben auf ähnliche Weise

[1]) Die Zahlen für Kohlenstoff fielen infolge der ausserordentlich schweren Verbrennlichkeit der Substanz stets zu niedrig aus, während die für Wasserstoff gut stimmten: gefunden 5,06 und 4,9, berechnet: 5,07.

erhaltenen Producten — in Aether grösstentheils unlöslich war. Nach längerem Digeriren mit diesem zeigte der Körper den Schmelzpunkt 151°, erwies sich bei der mikroskopischen Untersuchung als einheitlich, aus Prismen bestehend und lieferte, analysirt, Zahlen, die auf die Zusammensetzung: $C_{12}H_{14}N_4$ hinweisen.

	Berechnet	Gefunden	
C	67,30 %	67,80	68,00 %
H	6,55 »	—	5,75 »
N	26,15 »	26,01	25,95 »

Die Entstehung einer solchen Verbindung erhellt aus der Gleichung:

$$C_6H_{10}N_2 + C_6H_5N_2Cl = HCl + C_{12}H_{14}N_4.$$

Ein zweiter und dritter Versuch, unter nahezu gleichen Verhältnissen ausgeführt. lieferte auffallender Weise ein in Aether lösliches Product, welches, durch Umkrystallisiren aus Alkohol mit Thierkohle gereinigt, braune, glänzende Nadeln von 149° Schmelzpunkt bildet. Durch Behandeln mit Salzsäure wird dasselbe nicht verändert und scheint nach seinem Stickstoffgehalt[1] (gefunden 25,95 %, berechnet 26,15 %) mit obiger Verbindung isomer zu sein.

Durch die Wechselwirkung von Dipropionitril und Diazobenzolchlorid können folgende zwei Benzolazo-Verbindungen entstehen:

$$\begin{array}{l} C_2H_5C(NH) \\ \quad | \\ CH_3C\cdot(N_2C_6H_5)CN \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} C_2H_5C(N\cdot N_2C_6H_5)\cdot \\ \quad | \\ CH_3CHCN \end{array}$$

Die Versuche zur Aufklärung dieser Verhältnisse sollen gelegentlich wieder aufgenommen werden.

8. Die Einwirkung von salpetriger Säure auf Dinitrile hat bisher nur bei dem Benzoacetodinitril zu einigermassen

---

1) Bei vier Verbrennungen wurden für Kohlenstoff zu niedrige Werthe gefunden.

bestimmten Ergebnissen geführt, während die unter gleichen Bedingungen aus Diaceto- und Dipropionitril entstehenden Producte in brauchbarer Form nicht zu gewinnen waren.

Leitet man längere Zeit in die alkoholische Lösung von Benzoacetodinitril salpetrigsaures Gas und lässt dieselbe einige Stunden stehen, so scheidet sich eine weisse, aus seideglänzenden Nadeln bestehende Verbindung (a) von 151° Schmelzpunkt ab; durch Sättigen des Filtrates mit N_2O_3 erhält man mehr davon. Endlich wird aus dem letzten Filtrat durch Zusatz von Aether in reichlicher Menge ein Niederschlag (b) gefällt. Beide Körper, in Wasser löslich, geben mit verdünnten Säuren salpetrige Säure, mit Kalilauge erwärmt Ammoniak. Nach der Analyse, die durch nicht völlig zu vermeidende Bildung von Stickoxyd erschwert und, namentlich bezüglich der Bestimmungen von Wasserstoff und Stickstoff ungenau werden, kann man beide Verbindungen als salpetrigsaure Salze des durch Nitrosirung des Benzoacetodinitrils entstandenen Körpers:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 \cdot C = N \cdot NO \\ | \\ CN \cdot C = NOH \end{array}$$

betrachten, und zwar b als Salz mit 1 Mol. NO_2H, a mit $^1/_2$ Mol. NO_2H.

Mit dieser Auffassung steht die Zersetzung der gedachten Salze durch Chlorwasserstoffsäure im Einklange. Beide liefern damit eine Verbindung, die als Isonitrosocyanacetophenon: $C_6H_5CO \cdot C(NOH)CN$ zu betrachten und aus obigen Salzen durch Abspaltung von salpetriger Säure und Ammoniak entstanden ist, z. B.

$$\begin{array}{l} C_6H_5C = N \cdot NO \\ \quad | \\ \quad C(NOH)CN \end{array} \cdot NO_2H + HCl + 2H_2O =$$

$$\begin{array}{l} C_6H_5CO \\ \quad | \\ \quad C(NOH)CN \end{array} + 2NO_2H + NH_4Cl\,.$$

Aus Benzol krystallisirt das so erhaltene Isonitrosoderivat in hübschen Rosetten; es schmilzt bei 122°.

Analyse

	Berechnet	Gefunden
C	62,07 %	61,5 %
H	3,41 »	3,8 »
N	15,91 »	16,2 »

Durch Erhitzen mit wässrigen Alkalien wird die Verbindung unter Entwickelung von Ammoniak zersetzt; in der Lösung ist Cyanwasserstoff und Benzoësäure nachzuweisen. Sie bildet, wie zu erwarten, Salze, so ein Silbersalz: $C_6H_5CO \cdot C(NOAg)CN$, welches frisch gefällt tief roth, getrocknet hell rosa aussieht (Ag gefunden 38,15 %, berechnet 38,4). — Mit wässriger Lösung von Ferrosulfat giebt obige Verbindung eine schön tiefblaue Färbung, resp. Fällung, die von Aether leicht aufgenommen wird.

Die Versuche über die Producte der Einwirkung von salpetriger Säure auf Dinitrile sollen fortgesetzt werden.

Ohne schon jetzt nähere Erörterungen über die Ursachen der Verschiedenheiten im chemischen Verhalten der analog zusammengesetzten Dinitrile anzustellen, seien folgende Bemerkungen gemacht:

Die beobachteten Verschiedenheiten sind nur zum geringeren Theil zu erklären durch das verschiedenartige Verhalten der aus den Dinitrilen durch Einwirkung von Wasser und Säuren hervorgehenden Cyanketone (s. namentlich Abschnitt 1).

Die Hauptursache des abweichenden Verhaltens der Dinitrile ist vielmehr in dem Einfluss zu suchen, den die Radicale Methyl, Phenyl, Aethyl auf die übrigen Atomcomplexe ausüben. Man vergleiche insbesondere das Diacetonitril und das Benzoacetodinitril:

$$CH_3C(NH)CH_2CN \quad \text{und} \quad C_6H_5C(NH) \cdot CH_2CN\,,$$

die sich in ihrer Zusammensetzung nur dadurch unterscheiden, dass das erstere Methyl, das zweite Phenyl in gleicher Function enthält. Wie verschieden ist ihr Verhalten zu Hydroxylamin (Abschn. 3), zu Benzoylchlorid (4), auch bei der Condensation mit Benzaldehyd (6)! Das Dipropionitril: $C_2H_5 \cdot C(NH)CH(CH_3)CN$ zeigt in manchen Reactionen ein Verhalten, welches dem des Benzoacetodinitrils ähnlicher ist, als dem von Diacetonitril.

Ich gedenke, die Charakteristik der Dinitrile durch Vervollständigung obiger Versuchsreihen unter Hinzunahme anderer dimolekularer Nitrile, sowie durch Beobachtung neuer Reactionen thunlichst bald abzurunden und zu vervollkommnen.

Zum Schluss hebe ich mit dem Ausdruck besten Dankes hervor, dass ich bei Ausführung meiner Versuche von meinem Assistenten, Herrn Dr. Georg Zuschlag, in ausgezeichneter Weise unterstützt worden bin.

Leipzig, im September 1892.

Otto Staude in Rostock, *Ueber die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen.* Vorgelegt von d. w. M. Ad. Mayer.

Einleitung.

Es dürfte von Interesse sein, die Lie'sche Theorie der Transformationsgruppen in analoger Weise, wie sie Lie mit so ausgezeichnetem Erfolge auf die Theorie der geodätischen Linien einer Oberfläche, die Bahncurven der Trägheitsbewegung eines Punktes, angewendet hat (vgl. unten S. 432, Anm. 3), überhaupt für die Theorie der Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche unter Einfluss einer Kräftefunction zu verwerthen.

Einen Versuch dieser Art enthält die vorliegende Mittheilung. Sie entwickelt in § 1 der Vollständigkeit wegen zunächst die von der Zeit freie Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahncurve des bewegten Punktes und untersucht dann in § 2 und § 3 die Bedingungen dafür, dass diese Differentialgleichung bei einer infinitesimalen Transformation invariant bleibt. Diese Betrachtungen sind mit geringen Abweichungen (vgl. unten S. 434, Anm. 1) den Lie'schen Untersuchungen über die Bahncurven der Trägheitsbewegung nachgebildet. Dagegen enthalten § 4 und besonders § 5 weitergehende Folgerungen, welche gerade für die allgemeinere Bewegung unter Einfluss einer Kräftefunction von Wichtigkeit sind. In § 6 wird endlich eine Anwendung auf die Bewegung eines Punktes in der Ebene unter Einfluss einer Kräftefunction angeschlossen.

§ 1.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahncurve des bewegten Punktes.

Auf einer festen Oberfläche bewegt sich ein materieller Punkt unter Einfluss einer Kräftefunction. In einem beliebig gewählten System isothermer Coordinaten u, v auf der Oberfläche sei das Quadrat des Linienelementes:

$$ds^2 = E(u, v) \cdot (du^2 + dv^2) \tag{1}$$

und die Kräftefunction:

$$H = H(u, v)\,. \tag{2}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten dann, wenn wir die Differentialquotienten nach der Zeit t mit Accenten bezeichnen und zur Abkürzung mit

$$T = \tfrac{1}{2} E(u'^2 + v'^2) \tag{3}$$

die lebendige Kraft benennen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) = \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial u}\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) = \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial v}\,. \tag{4}$$

Entwickeln wir diese Gleichungen und kennzeichnen die partiellen Differentialquotienten nach u und v durch die Indices 1 und 2, so nehmen sie die Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} Eu'' + \tfrac{1}{2} E_1 u'^2 + E_2 u' v' - \tfrac{1}{2} E_1 v'^2 &= H_1 \\ Ev'' - \tfrac{1}{2} E_2 v'^2 + E_1 u' v' + \tfrac{1}{2} E_2 v'^2 &= H_2\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Zu ihnen tritt als bekanntes Integral die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2} E(u'^2 + v'^2) = H + h\,, \tag{6}$$

in welcher mit h die Integrationsconstante benannt ist.

Wir wollen nun die Zeit t eliminiren[1]). Durch Multiplication der beiden Gleichungen (5) mit $-v'$ und u' und nachherige Addition erhalten wir:

$$E(u' v'' - v' u'') + \tfrac{1}{2}(E_1 v' - E_2 u')(u'^2 + v'^2) = H_2 u' - H_1 v'\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass u' nicht identisch Null sei, dividiren wir diese Gleichung mit u'^3 und die Gleichung (6) mit u'^2 und bemerken, dass:

---

1) was auch mit Hülfe des Princips der kleinsten Action bewerkstelligt werden könnte, vgl. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action, Leipzig 1877.

$$\frac{v'}{u'} = \frac{dv}{du}, \quad \frac{u'v'' - v'u''}{u'^3} = \frac{d^2v}{du^2};$$

es ergiebt sich dann:

$$E\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{2}\left(E_1\frac{dv}{du} - E_2\right)\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right) = \left(H_2 - H_1\frac{dv}{du}\right)\frac{1}{u'^2}$$

$$E\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right) = 2(H + h)\frac{1}{u'^2}$$

und endlich mit Elimination von u'^2:

$$E\frac{d^2v}{du^2} - \frac{1}{2}\left(E_2 - E_1\frac{dv}{du}\right)\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)$$

$$= E\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)\frac{1}{2(H+h)}\left(H_2 - H_1\frac{dv}{du}\right).$$

In ähnlicher Weise hätten wir unter der Voraussetzung, dass v' nicht identisch Null sei, eine Differentialgleichung zwischen $\frac{d^2u}{dv^2}$, $\frac{du}{dv}$, u, v erhalten. Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

Hat das Quadrat des Linienelementes auf der Fläche in den Coordinaten u, v die Form:

(1) $$ds^2 = E(du^2 + dv^2)$$

und ist:

(2) $$H = H(u, v)$$

die Kräftefunction, so lautet die Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahncurve des bewegten Punktes:

(7) $$v'' = (1 + v'^2)\left\{\frac{E_2 - E_1 v'}{2E} + \frac{H_2 - H_1 v'}{2(H+h)}\right\}$$

mit

$$v' = \frac{dv}{du}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2}$$

oder:

(8) $$u'' = (1 + u'^2)\left\{\frac{E_1 - E_2 u'}{2E} + \frac{H_1 - H_2 u'}{2(H+h)}\right\}$$

mit

$$u' = \frac{du}{dv}, \quad u'' = \frac{d^2u}{dv^2}.$$

Mit $H =$ const. erhält man die Differentialgleichung der geodätischen Linie[1]).

§ 2.

Die Bedingungen für eine infinitesimale Transformation.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(9) \qquad p = \tfrac{1}{2}\log E + \tfrac{1}{2}\log(H + h),$$

so nimmt die Differentialgleichung (7) die Gestalt an:

$$(10) \qquad v'' = \omega(u, v, v') = (1 + v'^2)(p_2 - p_1 v').$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Differentialgleichung, bezüglich die ∞^2 Integralcurven derselben eine infinitesimale Transformation von dem Symbol[2]):

$$(11) \qquad Tf = \xi(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial f}{\partial v}$$

gestatten, ist die, dass die Gleichung[3]):

$$\xi\frac{\partial\omega}{\partial u} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial v} + \{\eta_1 + (\eta_2 - \xi_1)v' - \xi_2 v'^2\}\frac{\partial\omega}{\partial v'} - \{(\eta_2 - 2\xi_1) - 3\xi_2 v'\}\omega$$
$$+ \xi_{22}v'^3 - (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 + (\xi_{11} - 2\eta_{12})v' - \eta_{11} = 0$$

identisch in u, v und v' besteht. Mit Einsetzung des Werthes ω aus (10) nimmt die Gleichung die Form an:

$$(1 + v'^2)\{p_{12}\xi + p_{22}\eta - (p_{11}\xi + p_{12}\eta)v'\}$$
$$+ \{\eta_1 + (\eta_2 - \xi_1)v' - \xi_2 v'^2\}(-p_1 + 2p_2 v' - 3p_1 v'^2)$$
$$- \{(\eta_2 - 2\xi_1) - 3\xi_2 v'\}(1 + v'^2)(p_2 - p_1 v')$$
$$+ \xi_{22}v'^3 - (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 + (\xi_{11} - 2\eta_{12})v' - \eta_{11} = 0.$$

---

1) Vgl. GAUSS, Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 18. Ges. Werke Bd. IV, S. 243, wo der Winkel ϑ zu eliminiren und $G = E$, $F = 0$ zu setzen ist.

2) Vgl. LIE, Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt, S. 54.

3) Vgl. LIE, Untersuchungen über geodätische Curven, Mathematische Annalen Bd. XX, S. 364, Formel (3); LIE, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearbeitet und herausgegeben von SCHEFFERS, S. 363.

Es müssen nun zuerst die Coefficienten der Potenzen von v' einzeln verschwinden, wodurch wir, da v'^4 von selbst ausfällt, die vier Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}
&(p_{12}\xi+p_{22}\eta)-(\;p_1\eta_1-2p_2\xi_1+p_2\eta_2)-\eta_{11}=0\\
-&(p_{11}\xi+p_{12}\eta)+(-p_1\xi_1+3p_2\xi_2+2p_2\eta_1)+(\xi_{11}-2\eta_{12})=0\\
&(p_{12}\xi+p_{22}\eta)-(-p_2\eta_2+3p_1\eta_1+2p_1\xi_2)-(\eta_{22}-2\xi_{12})=0\\
-&(p_{11}\xi+p_{12}\eta)+(\;p_2\xi_2-2p_1\eta_2+p_1\xi_1)+\xi_{22}=0\,.
\end{aligned}$$

Führt man hier wieder den Werth (9) von p ein und setzt noch:

$$\log E = w\,, \tag{9'}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\{(w_{12}\xi+w_{22}\eta)-(w_1\eta_1-2w_2\xi_1+w_2\eta_2)-\eta_{11}\}\\
&\quad+\frac{1}{2(H+h)}\{(H_{12}\xi+H_{22}\eta)-(H_1\eta_1-2H_2\xi_1+H_2\eta_2)\}\\
&\quad-\frac{H_2}{2(H+h)^2}(H_1\xi+H_2\eta)=0\\
&\tfrac{1}{2}\{-(w_{11}\xi+w_{12}\eta)+(-w_1\xi_1+3w_2\xi_2+2w_2\eta_1)+(\xi_{11}-2\eta_{12})\}\\
&\quad+\frac{1}{2(H+h)}\{-(H_{11}\xi+H_{12}\eta)+(-H_1\xi_1+3H_2\xi_2+2H_2\eta_1)\}\\
&\quad+\frac{H_1}{2(H+h)^2}(H_1\xi+H_2\eta)=0\\
&\tfrac{1}{2}\{(w_{12}\xi+w_{22}\eta)-(-w_2\eta_2+3w_1\eta_1+2w_1\xi_2)-(\eta_{22}-2\xi_{12})\}\\
&\quad+\frac{1}{2(H+h)}\{(H_{12}\xi+H_{22}\eta)-(-H_2\eta_2+3H_1\eta_1+2H_1\xi_2)\}\\
&\quad-\frac{H_2}{2(H+h)^2}(H_1\xi+H_2\eta)=0\\
&\tfrac{1}{2}\{-(w_{11}\xi+w_{12}\eta)+(w_2\xi_2-2w_1\eta_2+w_1\xi_1)+\xi_{22}\}\\
&\quad+\frac{1}{2(H+h)}\{-(H_{11}\xi+H_{12}\eta)+(H_2\xi_2-2H_1\eta_2+H_1\xi_1)\}\\
&\quad+\frac{H_1}{2(H+h)^2}(H_1\xi+H_2\eta)=0\,.
\end{aligned}$$

Wir verlangen nun, dass diese Gleichungen nicht nur in u, v, sondern *auch in h identisch bestehen*, während ξ und η von h

unabhängig sein sollen. Dann müssen die Coefficienten der Potenzen von $(H+h)^{-1}$ einzeln verschwinden. Es folgt daher zunächst durch Nullsetzen der vier Coefficienten von $(H+h)^{-2}$, da H_1 *und* H_2 *nicht beide verschwinden können*:

$$H_1\xi + H_2\eta = 0\,. \tag{12}$$

Da diese Gleichung identisch in u, v besteht, so erhält man durch partielle Differentiation nach u und v:

$$H_{11}\xi + H_{12}\eta + H_1\xi_1 + H_2\eta_1 = 0, \quad H_{12}\xi + H_{22}\eta + H_1\xi_2 + H_2\eta_2 = 0,$$

womit sich die vier Coefficienten von $(H+h)^{-1}$ vereinfachen lassen und, gleich Null gesetzt, die vier Gleichungen geben:

$$-H_1(\xi_2+\eta_1) + 2H_2(\xi_1-\eta_2) = 0\,, \quad 3H_2(\xi_2+\eta_1) = 0$$
$$-3H_1(\xi_2+\eta_1) = 0\,, \quad H_2(\xi_2+\eta_1) + 2H_1(\xi_1-\eta_2) = 0\,.$$

Diese reduciren sich, da H_1 und H_2 nicht beide Null sind, auf:

$$\xi_1 - \eta_2 = 0\,, \quad \xi_2 + \eta_1 = 0\,. \tag{13}$$

Endlich bleiben noch die vier Bedingungen, welche sich durch Nullsetzen der Coefficienten von $(H+h)^0$ ergeben:

$$(14)\quad \begin{cases} (w_{12}\xi + w_{22}\eta) - (w_1\eta_1 - 2w_2\xi_1 + w_2\eta_2) - \eta_{11} = 0 \\ -(w_{11}\xi + w_{12}\eta) + (-w_1\xi_1 + 3w_2\xi_2 + 2w_2\eta_1) + (\xi_{11} - 2\eta_{12}) = 0 \\ (w_{12}\xi + w_{22}\eta) - (-w_2\eta_2 + 3w_1\eta_1 + 2w_1\xi_2) - (\eta_{22} - 2\xi_{12}) = 0 \\ -(w_{11}\xi + w_{12}\eta) + (w_2\xi_2 - 2w_1\eta_2 + w_1\xi_1) + \xi_{22} = 0\,. \end{cases}$$

Die Bedeutung der drei Bedingungen (12), (13) und der, vorläufig noch nicht mittels (13) reducirten, Bedingungen (14) ist die folgende:

Die vier Gleichungen (14) *allein* entsprechen dem hier zu übergehenden Falle $H =$ const. und sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass *die* ∞^2 *geodätischen Linien* der Oberfläche die infinitesimale Transformation (11) gestatten [1]).

---

1) Sie stimmen mit den von LIE, Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 367 unter (4) aufgestellten Gleichungen ihrer Bedeutung nach vollkommen überein, nur dass bei LIE die Form $ds^2 = e^w du\,dv$ des Linienelementes zu Grunde gelegt ist, während für den hier vorliegenden Zweck die Form $ds^2 = e^w(du^2 + dv^2)$ sich als zweckmässig erwies.

Die zwei Gleichungen (13) drücken aus, dass die infinitesimale Transformation (11) eine *conforme* ist[1]).

Die Gleichung (12) endlich bedeutet, dass das System der Niveaulinien der Kräftefunction auf der Fläche mit dem *System der Bahncurven*[2]) der infinitesimalen Transformation (11) übereinkommt. Denn die Differentialgleichungen dieser beiden Curvensysteme sind bezüglich:

$$H_1 du + H_2 dv = 0 \quad \text{und} \quad -\eta du + \xi dv = 0 \,.$$

Wir gelangen also zu dem folgenden Resultate:

Ein Punkt bewegt sich unter Einfluss einer Kräftefunction, die keine Constante ist, auf einer Oberfläche. Wir betrachten die ∞^2 *Bahncurven des bewegten Punktes, welche einem bestimmten Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft entsprechen. Sollen diese* ∞^2 *Curven, unabhängig von der Wahl des Werthes von h, eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Fläche zu den von Lie bestimmten Flächen gehört, deren* ∞^2 *geodätische Linien eine conforme infinitesimale Transformation gestatten, und dass die Niveaulinien der Kräftefunction auf der Fläche die Bahncurven dieser conformen infinitesimalen Transformation sind.*

§ 3.

Einführung besonderer isothermer Coordinaten.

Wenn man die Gleichungen (14) in der Weise verbindet, dass man die erste und dritte, sowie die zweite und vierte zuerst subtrahirt und dann addirt, so erhält man zuerst die zwei Gleichungen:

$$w_1(\xi_2 + \eta_1) + w_2(\xi_1 - \eta_2) - (\xi_{21} + \eta_{11}) - (\xi_{12} - \eta_{22}) = 0$$
$$w_1(\xi_1 - \eta_2) - w_2(\xi_2 + \eta_1) + (\xi_{22} + \eta_{12}) - (\xi_{11} - \eta_{21}) = 0 \,,$$

welche infolge von (13) schon erfüllt sind, und hernach die zwei Gleichungen:

1) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers, S. 81. Die Gleichungen (13) und (14) *zusammen* charakterisiren also den ersten der drei Lie'schen Fälle (Math. Ann. Bd. XX, S. 368, 372, 376), welche die Gleichungen (14) *allein* umfassen.

2) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt, S. 60.

$$(w_{12}\xi + w_{22}\eta) - (w_1\xi_2 + 2w_1\eta_1 - w_2\xi_1) - 2\eta_{11} = 0$$
$$-(w_{11}\xi + w_{12}\eta) + (w_2\eta_1 + 2w_2\xi_2 - w_1\eta_2) + 2\xi_{22} = 0,$$

welche in Folge von (13) folgendermaassen geschrieben werden können:

$$\frac{\partial}{\partial v}(w_1\xi + w_2\eta + \xi_1 + \eta_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(w_1\xi + w_2\eta + \xi_1 + \eta_2) = 0.$$

Daher reduciren sich die vier Gleichungen (14) mit Benutzung von (13) schliesslich auf die eine Gleichung:

(15) $$w_1\xi + w_2\eta + \xi_1 + \eta_2 = 2a,$$

wo $2a$ eine Constante ist.

Es bleiben jetzt im Ganzen folgende Bedingungsgleichungen übrig:

(15) $$w_1\xi + w_2\eta + \xi_1 + \eta_2 = 2a,$$

(13) $$\xi_1 - \eta_2 = 0, \quad \xi_2 + \eta_1 = 0,$$

(12) $$H_1\xi + H_2\eta = 0.$$

Wir wollen nun an Stelle der bisherigen, völlig willkürlich gewählten isothermen Coordinaten u, v auf der Fläche neue isotherme Coordinaten einführen.

Die Differentialgleichung der Bahncurven der infinitesimalen Transformation (11):

$$\xi dv - \eta du = 0$$

und die Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajectorien:

$$\xi du + \eta dv = 0$$

haben nämlich in Folge der Relationen (13) den gemeinsamen Multiplicator:

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2},$$

der immer bestimmt ist, da die reellen Grössen ξ, η nicht beide zugleich identisch verschwinden können, wenn die Gleichung (11) wirklich eine infinitesimale Transformation darstellen soll. Wir können daher durch die Gleichungen:

(16) $$du' = \frac{\xi dv - \eta du}{\xi^2 + \eta^2}, \quad dv' = \frac{\xi du + \eta dv}{\xi^2 + \eta^2}$$

zwei neue Variablen u', v' als Functionen der alten u, v definiren. Das Quadrat des Linienelementes stellt sich in diesen sofort in der Form dar:

$$(17)\qquad ds^2 = E(du^2 + dv^2) = E(\xi^2 + \eta^2)(du'^2 + dv'^2) \\ = E'(du'^2 + dv'^2) = e^{w'}(du'^2 + dv'^2)\,.$$

Die neuen Coordinaten u', v' sind wieder ein Paar isothermer Coordinaten.

Die infinitesimale Transformation:

$$(11)\qquad Tf = \xi\frac{\partial f}{\partial u} + \eta\frac{\partial f}{\partial v}$$

mag in den letzteren das Symbol:

$$T'f = \xi'\frac{\partial f}{\partial u'} + \eta'\frac{\partial f}{\partial v'}$$

haben. Es ist dann[1]:

$$\xi' = Tu' = \xi\cdot\frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2} + \eta\cdot\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} = 0$$

$$\eta' = Tv' = \xi\cdot\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} + \eta\cdot\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} = 1\,,$$

sodass:

$$(18)\qquad T'f = \frac{\partial f}{\partial v'}$$

wird.

Wir können also stets solche isotherme Coordinaten auf der Fläche einführen, in denen die conforme infinitesimale Transformation (11) das Symbol (18) hat; die Coordinatencurven $u' = \text{const.}$ sind die Bahncurven der infinitesimalen Transformation.

Denken wir uns nun von vornherein diese besonderen, der conformen infinitesimalen Transformation Tf eigenthümlichen isothermen Coordinaten u', v' eingeführt, so würden wir die Gleichungen (15), (13), (12) mit u', v', w', H', 0, 1 für u, v, w, H, ξ, η als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür gefunden haben, dass die ∞^2 einem beliebigen h entsprechenden Bahncurven des bewegten Punktes die infinitesimale

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt, S. 56, § 14.

Transformation gestatten. Die Gleichungen (13) fallen dann fort und die Gleichungen (15) und (12) werden:

$$\frac{\partial w'}{\partial v'} = 2a\,, \quad \frac{\partial H'}{\partial v'} = 0\,.$$

Es folgt daher:

$$w' = 2av' + 2\varphi(u')\,, \quad H' = \psi(u')\,,$$

wo $2\varphi(u')$ und $\psi(u')$ beliebige Functionen von u' sind. Wir erhalten somit, indem wir die Accente nachträglich wieder weglassen, die folgende Form des in § 2 gewonnenen Satzes:

Ein Punkt bewegt sich unter Einfluss einer Kräftefunction, die keine Constante ist, auf einer Oberfläche. Wir betrachten die ∞^2 *Bahncurven der Bewegung, welche einem bestimmten Werthe der Constanten h entsprechen. Sollen diese* ∞^2 *Curven, unabhängig von h, eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass auf der Fläche ein isothermes Coordinatensystem u, v existirt, in welchem sich das Quadrat des Linienelementes in der Form:*

$$ds^2 = e^{2av+2\varphi(u)}(du^2 + dv^2) \tag{19}$$

darstellt, während die Kräftefunction die Form $H(u)$ *hat. Die infinitesimale Transformation selbst stellt sich in diesem System durch das Symbol*

$$Tf = \frac{\partial f}{\partial v} \tag{20}$$

dar, sodass ihre Bahncurven $u = const.$ *mit den Niveaulinien* $H(u) = const.$ *zusammenfallen.*

§ 4.

Die Niveaulinien als Enveloppen der Bahncurven des bewegten Punktes.

Wenden wir in der auf ein beliebiges isothermes System bezüglichen Differerentialgleichung (7) die jetzt erhaltene Form (19) des Linienelementes und die Kräftefunction $H(u)$ an, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahncurven des bewegten Punktes:

$$\frac{dv'}{du} = (1 + v'^2)\left\{a - \varphi'(u)\cdot v' - \frac{1}{2}\,\frac{H'(u)\cdot v'}{H(u)+h}\right\}, \tag{21}$$

worin:

$$v' = \frac{dv}{du}, \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}, \quad H'(u) = \frac{dH}{du}.$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung zwischen u und v ist, eben weil sie die infinitesimale Transformation (20) gestattet, frei von v, also nur eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen u und v'.[1]) Ihr Integral hat die Form:

(22) $$F(u, v') = k$$

und scheidet aus den ∞^2 Bahncurven (h) des bewegten Punktes, die einem bestimmten h entsprechen, für jedes bestimmte k eine Schaar von ∞^1 Bahncurven (h, k) aus, welche ihrerseits die infinitesimale Transformation (20) gestattet, und deren Umhüllungscurve aus Bahncurven[2]) $u = \text{const.}$ der infinitesimalen Transformation (20) bestehen muss[3]). Ist die Auflösung der Gleichung (22) nach v' etwa:

(23) $$v' = \frac{1}{f(u, k)},$$

so müssen die Umhüllungscurven $u = \text{const.}$ der Gleichung genügen:

(24) $$f(u, k) = 0.$$

Da man umgekehrt diese Gleichung im Allgemeinen bei gegebenem u nach k auflösen kann, so folgt:

Jede Niveaucurve ist im Allgemeinen bei gegebenem h Umhüllungscurve eines Systems von ∞^1 Bahncurven (h, k) des bewegten Punktes.

In dem speciellen Falle $a = 0$, der für die Rotationsflächen und die auf ihnen abwickelbaren Flächen[4]) eintritt, ist das Integral (22) sofort angebbar und lautet (mit k^2 für k):

(22') $$\frac{2(H(u) + h)e^{2\varphi(u)}v'^2}{1 + v'^2} = k^2$$

---

1) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen, bearb. und hersg. von Scheffers, S. 383, § 6.

2) Es ist hier immer zu unterscheiden zwischen »Bahncurve des bewegten Punktes« und »Bahncurve der infinitesimalen Transformation«.

3) Vgl. Klein und Lie, Ueber diejenigen ebenen Curven etc., Mathematische Annalen, Bd. IV, S. 63, Nr. 10; S. 79, Nr. 24.

4) Vgl. Lie, Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 371.

oder in der Form (23):

$$(23') \qquad v' = \frac{k}{\sqrt{2(H(u)+h)e^{2\varphi(u)} - k^2}};$$

demnach bestimmt die Gleichung:

$$(24') \qquad 2(H(u)+h)\,e^{2\varphi(u)} - k^2 = 0$$

diejenigen Niveaulinien $u = \text{const.}$, welche Umhüllungscurven der ∞^1 Bahncurven (h, k) des bewegten Punktes sind.

Betrachten wir noch etwas näher die Rotationsfläche, deren Gleichung in gewöhnlichen Raumcoordinaten ist:

$$x^2 + y^2 = \omega^2(z)\,!$$

$\omega(z)$ soll eine beliebige Function von z bedeuten. Wir können dann:

$$ds^2 = e^{2\varphi(u)}(du^2 + dv^2)$$

annehmen, indem wir unter v die geographische Länge verstehen, ferner mittels der Gleichung:

$$u = \int \frac{\sqrt{1+\omega'^2(z)}}{\omega(z)}\,dz$$

z als Function von u dargestellt denken, damit $\log \omega(z)$ in eine Function von u verwandeln und diese $\varphi(u)$ nennen, sodass:

$$e^{\varphi(u)} = \omega(z)\,.$$

Die Gleichung (24') wird dann, wenn wir statt u wieder z einführen und $H(u)$ mit $H(z)$ bezeichnen:

$$2(H(z)+h)\,\omega^2(z) - k^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung bestimmt aber in der That, wie bekannt, diejenigen Parallelkreise der Rotationsfläche, welche die Schaar der ∞^1 Bahncurven (h, k) umhüllen; k ist dabei nichts anderes als die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die xy-Ebene des Coordinatensystems projicirten Bewegung.

§ 5.

Die Niveaulinien als Bahncurven des bewegten Punktes.

Die Differentialgleichung § 1, (7) wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $u' = \frac{du}{dt}$ nicht identisch Null sei. Wollen wir mit dieser Möglichkeit rechnen, so müssen wir die Differen-

tialgleichung § 1, (8) benutzen, welche bei der jetzigen Form von E und H (Schlusssatz von § 3) lautet:

$$(25)\quad u'' = (1+u'^2)\left\{\varphi'(u) - au' + \frac{1}{2}\frac{H'(u)}{H(u)+h}\right\},\quad u' = \frac{du}{dv},\quad u'' = \frac{d^2u}{dv^2}.$$

Dieser Differentialgleichung wird nun durch die Annahme $u = u_0$ genügt, wenn der constante Werth u_0 aus der Gleichung bestimmt wird:

$$(26)\qquad \varphi'(u) + \frac{1}{2}\frac{H'(u)}{H(u)+h} = 0.$$

Es folgt daher, sofern diese Gleichung auch bei gegebenem u zur Bestimmung von h dienen kann:

Jede Niveaulinie kann im Allgemeinen bei geeignetem Werthe von h Bahncurve des bewegten Punktes sein.

Um für diesen Fall, wo $u = u_0$ ist, auch v als Function der Zeit zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichungen § 1, (5), (6) zurück, welche mit $u = u_0$ und den jetzigen Formen von E und H die Gestalt annehmen:

$$(27)\quad -E\varphi'(u_0)\cdot v'^2 = H'(u_0),\quad v'' + av'^2 = 0,\quad \tfrac{1}{2}Ev'^2 = H(u_0) + h,$$

die Accente auf die Differentiation nach t bezogen. Die erste und dritte dieser Gleichungen sind in Folge der Bedingung (26) verträglich. Die mittlere giebt mit zwei Integrationsconstanten b und c:

$$(28)\qquad v' = \frac{1}{at+b},\quad v = \frac{1}{a}\log\frac{at+b}{c}.$$

Hiermit wird:

$$\tfrac{1}{2}Ev'^2 = \tfrac{1}{2}e^{2av+2\varphi(u_0)}\cdot v'^2 = \tfrac{1}{2}e^{2\varphi(u_0)}\cdot\frac{1}{c^2},$$

sodass die Constante c in (28), der letzten Gleichung (27) zufolge, mit h in der Beziehung steht:

$$c = \frac{e^{\varphi(u_0)}}{\sqrt{2(H(u_0)+h)}}.$$

Da $H(u) + h$ als Werth der lebendigen Kraft nicht negativ werden kann, so wird die Gleichung (26) nur unter der Bedingung bestehen können, dass $H'(u)$ und $\varphi'(u)$ für $u = u_0$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Diese Bedingung hat folgende Bedeutung:

In jedem Punkte u, v steht die in die Fläche fallende Componente der durch die Kräftefunction bestimmten Kraft auf der Curve $u = \text{const.}$ senkrecht und zwar weist ihre Richtung, je nachdem $H'(u)$ positiv oder negativ ist, nach der Seite des wachsenden oder des abnehmenden u.

Andererseits ist aber der Radius der geodätischen Krümmung der Curve $u = \text{const.}$ im Punkte u, v, und zwar positiv im Sinne des wachsenden und negativ im Sinne des abnehmenden u gerechnet, jederzeit durch die Formel:

$$(29) \qquad \varrho = -\frac{\sqrt{E}}{\varphi'(u)} = -\frac{e^{av+\varphi(u)}}{\varphi'(u)}$$

dargestellt[1]). Das Vorzeichen von ϱ hängt daher nur von dem Vorzeichen von $\varphi'(u)$ ab und ist diesem entgegengesetzt.

Je nachdem also $H'(u)$ und $\varphi'(u)$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben, stimmt die Richtung der in die Fläche fallenden Kraftcomponente mit der Richtung des Radius der geodätischen Krümmung überein oder nicht.

Es können also nur solche Niveaulinien Bahncurven der Bewegung des Punktes sein, längs deren die Richtung der in die Fläche fallenden Kraftcomponente mit der Richtung des Radius der geodätischen Krümmung übereinstimmt oder sozusagen nach der »geodätisch-concaven« Seite der Niveaulinie hinweist.

Dieser allgemeine Satz kann wiederum auf den Fall der Rotationsfläche angewendet werden, wo nach der Bezeichnung des § 4 die Bedingung (26), in der Variabeln z geschrieben, so lautet:

$$(26') \qquad 2(H(z) + h)\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} + H'(z) = 0\text{ [2]) }.$$

Ohne hierauf näher einzugehen, wollen wir nur ein Beispiel erwähnen, das gewöhnliche Kugelpendel. Hier bedeutet unser Satz, dass die Bewegung auf einem *Parallelkreis* der Kugel nur möglich ist, wenn derselbe *unterhalb* des Aequators liegt[3]). Betrachten wir nämlich einen unterhalb des Aequators liegenden Parallelkreis der Kugel, so wird derselbe von den grössten

1) Vgl. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, S. 243, Formel (5).

2) Vgl. Acta mathematica, Bd. XI, S. 319 f.

3) Vgl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen, 3. Aufl. (1878), S. 312, wo dieser Satz besonders bewiesen wird.

Kreisen, die seine geodätischen Tangenten sind, von oben her berührt, sodass seine »geodätisch-concave« Seite nach unten geht, nach gleicher Richtung, wie die in die Kugelfläche fallende Componente der Schwere. Dagegen geht die geodätisch-concave Seite eines oberhalb des Aequators gelegenen Parallelkreises nach oben, also nach der entgegengesetzten Seite, wie die in die Kugelfläche fallende Componente der Schwere.

Noch einfacher wird die Bedeutung unseres Satzes für die im folgenden § 6 zu erwähnende ebene Bewegung.

§ 6.

Die Bewegung eines Punktes in der Ebene.

Wenden wir das Resultat des § 2 auf die Ebene an, so ist diejenige conforme infinitesimale Transformation, welche die ∞^2 geodätischen Linien der Ebene invariant lässt, die conforme projective infinitesimale Transformation. Wir wollen diesen einfachen Fall wegen seiner Beziehung zur gewöhnlichen Theorie der Centralbewegung noch besonders betrachten.

Bewegt sich ein Punkt u, v in der Ebene unter Einfluss einer Kräftefunction $H(u, v)$, so können wir die beliebigen isothermen Coordinaten des § 1 und § 2 mit den gewöhnlichen Punktcoordinaten x, y identificiren. Wir haben dann in (1) und (9') $E = 1$ und $w = 0$ und die Gleichungen (15), (13) und (12) werden:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2a\,; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y} = 0\,.$$

Die drei ersten Gleichungen geben unmittelbar:

$$\xi = ax - by + \alpha\,, \quad \eta = bx + ay + \beta\,,$$ [1]

wo a, b, α, β Constanten sind.

Die neuen Variablen u', v' des § 3, die wir nunmehr u, v nennen wollen, entsprechen nach (16) den Gleichungen:

$$du = \frac{(ax - by + \alpha)\,dy - (bx + ay + \beta)\,dx}{(ax - by + \alpha)^2 + (bx + ay + \beta)^2}$$

$$dv = \frac{(ax - by + \alpha)\,dx + (bx + ay + \beta)\,dy}{(ax - by + \alpha)^2 + (bx + ay + \beta)^2}\,.$$

---

1) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers, S. 81.

Die Ausführung der Integration giebt mit den Abkürzungen:

$$x_0 = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}, \quad y_0 = -\frac{a\beta - b\alpha}{a^2 + b^2},$$

welche nur den auf das gewöhnliche Coordinatensystem zurückführenden Fall $a = 0$, $b = 0$ ausschliessen:

$$u = a \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_0}{x - x_0} - b \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$v = b \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_0}{x - x_0} + a \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Diese Formeln nehmen unter Einführung von Polarcoordinaten r, φ:

$$x - x_0 = r \cos\varphi, \quad y - y_0 = r \sin\varphi$$

die einfache Gestalt an:

$$(30) \qquad u = a\varphi - b \cdot \log r, \quad v = b\varphi + a \cdot \log r.$$

Das neue Isothermensystem, dessen Cuven $u =$ const. die Bahncurven der infinitesimalen Transformation sind, besteht also aus zwei Systemen logarithmischer Spiralen[1]. Es ergiebt sich also der Satz:

Ein Punkt bewegt sich in der Ebene unter Einfluss einer Kräftefunction. Wir betrachten die ∞^2 Bahncurven des bewegten Punktes, welche einem bestimmten Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft entsprechen. Dann und nur dann werden diese ∞^2 Bahncurven, unabhängig von h, eine infinitesimale Transformation gestatten, wenn die Niveaulinien der Kräftefunction ein System von Parallellinien (Fall $a = 0$, $b = 0$) oder ein System concentrischer und gleichwinkliger logarithmischer Spiralen bilden.

Das Quadrat des Linienelementes ist jetzt:

$$(31) \qquad ds^2 = \frac{e^{2\frac{av - bu}{a^2 + b^2}}}{a^2 + b^2}(du^2 + dv^2)$$

und wird daher die Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahn-

---

1) Vgl. Klein und Lie, Mathematische Annalen, Bd. IV, S. 61, Nr. 7, ferner Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, 1882, S. 237 ff. und Figur 58.

curven des bewegten Punktes aus (21) mit $\frac{a}{a^2+b^2}$ für a und $\frac{-bu}{a^2+b^2}$ für $\varphi(u)$:

$$(32)\quad \frac{dv'}{du} = (1+v'^2)\left\{\frac{a+bv'}{a^2+b^2} - \frac{1}{2}\frac{H'(u)\cdot v'}{H(u)+h}\right\}, \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Sie geht mit $a=0$, $b=-1$ in die Differentialgleichung 2. Ordnung der Bahncurven der gewöhnlichen Centralbewegung über

$$\frac{dv'}{du} + (1+v'^2)\left(v' + \frac{1}{2}\frac{H'(u)\cdot v'}{H(u)+h}\right) = 0,$$

welche das Integral hat:

$$\frac{2e^{2u}(H(u)+h)\,v'^2}{1+v'^2} = k^2$$

oder mit $u = \log r$, $v = -\varphi$, $\frac{dv}{du} = r\frac{d\varphi}{dr}$ in gewöhnlichen Polarcoordinaten geschrieben und nach $\frac{d\varphi}{dr}$ aufgelöst:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{k}{r\sqrt{2(H(r)+h)r^2 - k^2}}.$$

Wenn das Integral der allgemeinen Differentialgleichung (32), nach v' aufgelöst, die Form hat:

$$v' = \frac{1}{f(u,k)},$$

so bestimmt nach § 4 die Gleichung:

$$f(u,k) = 0$$

diejenigen Spiralen $u = \text{const.}$, welche Umhüllungscurven der ∞^1 Bahncuren (h, k) des bewegten Punktes sind. Im Falle der gewöhnlichen Centralbewegung haben wir in der That als Umhüllungscurven die concentrischen Kreise, welche der Gleichung genügen:

$$2(H(r)+h)r^2 - k^2 = 0.$$

Jede logarithmische Spirale $u = \text{const.}$ kann nach § 5 selbst Bahncurve des bewegten Punktes werden, falls h aus der Gleichung bestimmt wird:

$$-\frac{b}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\frac{H'(u)}{H(u)+h}=0 .$$

Jedoch muss nach dem zweiten Satze des § 5 längs der Spirale die Kraft nach der concaven Seite jener gerichtet sein. So kann für die Centralbewegung, wie bekannt, jeder um das Kraftcentrum beschriebene Kreis $r =$ const. Bahncurve des bewegten Punktes sein, wenn h und r durch die Gleichung verknüpft sind:

$$2(H(r)+h)+rH'(r)=0 ;$$

vorausgesetzt, dass die Centralkraft nach der concaven Seite der Niveaulinie gerichtet, d. h. eine anziehende Centralkraft ist.

Rostock, am 7. October 1892.

SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1892.

Sophus Lie, *Untersuchungen über Translationsflächen* (Abhandlung I).

Durch meine Untersuchungen über den tetraedalen Complex sowie über die Abbildung des linearen Liniencomplexes auf den Punktraum wurde ich schon im Jahre 1870 zur eingehenden Betrachtung derjenigen Flächen geführt, die durch *Translation* einer Curve erzeugt werden. Ich erkannte u. a., dass Monge's allgemeine Gleichung der Minimalflächen nur aussagt, dass jede derartige Fläche in zweifacher Weise durch Translation einer Minimalcurve erzeugt werden kann. Auf diese Bemerkung, die merkwürdiger Weise von älteren Mathematikern gar nicht berücksichtigt worden war, habe ich später eine bemerkenswerthe Theorie der Minimalflächen begründet [1]).

Die Theorie der tetraedral-symmetrischen Flächen gab mir im Jahre 1871 gewisse Flächen, die in *unendlich vielen* Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können.

Eine besondere Stellung nehmen diejenigen Flächen ein, welche die Gleichung:

$$s = 0$$

erfüllen, welche somit in zweifacher Weise durch Translation einer *ebenen* Curve erzeugt worden sind. Ich veröffentlichte in

---

1) Ich zeigte u. a., dass für jede *reelle* Minimalfläche die Summe der Ordnung und der Classe mindestens gleich 15 ist. Auf Veranlassung von mir hat Herr Rohn neuerdings gezeigt, dass die von mir besprochene Minimalfläche sechster Ordnung nie reell ist. Die Ordnung einer reellen Minimalfläche ist in Folge dessen, wie meine älteren Untersuchungen zeigen, mindestens gleich 9.

den Jahren 1872—1879 bemerkenswerthe Untersuchungen über die Integralflächen der Gleichung $s = 0$ sowie über alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch *Berührungstransformation* auf die Form $s = 0$ reducibel sind.

Es gelang mir ferner im Jahre 1879, *alle* Flächen zu bestimmen, welche in *mehrfacher Weise* als Translationsflächen aufgefasst werden können. Im Laufe des letzten Jahres ist es mir gelungen, dieses Problem auf n Dimensionen auszudehnen und gleichzeitig ausserordentlich schöne Beziehungen zum ABEL-schen Theorem zu finden.

Endlich gelang es mir im Jahre 1879, eine merkwürdige und schöne Ausdehnung meiner Theorie der Minimalflächen auf beliebige Translationsflächen zu finden.

Es ist jetzt meine Absicht, meine *sämmtlichen noch nicht veröffentlichten Untersuchungen über Translationsflächen* in einer Reihe Noten in den hiesigen Berichten zu geben.

In dieser ersten Note entwickele ich die soeben besprochene Ausdehnung meiner Theorie der Minimalflächen.

§ 1.

Allgemeines über Translationsflächen.

Nimmt man zwei Raumcurven c_0 und k_0 an, die einen Punkt p_0 gemein haben, und verschiebt man c_0 parallel mit sich selbst derart, dass ihr Punkt p_0 auf k_0 entlang läuft, so beschreibt c_0 eine *Translationsfläche*. Ein beliebiger auf c_0 gelegener Punkt beschreibt dabei eine Curve k, die mit k_0 congruent und gleichgestellt ist. Folglich kann die Fläche auch durch Verschiebung der Curve k_0 an c_0 entlang erzeugt werden.

Satz 1. *Kann eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden, so gestattet sie noch eine solche Erzeugung.*

Sind:

$$x = A_1(t)\,, \quad y = B_1(t)\,, \quad z = C_1(t)$$

die Gleichungen der Curve c_0 und

$$x = A_2(\tau)\,, \quad y = B_2(\tau)\,, \quad z = C_2(\tau)$$

die der Curve k_0, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der Coordinatenanfang der gemeinsame Punkt p_0 beider Curven ist, so stellen die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A_1(t) + A_2(\tau)\,, \\ y = B_1(t) + B_2(\tau)\,, \\ z = C_1(t) + C_2(\tau) \end{cases}$$

die betrachtete Fläche dar. Hält man τ fest, so geben sie eine Curve c, hält man t fest, eine Curve k.

Die Fläche lässt sich auch so erzeugen:

Man verbinde einen beliebigen Punkt der Curve

$$x = 2A_1(t)\,,\quad y = 2B_1(t)\,,\quad z = 2C_1(t)$$

mit einem beliebigen Punkte der Curve

$$x = 2A_2(\tau)\,,\quad y = 2B_2(\tau)\,,\quad z = 2C_2(\tau)$$

durch eine Strecke, deren Mitte alsdann die Coordinaten (1) hat. Also:

Satz 2. *Jede Translationsfläche kann auch als der Ort der Mitten aller Strecken betrachtet werden, welche je zwei Punkte zweier bestimmter Curven mit einander verbinden.*

Betrachten wir zwei unendlich nahe Curven c und ebenso zwei unendlich nahe Curven k. Diese bestimmen ein infinitesimales Parallelogramm, also eine ebene Figur in einer Tangentialebene der Fläche. Die Tangentialebenen in benachbarten Punkten der Curve k schneiden sich also in der Richtung der hindurchgehenden Curve c und umgekehrt. Die Richtungen der durch einen beliebigen Punkt der Fläche hindurchgehenden Curven c und k sind demnach conjugirt. Hieraus folgt:

Satz 3. *In jedem Punkte der Fläche bestimmen die hindurchgehenden Curven c und k Richtungen, die zu den zugehörigen Haupttangenten harmonisch liegen.*

Analytisch und streng lässt sich dies so darstellen:

In einem Flächenpunkt (x, y, z) ist:

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = A_1'(t)dt + A_2'(\tau)d\tau\,, \\ dy = B_1'(t)dt + B_2'(\tau)d\tau\,, \\ dz = C_1'(t)dt + C_2'(\tau)d\tau\,. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} C_1'(t) - pA_1'(t) - qB_1'(t) = 0\,, \\ C_2'(\tau) - pA_2'(\tau) - qB_2'(\tau) = 0\,, \end{cases}$$

woraus durch Differentiation der ersten nach τ

$$A_1'\left(r\frac{dx}{d\tau} + s\frac{dy}{d\tau}\right) + B_1'\left(s\frac{dx}{d\tau} + t\frac{dy}{d\tau}\right) = 0$$

oder

$$A_1'A_2'r + (A_1'B_2' + A_2'B_1')s + B_1'B_2't = 0\,.$$

Halten wir diese Gleichung mit der bekannnten Differengleichung der Haupttangentencurven

$$(4) \qquad rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$$

zusammen, so erkennen wir, dass in jedem Punkte unserer Fläche die Tangenten der hindurchgehenden Curven c und k hinsichtlich der beiden Haupttangenten harmonisch gelegen sind.

Die Gleichung (4) ist die Differentialgleichung der Haupttangentencurven der Fläche.

Sofort leuchtet ein:

Satz 4. *Die Developpabele, die unsere Fläche längs einer Curve der Schaar c oder k berührt, ist eine Cylinderfläche.*

Die Tangenten längs aller Curven c sind parallel den Geraden eines gewissen Kegels, der eine homogene Gleichung von der Form

$$f(dx,\ dy,\ dz) = 0$$

erfüllen wird. Ebenso sind die Tangenten längs aller Curven k parallel den Tangenten eines der Kegel:

$$\varphi(dx,\ dy,\ dz) = 0\,.$$

Alle Kegel $f = 0$ schneiden die unendlich ferne Ebene in ein und derselben Curve, die sich auch definiren lässt als Durchschnitt der unendlich fernen Ebene mit der Developpablen einer Curve c. Ebenso bestimmen alle Kegel $\varphi = 0$ eine unendlich ferne Curve. Der Tangentialkegel von einem Punkte einer dieser unendlich fernen Curven an die Fläche berührt sie also längs einer Curve c bez. k.

Nimmt man insbesondere an, dass die Kegel $f = 0$ mit den Kegeln $\varphi = 0$ identisch sind, anders ausgesprochen, dass die beiden Curven c_0 und k_0 — und mit ihnen alle Curven c und k — eine *gemeinsame Differentialgleichung* von der Form

$$f(dx,\ dy,\ dz) = 0$$

befriedigen, die irreducibel sein soll, so kann man beweisen, dass sowohl die Curven c wie die Curven k eine Umhüllungscurve, und zwar *eine gemeinsame Umhüllungscurve*, besitzen. Denn alsdann ist zu jeder Tangente einer Curve c eine parallele Tangente an jede Curve k vorhanden. Da nun alle Curven k längs einer Curve c parallele Tangenten haben, so ist auf dieser c ein Punkt p vorhanden, in dem die Curve von der hindurchgehenden Curve k berührt wird. Erinnert man sich daran, dass c in die benachbarte Curve c' durch eine Translationsbewegung übergeht, deren Richtung die besprochene gemeinsame Tangentenrichtung ist, so sieht man, dass c und c' sich in dem Punkte p schneiden, sodass alle c eine Umhüllungscurve Σ des Punktes p besitzen, die von c in p berührt wird. Da c in p von der hindurchgehenden Curve k berührt wird, so folgt, dass die Umhüllungscurve Σ auch von allen k berührt wird. Also:

Satz 5. *Wenn die auf unserer Fläche gelegenen Curven c und k eine irreducible Relation von der Form*

$$f(dx,\ dy,\ dz) = 0$$

befriedigen, so haben die Curven c und k eine und zwar eine gemeinsame Umhüllungscurve Σ.

Man kann hinzufügen, dass die Curven c keine krumme Umhüllungscurve besitzen, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Hieran schliesst sich noch an:

Satz 6. *Gleitet eine Curve c in Translationsbewegung längs einer Curve Σ, deren Tangenten paarweis mit denen von c parallel sind, so kann die erzeugte Fläche auch dadurch beschrieben werden, dass eine gewisse andere Curve k in Translationsbewegung längs Σ gleitet.*

Es ist insbesondere denkbar, dass die Curven c und k eine irreducible Schaar bilden. Dies tritt ein dann, aber auch nur dann, wenn die Curve Σ mit jeder Curve c nach dem Verhältnisse 2 : 1 ähnlich ist.

§ 2.

Beziehungen zwischen zwei Translationsflächen.

Wir wollen nunmehr die beiden Translationsflächen betrachten, welche durch die Gleichungen

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\,, \\ 2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\,, \\ 2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

und

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau)\,, \\ 2y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau)\,, \\ 2z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

dargestellt werden. Dabei wollen wir annehmen, dass die Gleichungen

$$(1)\qquad x = \xi_1(t)\,,\quad y = \eta_1(t)\,,\quad z = \zeta_1(t)$$

und

$$(2)\qquad x = \xi_2(\tau)\,,\quad y = \eta_2(\tau)\,,\quad z = \zeta_2(\tau)$$

zwei Curven in solcher Form darstellen, dass die Tangenten in den Punkten $t = a$ und $\tau = a$, also in Punkten mit gleichen Parametern t und τ, sich immer schneiden. Es leuchtet ein, dass zwei beliebige Curven immer durch Gleichungen darstellbar sind, die diese Eigenschaft haben.

Unter der gemachten Voraussetzung liegen die Tangenten zweier Punkte mit gleichen Parametern $t = \tau$ und die Verbindende dieser Punkte in einer Ebene. Sind X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen der Ebene, so bestehen die Gleichungen:

$$X(\xi_1(t) - \xi_2(t)) + Y(\eta_1(t) - \eta_2(t)) + Z(\zeta_1(t) - \zeta_2(t)) = 0\,,$$

$$X\frac{d\xi_1(t)}{dt} + Y\frac{d\eta_1(t)}{dt} + Z\frac{d\zeta_1(t)}{dt} = 0\,,$$

$$X\frac{d\xi_2(t)}{dt} + Y\frac{d\eta_2(t)}{dt} + Z\frac{d\zeta_2(t)}{dt} = 0$$

und also auch die im Folgenden mehrfach benutzte Gleichung:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1(t) - \xi_2(t) & \eta_1(t) - \eta_2(t) & \zeta_1(t) - \zeta_2(t) \\ \dfrac{d\xi_1(t)}{dt} & \dfrac{d\eta_1(t)}{dt} & \dfrac{d\zeta_1(t)}{dt} \\ \dfrac{d\xi_2(t)}{dt} & \dfrac{d\eta_2(t)}{dt} & \dfrac{d\zeta_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Bezeichnen wir solche Punkte der beiden Flächen (I) und (II) als einander entsprechend, welche zu demselben Werth-

system t, τ gehören, so ist klar, dass die Tangentenebenen der beiden Flächen in entsprechenden Punkten parallel sind. Denn die beiden Flächen enthalten, wie aus ihren Gleichungen hervorgeht, in ihren entsprechenden Punkten (t, τ) zwei Paare paralleler Tangenten, indem die Richtungscosinus des einen Paares proportional

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt}, \quad \frac{d\eta_1(t)}{dt}, \quad \frac{d\zeta_1(t)}{dt},$$

die des anderen Paares proportional

$$\frac{d\xi_2(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d\eta_2(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d\zeta_2(\tau)}{d\tau}$$

sind, und die beiden Tangenten in jedem der Punkte (t, τ) fallen im Allgemeinen nicht zusammen. Die Flächen (I) und (II) enthalten also in jedem ihrer Punkte (t, τ) Tangenten parallel den Tangenten der Curven (1) und (2) in den Punkten (t) und (τ).

Jede Relation zwischen t und τ bestimmt eine Curve auf den beiden Flächen (I) und (II). Es werden also auch die Curven der Flächen einander als entsprechend zugeordnet. Die abwickelbaren Flächen, die unsere beiden Flächen nach zusammengehörenden Curven berühren, haben offenbar paarweis parallele Tangentialebenen.

Insbesondere richten wir unser Augenmerk auf die beiden Curven unserer Flächen, die durch die Relation $t = \tau$ bestimmt werden. Die Developpabeln längs derselben haben paarweis parallele Ebenen, und wir werden sehen, dass die Developpabele, die die Fläche (II) längs der Curve $t = \tau$ berührt, ein *Kegel* ist, dessen Spitze im Anfangspunkt liegt. Die Tangentialebene dieser Fläche in einem Punkte $t = \tau$ ist nämlich bestimmt durch die Gleichung

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x - \frac{\xi_1(t) - \xi_2(t)}{2} & y - \frac{\eta_1(t) - \eta_2(t)}{2} & z - \frac{\zeta_1(t) - \zeta_2(t)}{2} \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} & \frac{d\eta_1(t)}{dt} & \frac{d\zeta_1(t)}{dt} \\ \frac{d\xi_2(t)}{dt} & \frac{d\eta_2(t)}{dt} & \frac{d\zeta_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

die wegen der factisch bestehenden Gleichung (3) durch die Annahme $x = y = z = 0$ erfüllt wird.

Auch die andere Developpabele, die, welche die Fläche (I) längs der Curve $t = \tau$ berührt, hat eine besondere Eigenschaft: *Sie enthält die Curven* (1) *und* (2). Die Tangentenebene von (I) in einem Punkte $t = \tau$ enthält nämlich Tangenten parallel den Tangenten der Curven (1) und (2) in den Punkten (t), und diese letzteren Geraden liegen nach Voraussetzung in einer Ebene. Da ihre Ebene den Punkt $t = \tau$ der Fläche (I) enthält — denn er ist die Mitte der Strecke, die unsere beiden Punkte auf den Curven (1) und (2) verbindet — so muss also diese Ebene mit der Tangentenebene der Fläche (I) im Punkte $t = \tau$ zusammenfallen. Die in Rede stehende Developpabele wird also umhüllt von allen Ebenen, die die Curven (1) und (2) in Punkten mit gleichem Parameter berühren, und enthält demnach diese Curven selbst.

Dies Ergebniss kann übrigens auch so analytisch abgeleitet werden: Die Tangentenebene der Fläche (I) im Punkte $t = \tau$ hat die Gleichung (4) mit dem einzigen Unterschiede, dass darin in der ersten Zeile statt der halben Differenzen halbe Summen stehen müssten. Die dadurch hervorgehende Gleichung wird aber wegen (3) sowohl von den Punkten (1) als auch von den Punkten (2) erfüllt. Also gilt der

Satz 7. *Sind die analytischen Gleichungen zweier Curven*

$$x = \xi_1(t), \quad y = \eta_1(t), \quad z = \zeta_1(t)$$

und

$$x = \xi_2(\tau), \quad y = \eta_2(\tau), \quad z = \zeta_2(\tau)$$

so gewählt, dass die Annahme $t = \tau$ jedesmal Punkte giebt, deren Tangenten sich schneiden, so ist die Translationsfläche

$$x = \frac{\xi_1(t) + \xi_2(\tau)}{2}, \quad y = \frac{\eta_1(t) + \eta_2(\tau)}{2}, \quad z = \frac{\zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)}{2}$$

in eine Developpabele eingeschrieben, die beide Curven enthält. Die Ebenen dieser Developpabeln sind parallel mit denjenigen Tangentialebenen der Translationsfläche

$$x = \frac{\xi_1(t) - \xi_2(\tau)}{2}, \quad y = \frac{\eta_1(t) - \eta_2(\tau)}{2}, \quad z = \frac{\zeta_1(t) - \zeta_2(\tau)}{2},$$

die durch den Coordinatenanfang gehen.

§ 3.

Definition einer Classe von partiellen Differentialgleichungen.

Fassen wie wieder — wie zum Schluss des § 1 — solche Translationsflächen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A_1(t) + A_2(\tau)\,, \\ y = B_1(t) + B_2(\tau)\,, \\ z = C_1(t) + C_2(\tau) \end{cases}$$

ins Auge, deren erzeugende Curven

$$x = A_1(t)\,,\quad y = B_1(t)\,,\quad z = C_1(t)$$

und

$$x = A_2(t)\,,\quad y = B_2(t)\,,\quad z = C_2(t)$$

gemeinsam eine irreducible Differentialgleichung von der Form

$$(2)\qquad f(dx,\, dy,\, dz) = 0$$

erfüllen, sodass also sein soll:

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(dA_1,\, dB_1,\, dC_1) = 0\,, \\ f(dA_2,\, dB_2,\, dC_2) = 0\,. \end{aligned}$$

Wie in § 1 (Satz 3) bewiesen wurde, liegen die beiden Haupttangenten in jedem Punkte der Fläche (1) harmonisch zu den beiden hindurchgehenden Curven $t =$ Const. und $\tau =$ Const. Hieraus folgt, wie wir schon erkannt haben und jetzt nochmals beweisen wollen, dass *alle* Flächen (1), welche die Bedingungen (3) erfüllen, d. h. alle Translationsflächen, deren erzeugende Curven Tangenten parallel den Geraden des Kegels (2) haben, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$R(p,\, q)r + S(p,\, q)s + T(p,\, q)t = 0$$

erfüllen. Hier bedeuten p, q die ersten, r, s, t die zweiten Differentialquotienten von z nach x, y.

Die Gleichung (2) bestimmt, wie wir auch schon in § 1 bemerkten, eine gewisse unendlich ferne Curve k_∞. Diese Curve spielt im Folgenden dieselbe Rolle, wie der imaginäre Kugelkreis in der Theorie der *Minimalflächen*, die ja unter den *Translationsflächen* enthalten sind. Wenn wir nun in einem Punkte $(t,\, \tau)$ der Fläche (1) die Tangenten an die hindurchgehenden Curven

$t =$ Const. und $\tau =$ Const. ziehen, so schneiden diese die unendlich ferne Ebene in zwei Punkten der Curve k_∞, wie die Gleichungen (3) aussagen. Es leuchtet ein, *dass die Flächen* (1), *die den Bedingungen* (3) *genügen, die Eigenschaft geniessen, dass ihre Haupttangenten in jedem Punkte zu zwei Tangenten harmonisch liegen, deren Fortschreitungsrichtungen dx, dy, dz die Gleichung* (2) *erfüllen.*

Zwei Fortschreitungsrichtungen $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ und $d_2 x$, $d_2 y$, $d_2 z$ sind aber harmonisch zu den Haupttangentencurven, wenn sie die Gleichung

$$(4) \qquad r d_1 x \, d_2 x + s(d_1 x \, d_2 y + d_2 x \, d_1 y) + t d_1 y \, d_2 y = 0$$

erfüllen. Andererseits liefern die Gleichungen:

$$f(d_1 x, d_1 y, d_1 z) = 0 \, , \quad f(d_2 x, d_2 y, d_2 z) = 0 \, ,$$
$$d_1 z = p d_1 x + q d_1 y \, , \quad d_2 z = p d_2 x + q d_2 y \, ,$$

wenn aus ihnen $d_1 z$ und $d_2 z$ eliminirt werden, für $\frac{d_1 y}{d_1 x}$ und $\frac{d_2 y}{d_2 x}$ gewisse Functionen von p und q. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (4) ein, so ergiebt sich in der That eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$(5) \qquad R(p, q) r + S(p, q) s + T(p, q) t = 0 \, .$$

Satz 8. *Alle Flächen:*

$$x = A_1(t) + A_2(\tau) \, ,$$
$$y = B_1(t) + B_2(\tau) \, ,$$
$$z = C_1(t) + C_2(\tau) \, ,$$

welche den Bedingungen:

$$f(dA_1, dB_1, dC_1) = 0 \, , \quad f(dA_2, dB_2, dC_2) = 0$$

genügen, erfüllen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$R(p, q) r + S(p, q) s + T(p, q) t = 0 \, .$$

Man erkennt sehr leicht, dass diese Differentialgleichung (5) neben einem singulären Integral erster Ordnung — nämlich der analytischen Darstellung aller Kegel $f(dx, dy, dz) = 0$ in Ebenencoordinaten p, q — *nur* solche Integralflächen

besitzt, welche durch Gleichungen von der Form (1), (3) bestimmt sind.

Ist die Gleichung

$$(2) \qquad f(dx, dy, dz) = 0$$

vorgelegt, so können wir in der angegebenen Weise die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$(5) \qquad R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0$$

aufstellen. Ihre Integralflächen (1) finden wir dann folgendermassen: Wir wählen zwei *beliebige* Curven

$$x = A_1(t)\ , \quad y = B_1(t)\ , \quad z = C_1(t)$$

und

$$x = A_2(\tau), \quad y = B_2(\tau)\ , \quad z = C_2(\tau)\ ,$$

für die

$$f(dA_1, dB_1, dC_1) = 0$$

und

$$f(dA_2, dB_2, dC_2) = 0$$

ist, und bilden dann die Gleichungen (1) der Fläche. Dieselben erfüllen sicher nach unseren Entwickelungen die Differentialgleichung (5), von der sie — wie soeben bemerkt wurde — sogar die allgemeinsten Integralflächen darstellen.

Wir machen schliesslich noch darauf aufmerksam, dass keineswegs jede partielle Differentialgleichung von der Form (5), also keineswegs jede in r, s, t lineare und homogene, sowie von x, y, z freie Differentialgleichung ein allgemeines Integral von der Form (1) besitzt.

Eine Gleichung

$$(5) \qquad R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0$$

sagt nämlich aus, dass in jedem Punkte einer Integralfläche die hindurchgehenden Haupttangenten hinsichtlich der beiden Tangenten harmonisch liegen, deren Fortschreitungsrichtungen die Gleichung

$$(6) \qquad Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0$$

erfüllen. Denn die Fortschreitungsrichtungen $\frac{dy}{dx}$, welche dieser Gleichung genügen, haben zur Summe $\frac{S}{R}$ und zum Product $\frac{T}{R}$ und erfüllen folglich die Gleichung (4) für conjugirte Richtungen. Die

Gleichung (6) ordnet nun jedem Flächenelemente (x, y, z, p, q) zwei Richtungen zu. Aber diese beiden Richtungen erfüllen, wenn R, S, T beliebige Functionen von p, q sind, keineswegs eine Gleichung von der Form $f(dx, dy, dz) = 0$. Denn dazu wäre nothwendig und hinreichend, dass die zu einem beliebig gewählten Flächenelemente (x, y, z, p, q) zugeordneten Richtungen $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ und $d_2 x$, $d_2 y$, $d_2 z$ die Eigenschaft haben, dass etwa die Richtung $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ einem jeden durch sie gehenden Flächenelemente zugeordnet ist, weil die Gleichung $f = 0$ jedem Punkte einen Kegel von Richtungen zuordnet. Drücken wir diese Bedingung analytisch aus.

Wir variiren p, q, ohne die Fortschreitungsrichtung dx, dy, dz zu ändern, und erhalten dadurch aus

$$dz - pdx - qdx = 0$$

die Gleichung:

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy = 0\ .$$

Ersetzen wir also in (6) $\frac{dy}{dx}$ durch $-\frac{\delta p}{\delta q}$, so kommt:

$$R\delta p^2 - S\delta p\delta q + T\delta q^2 = 0\ . \tag{7}$$

Diese Gleichung definirt den Uebergang von einem Element (x, y, z, p, q), dem die Richtung dx, dy, dz zugeordnet ist, zu einem benachbarten Element $(x, y, z, p + \delta p, q + \delta q)$, das ebenfalls diese Richtung enthält und dem diese selbe Richtung zugeordnet ist. Diese Relation (7) kann nun als Differentialgleichung erster Ordnung in den Veränderlichen p, q aufgefasst werden und besitzt als solche ein Integral

$$\Omega(p, q) = \text{Const.}\ ,$$

das in jedem Punkte (x, y, z) ∞^1 Kegel darstellt. Die charakteristische Eigenschaft dieser Kegel ist, dass jedes einen solchen Kegel berührende Flächenelement ihn längs einer dem Elemente zugeordneten Richtung berührt. Soll nun die partielle Differentialgleichung (5) ein allgemeines Integral von der Form (1) haben, so müssten alle diese Flächenelemente eine Richtung enthalten, die nach irgend einem Punkt einer gewissen unendlich fernen Curve k_∞ geht. Die ∞^1 Kegel müssten daher zu ∞^1 Ebenenbüscheln degeneriren, d. h. die Gleichung $\Omega(p, q) = \text{Const.}$ müsste die Form

$$q = ap + \omega(a) \tag{8}$$

besitzen. Hier bedeutet a die willkürliche Constante.

Wenn umgekehrt die Gleichung (7) ein solches Integral (8) besitzt, und zwar für beide Wurzeln der Gleichung, so hat auch die partielle Differentialgleichung (6) ein allgemeines Integral von der Form (1).

§ 4.

Integralflächen, welche eine gegebene Developpabele nach einer gegebenen Curve berühren.

Wir nehmen jetzt an, die irreducible Gleichung

(1) $$f(dx,\ dy,\ dz) = 0$$

sei vorgelegt. Zu ihr gehört, wie wir sahen, eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen Translationsflächen sind. Diese Flächen werden erzeugt von irgend welchen Curven, deren Tangenten die unendlich ferne durch $f = 0$ bestimmte Curve k_∞ treffen.

Ausserdem sei nun noch irgend eine abwickelbare Fläche und auf ihr eine Curve C gegeben. Wir werden zeigen, dass es im Allgemeinen nur eine Translationsfläche, präciser gesagt, nur eine discrete Anzahl von Translationsflächen von der obigen Art giebt, die jener Developpabelen längs der Curve C eingeschrieben sind.

Es mögen zu dem Zwecke $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ laufende Coordinaten eines Punktes der Curve C und X, Y, Z die Richtungscosinus der zugehörigen Normalen der developpabelen Fläche sein. Sie sind bekannt; wir denken uns etwa $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, X, Y, Z als Functionen eines Parameters σ gegeben.

Nun suchen wir eine Fläche:

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\ ,$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\ ,$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)\ ,$$

die die Developpabele längs der Curve C berührt, und für die ausserdem nach (1):

(2) $$f(d\xi_1,\ d\eta_1,\ d\zeta_1) = 0\ ,\quad f(d\xi_2,\ d\eta_2,\ d\zeta_2) = 0$$

ist. Es sollen also für eine gewisse Relation zwischen t und τ, die die Curve C auf der gesuchten Fläche definirt, ausser (2) die Gleichungen bestehen:

$$2\mathfrak{x} = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\ ,$$
$$2\mathfrak{y} = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\ ,$$
$$2\mathfrak{z} = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)\ ,$$
$$X d\xi_1 + Y d\eta_1 + Z d\zeta_1 = 0\ ,$$
$$X d\xi_2 + Y d\eta_2 + Z d\zeta_2 = 0\ .$$

Die zweite Gleichung (2) lässt sich hiernach so schreiben:

$$f(2d\mathfrak{x} - d\xi_1, 2d\mathfrak{y} - d\eta_1, 2d\mathfrak{z} - d\zeta_1) = 0 .$$

Aus dieser, der ersten Gleichung (2) und der Gleichung

$$Xd\xi_1 + Yd\eta_1 + Zd\zeta_1 = 0$$

lassen sich nun die $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ als Differentiale durch $d\sigma$ ausdrücken:

$$d\xi_1 = U_1(\sigma)d\sigma , \quad d\eta_1 = V_1(\sigma)d\sigma , \quad d\zeta_1 = W_1(\sigma)d\sigma ,$$

woraus durch Integration folgt, dass längs der Curve C:

$$\xi_1 = \int U_1 d\sigma , \quad \eta_1 = \int V_1 d\sigma , \quad \zeta_1 = \int W_1 d\sigma$$

ist. Sodann folgt sofort, da $\xi_2 = 2\mathfrak{x} - \xi_1$ u. s. w. ist:

$$\xi_2 = 2\mathfrak{x} - \int U_1 d\sigma = \int U_2(\sigma)d\sigma ,$$

$$\eta_2 = 2\mathfrak{y} - \int V_1 d\sigma = \int V_2(\sigma)d\sigma ,$$

$$\zeta_2 = 2\mathfrak{z} - \int W_1 d\sigma = \int W_2(\sigma)d\sigma ,$$

wenn wir $2\dfrac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} - U_1$ mit U_2 u. s. w. bezeichnen. Hiermit sind auch ξ_2, η_2, ζ_2 längs der Curve C bestimmt. Da ξ_1, η_1, ζ_1 nur von einem Parameter abhängen und andererseits σ längs der Curve C alle möglichen Werthe annimmt, so folgt, dass hiermit ξ_1, η_1, ζ_1 überhaupt für die ganze gesuchte Fläche vollständig bestimmt sind. Dasselbe gilt von ξ_2, η_2, ζ_2.

Nunmehr geben wir in den erhaltenen Formeln dem Parameter σ verschiedene Bezeichnungen σ_1 und σ_2 und stellen die Gleichungen auf:

$$(3) \quad \begin{cases} 2x = \int U_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int U_2(\sigma_2)d\sigma_2 , \\ 2y = \int V_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int V_2(\sigma_2)d\sigma_2 , \\ 2z = \int W_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int W_2(\sigma_2)d\sigma_2 . \end{cases}$$

Sie stellen eine Translationsfläche dar, die zu denen gehört, welche durch (1) definirt werden. Diese Fläche berührt ferner

die gegebene Developpabele in der gegebenen Curve C, wie aus der Annahme $\sigma_1 = \sigma_2$, die die Curve C auf der gefundenen Fläche definirt, hervorgeht.

Es gilt somit der

Satz 9. *Unter allen Translationsflächen*

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\,,$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\,,$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)\,,$$

deren erzeugende Curven eine gegebene Relation

$$f(dx,\, dy,\, dz) = 0$$

erfüllen:

$$f(d\xi_1,\, d\eta_1,\, d\zeta_1) = 0\,, \quad f(d\xi_2,\, d\eta_2,\, d\zeta_2) = 0\,,$$

giebt es im Allgemeinen eine ganz bestimmte, die eine gegebene Curve C enthält und dabei längs derselben bestimmte Normalen besitzt. Diese Translationsfläche wird durch Quadratur gefunden.

Ist insbesondere eine *algebraische Developpabele* und auf ihr eine *algebraische Curve C* gegeben, so kann man immer annehmen, dass $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, X, Y, Z algebraische Functionen des Parameters σ sind. Alsdann sind auch U_1, V_1, W_1 und U_2, V_2, W_2 algebraische Functionen von σ. Dagegen werden die in die Gleichungen (3) eingehenden Integrale im Allgemeinen *transcendente* Functionen sein. Die Translationsfläche, die eine gegebene algebraische Developpabele längs einer algebraischen Curve berührt, ist also im Allgemeinen transcendent.

Es ist daher ein Problem, alle auf einer vorgelegten Developpabeln gelegenen algebraischen Curven C zu finden, längs deren die Fläche von einer algebraischen Translationsfläche, deren Erzeugende die Gleichung (1) *erfüllen, berührt wird.*

Mit diesem Problem werden wir uns von nun an beschäftigen.

§ 5.

Algebraische Integralflächen, die einem vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Eine Integralfläche ist offenbar algebraisch, wenn ihre beiden erzeugenden Curven algebraisch sind. Ist andererseits eine Integralfläche algebraisch, so ist jeder Tangentenkegel, dessen

Spitze auf der Curve k_∞ liegt, algebraisch. Da er nach Satz 1 des § 1 die Fläche längs einer erzeugenden Curve berührt, so ist folglich auch diese Curve algebraisch. Dabei ist allerdings nicht ausgeschlossen, dass der Tangentenkegel und gleichzeitig die zugehörige Berührcurve in mehrere Theile zerfällt; das hat aber keinen Einfluss auf die Schlussfolgerung.

Satz 10. *Eine Integralfläche ist dann und nur dann algebraisch, wenn ihre erzeugenden Curven algebraisch sind.*

Die Tangenten längs einer erzeugenden Curve schneiden die unendlich ferne Ebene in der Curve k_∞. Ist die erzeugende Curve algebraisch, so ist mithin auch k_∞ algebraisch. Daher:

Satz 11. *Ist eine der zu*

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

gehörigen Integralflächen algebraisch, so ist auch diese Gleichung algebraisch.

Es ist leicht, alle möglichen algebraischen Erzeugenden, d. h. alle algebraischen Curven, welche die Gleichung $f = 0$ erfüllen, zu bestimmen. Man kann nämlich alle algebraischen Developpabeln construiren, die die algebraische Curve k_∞ enthalten. Ihre Rückkehrcurven sind die gewünschten.

Man kann daher auch leicht alle algebraischen Integralflächen bei vorgelegter Gleichung $f = 0$ construiren. Es ist dagegen im Allgemeinen schwierig, alle algebraischen Integralflächen zu finden, die gewissen geometrischen Bedingungen genügen. Im Anschluss an den vorigen Paragraphen stellen wir uns ein solches Problem, indem wir alle algebraischen Curven C auf einer vorgelegten algebraischen Developpabeln suchen, längs deren diese Developpabele von einer algebraischen Integralfläche berührt wird. Dies Problem kann auch so ausgesprochen werden: *Alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die einer vorgelegten algebraischen Developpabelen eingeschrieben sind.*

Wir werden diese Aufgabe *vollständig erledigen*, *wenn die gegebene Developpabele ein Kegel ist, und werden im allgemeinen Falle zeigen, dass man alle gesuchten Flächen bestimmen kann, sobald man nur eine einzige derselben kennt.*

Ehe wir hierzu übergehen, schicken wir einige Bemerkungen über die Terminologie voraus. Wie gesagt, spielt die Curve k_∞

im Folgenden dieselbe Rolle wie der imaginäre Kugelkreis in der Theorie der Minimalflächen. Daher bezeichnen wir die k_∞ als Pseudo-Kugelkreis und übertragen die gewöhnliche metrische Terminologie aufihn. Die Begriffe Tangente und Osculationsebene werden im alten Sinne gebraucht. Dagegen sagen wir, dass eine Gerade zu einer Ebene pseudo-senkrecht ist, wenn die Ebene die Curve k_∞ in zwei Punkten — ausser anderen — trifft, deren Tangenten sich im Schnittpunkt jener Geraden mit der unendlich fernen Ebene treffen. Die Gerade soll dann Pseudo-Normale der Ebene und die Ebene Pseudo-Normalebene der Geraden heissen.

Wir gehen nun in unserer Betrachtung zunächst aus von einer irgendwie vorgelegten Raumcurve. Alle Pseudo-Normalebenen dieser Raumcurve umhüllen eine abwickelbare Fläche, die wir die Pseudo-Evolute der betreffenden Raumcurve nennen.

Es besteht dann der

Satz 12. *Die Pseudo-Evolute einer Raumcurve enthält diejenige Curve, deren Developpabele gleichzeitig der Raumcurve und dem Pseudokugelkreis k_∞ umschrieben ist.*

Ist nämlich p ein Punkt der Raumcurve und P der unendlich ferne Punkt der zugehörigen Tangente, sind überdies λ und μ die Berührungspunkte zweier Tangenten von P an die k_∞, so ist $p\lambda\mu$ die Pseudo-Normalebene der Tangente pP im Punkte p, also eine Ebene der Pseudo-Evolute der Raumcurve. Es sind aber $p\lambda$ und $p\mu$ zwei Erzeugende der Developpabeln, die um die Raumcurve und die Curve k_∞ umgeschrieben ist. Ist p' ein p benachbarter Punkt der Raumcurve und sind P', λ', μ' die zugehörigen zu P, λ, μ benachbarten Punkte der unendlich fernen Ebene, so ist $p'\lambda'\mu'$ eine benachbarte Pseudo-Normalebene, während $pP\lambda$ und $p'P'\lambda'$ sowie $pP\mu$ und $p'P'\mu'$ je zwei benachbarte Ebenen der abwickelbaren Fläche darstellen, die um die Raumcurve und die Curve k_∞ umgeschrieben ist. $p\lambda$ und $p'\lambda'$ mögen sich in L, $p\mu$ und $p'\mu'$ sich in M treffen. Dann sind L und M Punkte der Rückkehrcurve der soeben genannten Developpabeln. Gleichzeitig ist LM eine Gerade der Pseudo-Evolute der Raumcurve. Hiermit ist Satz 12 bewiesen.

Die Tangenten der Rückkehrcurve der Developpabeln in den Punkten L und M sind $p\lambda$ und $p\mu$. Daher schneiden die Tangenten der Rückkehrcurve die unendlich ferne Ebene im Pseudo-Kugelkreis k_∞. Also:

Satz 13. *Die Rückkehrcurve der Developpabeln, die einer Raumcurve und der unendlich fernen Curve*

$$f(dx,\ dy,\ dz) = 0$$

umgeschrieben ist, erfüllt die Gleichung $f = 0$.

Jedem Punkte p der ursprünglichen Raumcurve sind durch unsere Betrachtung zwei Punkte L und M der Rückkehrcurve zugeordnet (wir könnten sagen: mindestens zwei, da von P aus im Allgemeinen mehr als zwei Tangenten an k_∞ möglich sein werden). Es ist denkbar, dass die Rückkehrcurve in zwei Curven zerfällt, deren eine der Ort der L, deren andere der Ort der M ist. Wir wollen den Ort der Punkte L durch die Gleichungen

$$x = \xi_1(t)\,, \quad y = \eta_1(t)\,, \quad z = \zeta_1(t)\,,$$

den Ort der Punkte M durch die Gleichungen

$$x = \xi_2(\tau)\,, \quad y = \eta_2(\tau)\,, \quad z = \zeta_2(\tau)$$

darstellen. Beide Curven sind eben dann dieselben, wenn die Rückkehrcurve nicht zerfällt. Nach Satz 13 ist dann:

$$f(d\xi_1\,,\ d\eta_1,\ d\zeta_1) = 0\,, \qquad f(d\xi_2\,,\ d\eta_2,\ d\zeta_2) = 0\,.$$

Mithin ist die Fläche:

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\,, \\ 2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\,, \\ 2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Offenbar hat sie mit der Pseudo-Evolute der Raumcurve eine Curve gemein, nämlich den Ort der Mittelpunkte K der Strecken LM. Diese Punkte K liegen ja auf der Pseudo-Evolute, weil diese die Gerade LM ganz enthält. Die Pseudo-Evolute hat in einem solchen Punkte K die Tangentialebene PLM. Da nun die Fläche (1) in K Tangenten parallel denen der Curve (L) und (M) besitzt, also Tangenten parallel pL und pM, so ist klar, dass die Fläche (1) und die Pseudo-Evolute sich in K berühren. Mithin ist die Integralfläche (1) der Pseudo-Evolute der Raumcurve längs der Curve der Punkte K eingeschrieben.

Satz 14. *Wählt man irgend eine Raumcurve, so ist es immer möglich, eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben, die in die Pseudo-Evolute der Raumcurve eingeschrieben ist.*

Die Mitten K der Strecken LM nennen wir die Pseudo-Krümmungsmittelpunkte der Raumcurve in ihren Punkten p, da sie die Krümmungsmittelpunkte im gewöhnlichen Sinne vorstellen, sobald k_∞ der imaginäre Kugelkreis ist. Entsprechend nennen wir die Gerade LM die Pseudo-Krümmungsaxe der Raumcurve im Punkte p.

Die Pseudo-Krümmungsaxen sind dann die Erzeugenden der Developpabeln, der unsere Integralfläche (1) längs dem Orte der Pseudo-Krümmungsmittelpunkte eingeschrieben ist, also längs der Curve:

$$x = \frac{\xi_1(t) + \xi_2(t)}{2}, \quad y = \frac{\eta_1(t) + \eta_2(t)}{2}, \quad z = \frac{\zeta_1(t) + \zeta_2(t)}{2}.$$

Ist die Raumcurve und die Curve k_∞ algebraisch, so ist auch die besprochene Developpabele algebraisch. Ebenso ist alsdann die Curve der Punkte L, wie die der Punkte M algebraisch. Auch die Curve der K ist dann algebraisch. Daher:

Satz 15. *Diejenige Integralfläche, welche die Pseudo-Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Ort der Pseudo-Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch, vorausgesetzt, dass der Pseudo-Kugelkreis algebraisch ist.*

Betrachten wir jetzt statt der Fläche (1) diese:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau), \\ y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau), \\ z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau). \end{cases}$$

Sie ist natürlich auch Integralfläche. Wir nennen sie eine *Pseudo-Biegungsfläche.* Nach Satz 7 des § 2 sind die durch den Anfangspunkt gehenden Tangentialebenen dieser Fläche parallel den Ebenen der Developpabeln, der die Fläche (1) eingeschrieben ist, also parallel den Ebenen der Pseudo-Evolute oder, was dasselbe ist, parallel den Pseudo-Normalebenen der Raumcurve. Die Punkte, in welchen der Tangentialkegel vom Anfangspunkt aus die Fläche (2) berührt, liegen auf der Curve:

$$x = \xi_1(t) - \xi_2(t), \quad y = \eta_1(t) - \eta_2(t), \quad z = \zeta_1(t) - \zeta_2(t).$$

Die Entfernungen der Berührpunkte vom Anfangspunkt, also die Strecken

$$\sqrt{[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 + [\eta_1(t) - \eta_2(t)]^2 + [\zeta_1(t) - \zeta_2(t)]^2}$$

sind gleich den zugehörigen Strecken LM auf den zu ihnen parallelen Krümmungsaxen der Raumcurve.

Wir sagen:

Satz 16. *Die Pseudo-Biegungsfläche derjenigen Integralfläche, welche die Pseudo-Evolute einer Raumcurve nach dem Ort der Pseudo-Krümmungsmittelpunkte berührt, berührt selbst einen Kegel, dessen Erzeugende mit den Erzeugenden der Pseudo-Evolute der Raumcurve parallel sind.*

Ueberdies:

Satz 17. *Diese Pseudo-Biegungsfläche ist ebenfalls algebraisch, sobald die Raumcurve und der Pseudo-Kugelkreis algebraisch sind.*

Es ist jetzt nicht mehr schwer, in einen gegebenen algebraischen Kegel algebraische Integralflächen einzuschreiben. Wir verfahren folgendermassen:

Zunächst suchen wir die Schnittcurve k' des Kegels mit der unendlich fernen Ebene. Jede Tangente von k' trifft die algebraische Curve k_∞ in gewissen Punkten, unter denen wir zwei λ und μ auswählen. Alsdann bringen wir die Tangenten dieser beiden Punkte λ, μ zum Schnitt in P. Rollt nun die Tangente von k' auf k' entlang, so beschreibt der Punkt P eine gewisse Curve k''. Sodann wählen wir eine beliebige algebraische Raumcurve und construiren diejenige Developpabele, welche diese Raumcurve und k'' enthält. Die Rückkehrcurve dieser Developpabeln möge C' heissen. Sie ist ebenfalls algebraisch. Die Tangenten von C' treffen die unendlich ferne Ebene in der Curve k''. Die Pseudo-Normalebenen von C' schneiden daher die unendlich ferne Ebene in den Tangenten $\lambda\mu$ der Curve k'. Die Pseudo-Evolute von C' schneidet mithin die unendlich ferne Ebene nach der Curve k'.

Wenn wir nun C' als die Raumcurve betrachten, die in unserer vorigen Ueberlegung zum Ausgang diente, so sehen wir, dass die nach Satz 15 vorhandene algebraische Integralfläche die Developpabele, auf der C und k_∞ liegen, längs der Curve der Pseudekrümmungsmittelpunkte K von C' berührt. Ist:

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)$$

diese Integralfläche, so ist auch

$$x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau)\,,$$
$$y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau)\,,$$
$$z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau)$$

eine algebraische Integralfläche, und zwar ist sie die in Satz 16 erwähnte Pseudobiegungsfläche. Nach jenem Satze ist sie einem Kegel eingeschrieben, dessen Tangentialebenen den Ebenen der Developpabeln parallel sind, also ebenfalls die unendlich ferne Ebene in den Geraden $\lambda\mu$, den Tangenten von k', schneiden. Dieser Kegel ist demnach mit dem gegebenen Kegel congruent und gleichgestellt. Ob wir also in ihn oder in den gegebenen Kegel die Integralfläche eingeschrieben, ist gleichgültig.

Indem wir die algebraische Raumcurve C beliebig wählen, erhalten wir beliebig viele algebraische Integralflächen der gesuchten Art.

Satz 18. *Man kann in einen vorgelegten algebraischen Kegel beliebig viele algebraische Integralflächen einschreiben.*

Es fragt sich, ob in dieser Weise alle in den vorgelegten Kegel einzuschreibenden algebraischen Integralflächen gefunden werden. Es sei daher

$$x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau)\,,$$
$$y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau)\,,$$
$$z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau)$$

irgend eine algebraische Integralfläche, die sich in den Kegel einschreiben lässt. Alsdann ist auch

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\,,$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\,,$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)$$

eine algebraische Integralfläche. Sie ist (nach Satz 7 § 2) in die Developpabele D eingeschrieben, welche die beiden Curven

(3) $$x = \xi_1(t)\,, \quad y = \eta_1(t)\,, \quad z = \zeta_1(t)$$

und

(4) $$x = \xi_2(\tau)\,, \quad y = \eta_2(\tau)\,, \quad z = \zeta_2(\tau)$$

enthält. Construiren wir nun die zu diesen beiden Curven gehörigen Developpabeln und die Schnittlinie c'' dieser beiden Flächen, so ist die Fläche D die Pseudo-Evolute von c''. Denn

die Ebenen von D sind parallel den Tangentialebenen des Kegels, sie schneiden also die unendlich ferne Ebene in den Tangenten $\lambda\mu$ von k'', während die Tangenten von c'' die Schnittlinien der Osculationsebenen der beiden Curven (3) und (4) sind. Diese Osculationsebenen aber berühren den Pseudo-Kugelkreis in den Punkten λ, μ, sodass die Tangenten von c'' wirklich zu den Ebenen von D pseudo-senkrecht sind und mithin D die Pseudo-Evolute von c'' ist. Diese Pseudo-Evolute wird von der Integralfläche

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)$$

nach dem Ort der Krümmungsmittelpunkte von c'' berührt. Wir kommen also zu unserer früheren Erzeugung der Integralflächen zurück. Daher sagen wir:

Satz 19. *Die angegebenen Operationen liefern alle in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen.*

Die vorangehenden Entwickelungen gelten nicht mehr, wenn die Spitze des betreffenden Kegels unendlich fern liegt. Doch giebt es Cylinderflächen, welche die Pseudo-Evoluten von Raumcurven sind, und in eine solche Cylinderfläche lässt sich ohne weiteres eine algebraische Integralfläche einschreiben.

Wir gehen übrigens an dieser Stelle auf die Frage nach den in eine algebraische Cylinderfläche eingeschriebenen algebraischen Integralflächen nicht ein.

§ 6.

Algebraische Integralflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpabele eingeschrieben sind.

Wir kommen in diesem Paragraphen zur Erledigung des zweiten angekündigten Problems. Wir werden nämlich zunächst annehmen, dass in eine vorgelegte algebraische Developpabele schon zwei algebraische Integralflächen eingeschrieben seien, uud zeigen, dass man daraus eine algebraische Integralfläche ableiten kann, die einem Kegel eingeschrieben ist, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind. Darauf werden wir beweisen, dass es, sobald *nur eine* algebraische Integralfläche

der vorgegebenen Developpabeln eingeschrieben ist, ∞^∞ solche Integralflächen vorhanden sind, und zeigen, wie man sie sämmtlich angeben kann.

Es sei eine algebraische Developpabele vorgelegt. X, Y, Z sollen die Richtungscosinus ihrer Ebenen bedeuten, ausgedrückt in einem Parameter σ. Ferner seien zwei der Developpabeln eingeschriebene algebraische Integralflächen gegeben, und es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die laufenden Coordinaten der Berührungslinien der einen, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die der Berührlinie der andern Integralfläche. Sie können ebenfalls als bekannte Functionen des Parameters σ betrachtet werden, so zwar, dass die zu einem Parameter σ gehörende Werthe X, Y, Z; $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ zusammengehören, d. h. dass dann dle Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ auf einer Erzeugenden der Developpabeln liegen, und X, Y, Z die Richtungscosinus der zugehörigen Normalen vorstellen.

Sind nun

$$x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau)\,,$$
$$y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau)\,,$$
$$z = \zeta_1(t) + \xi_2(\tau)$$

die Gleichungen der ersten Integralfläche, so ist:

$$X d\xi_1 + Y d\eta_1 + Z d\zeta_1 = 0\,,$$
$$f(d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1) = 0\,,$$

und aus diesen beiden Relationen bestimmen sich die Verhältnisse der $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ als Functionen von σ:

$$\frac{d\xi_1}{\varphi_1(\sigma)} = \frac{d\eta_1}{\psi_1(\sigma)} = \frac{d\zeta_1}{\chi_1(\sigma)}\,.$$

Entsprechend bestimmen sich die Verhältnisse der $d\xi_2$, $d\eta_2$, $d\zeta_2$:

$$\frac{d\xi_2}{\varphi_2(\sigma)} = \frac{d\eta_2}{\psi_2(\sigma)} = \frac{d\zeta_2}{\chi_2(\sigma)}\,.$$

Weil nun für gewisse Functionen t und τ von σ, welche die Berührlinie der Integralfläche definiren,

$$\mathfrak{x} = \xi_1 + \xi_2\,, \quad \mathfrak{y} = \eta_1 + \eta_2\,, \quad \mathfrak{z} = \zeta_1 + \zeta_2$$

ist, so kommt für diese Functionen:

$$d\mathfrak{x} = d\xi_1 + d\xi_2\,, \quad d\mathfrak{y} = d\eta_1 + d\eta_2\,, \quad d\mathfrak{z} = d\zeta_1 + d\zeta_2\,.$$

Diese Gleichungen geben zusammen mit:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{\psi_1}{\varphi_1}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_2} = \frac{\psi_2}{\varphi_2}$$

eine Bestimmung von $d\xi_1$ und $d\xi_2$ in der Form:

$$d\xi_1 = \frac{\varphi_1\psi_2 d\mathfrak{x} - \varphi_1\psi_2 d\mathfrak{y}}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1},$$

$$d\xi_2 = \frac{-\varphi_2\psi_1 d\mathfrak{x} + \varphi_1\varphi_2 d\mathfrak{y}}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}.$$

Aehnlich können wir $d\eta_1$, $d\eta_2$ und $d\zeta_1$, $d\zeta_2$ durch $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ ausdrücken. Nehmen wir an, dass wir etwa erhalten:

$$(1) \begin{cases} d\xi_1 = A_1 d\mathfrak{x} + B_1 d\mathfrak{y} + C_1 d\mathfrak{z}, & d\xi_2 = \bar{A}_1 d\mathfrak{x} + \bar{B}_1 d\mathfrak{y} + \bar{C}_1 d\mathfrak{z}, \\ d\eta_1 = A_2 d\mathfrak{x} + B_2 d\mathfrak{y} + C_2 d\mathfrak{z}, & d\eta_2 = \bar{A}_2 d\mathfrak{x} + \bar{B}_2 d\mathfrak{y} + \bar{C}_2 d\mathfrak{z}, \\ d\zeta_1 = A_3 d\mathfrak{x} + B_3 d\mathfrak{y} + C_3 d\mathfrak{z}, & d\zeta_2 = \bar{A}_3 d\mathfrak{x} + \bar{B}_3 d\mathfrak{y} + \bar{C}_3 d\mathfrak{z}. \end{cases}$$

Hierin sind die A, B, C, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ dann gewisse Functionen von σ, ebenso wie $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Da ξ_1, η_1, ζ_1 nur einen Parameter t enthalten, so sind sie also durch die drei ersten Gleichungen nicht nur für die Punkte der Berührcurve, sondern überhaupt bestimmt, nur statt durch den Parameter t durch den Parameter σ, von dem t eine gewisse Function ist, auf die es uns nicht mehr ankommt. Analoges gilt von ξ_2, η_2, ζ_2.

Jetzt erinnern wir uns daran, dass wir zwei algebraische Integralflächen kennen, welche die vorgelegte Developpabele berühren. Wir wollen die entsprechenden Grössen, die sich auf die zweite Fläche beziehen, durch Accente von den obigen unterscheiden. Alsdann können wir für die zweite Fläche ganz analoge Rechnungen wie oben anstellen. Offenbar ergeben sich bei der zweiten Fläche genau dieselben Functionen A, B, C; $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.

Nach Voraussetzung sind ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 algebraische Functionen von t resp. τ, und so leuchtet ein, dass wir immer einen solchen Parameter σ von vornherein hätten wählen können, dass sie auch ausgedrückt in σ algebraisch sind. Demnach giebt die Integration von (1) algebraische Functionen von σ. Aehnliches gilt von den entsprechenden auf die zweite Integralfläche sich beziehenden Formeln.

Also sind auch die Differenzen:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 - \xi_1' &= \int A_1\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_1\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_1\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'),\\ \eta_1 - \eta_1' &= \int A_2\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_2\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_2\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'),\\ \zeta_1 - \zeta_1' &= \int A_3\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_3\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_3\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'),\end{aligned}\right.$$

sowie:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_2 - \xi_2' &= \int \bar{A}_1\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_1\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_1\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'),\\ \eta_2 - \eta_2' &= \int \bar{A}_2\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_2\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_2\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'),\\ \zeta_2 - \zeta_2' &= \int \bar{A}_3\, d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_3\, d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_3\, d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}')\end{aligned}\right.$$

algebraische Functionen von σ.

Wenn wir nun einen Kegel im Anfangspunkt herstellen, dessen Erzeugende den Erzeugenden der gegebenen Developpabeln parallel sind, und auf ihm die Curve

$$x = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}', \quad y = \mathfrak{y} - \mathfrak{y}', \quad z = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}'$$

(die offenbar auf ihm liegt) ziehen, so existirt, wie wir in § 4 nachgewiesen haben, eine bestimmte Integralfläche, die den Kegel längs dieser Curve berührt. Wollen wir sie nach der damals gegebenen Methode bestimmen, so haben wir, wie man sofort übersieht, gerade die Functionen (2) und (3) zu bilden. Da sie algebraisch sind, so folgt:

Satz 20. *Kennt man zwei algebraische Integralflächen, die in eine algebraische Developpabele eingeschrieben sind, so kann man immer auch in einen Kegel, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind, eine algebraische Integralfläche einschreiben. Die dazu erforderlichen Rechnungen kommen nur auf einige Subtractionen hinaus.*

Schliesslich kehren wir diese Betrachtung um: Liegt eine algebraische Developpabele und ein Kegel vor und sind die Erzeugenden der einen Fläche denen der andern parallel, und ist ferner in jede dieser Flächen eine bekannte algebraische Integralfläche eingeschrieben, so können wir sofort mit Hülfe der Formeln (2) und (3) eine zweite algebraische in die Developpabele

eingeschriebene Integralfläche angeben. Wir haben dann nur etwa die ζ', η', ξ' als die Unbekannten aufzufassen. Weil wir aber schon im vorigen Paragraphen alle einem algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen zu bestimmen gelernt haben, so folgt:

Satz 21. *Kennt man nur eine einzige einer vorgelegten algebraischen Developpabeln eingeschriebene algebraische Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so kann man alle und zwar ∞^∞ algebraischen Integralflächen angeben, die derselben Developpabeln eingeschrieben sind. Man hat zu dem Zweck nur alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die einem Kegel eingeschrieben sind, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind. Diese aber lassen sich ohne weiteres finden.*

Man kann in Folge dessen *beliebig viele algebraische Developpablen finden, deren eingeschriebenen algebraischen Integralflächen sich angeben lassen.*

Hat unsere partielle Differentialgleichung die specielle Form: $s = 0$, so lässt sich für *jede* algebraische Developpable eine eingeschriebene algebraische Integralfläche angeben, wie ich schon im Jahre 1879 gezeigt habe.

Die Bestimmung aller algebraischen Integralflächen einer beliebigen Gleichung (5) veröffentlichte ich im norwegischen Archiv, Bd. 2 (1877).

G. F. Lipps, *Ueber Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen.* (Fortsetzung zu S. 384). Vorgelegt von d. w. M. Scheibner.

§ 1. Um die Relationen für die 16-gliedrige Untergruppe der Thetareihen in allgemeiner und symmetrischer Form zu erhalten, kehre ich zu der Relation (25) (S. 379) zurück, wo ich $\{\Pi\}$ und Π in folgender Weise specialisire:

Es sei (für $i = 1$ und 2)

$$u_i' = u_i\,, \quad u_i'' = u_i''' = v_i\,; \quad [\lambda_i] = \lambda_i + (\varepsilon_i' + \varepsilon_i'')\,\frac{l_i}{2}\,,$$

$$[\lambda_i'] = \lambda_i\,, \quad [\lambda_i''] = \varepsilon_i'\,\frac{l_i}{2}\,, \quad [\lambda_i'''] = \varepsilon_i''\,\frac{l_i}{2}\,;$$

$$[\mu_i] = \mu_i + (\eta_i' + \eta_i'')\,\frac{m_i}{2}\,, \quad [\mu_i'] = \mu_i\,, \quad [\mu_i''] = \eta_i'\,\frac{m_i}{2}\,,$$

$$[\mu_i'''] = \eta_i''\,\frac{m_i}{2}\,;$$

so dass:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_1\delta_2} &= (-1)^{\delta_1(\eta_1'+\eta_1'')+\delta_2(\eta_2'+\eta_2'')}\cdot e^{2\pi i\left(\delta_1\frac{\mu_1}{m_1}+\delta_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta^{\mu_1+(\eta_1'+\eta_1''+\gamma_1)\frac{m_1}{2}\ \mu_2+(\eta_2'+\eta_2''+\gamma_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+(\varepsilon_1'+\varepsilon_1''+\delta_1)\frac{l_1}{2}\ \lambda_2+(\varepsilon_2'+\varepsilon_2''+\delta_2)\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta^{\mu_1+\gamma_1\frac{m_1}{2}\ \mu_2+\gamma_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\delta_1\frac{l_1}{2}\ \lambda_2+\delta_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^{(\eta_1'+\gamma_1)\frac{m_1}{2}\ (\eta_2'+\gamma_2)\frac{m_2}{2}}_{(\varepsilon_1'+\delta_1)\frac{l_1}{2}\ (\varepsilon_2'+\delta_2)\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\cdot\vartheta^{(\eta_1''+\gamma_1)\frac{m_1}{2}\ (\eta_2''+\gamma_2)\frac{m_2}{2}}_{(\varepsilon_1''+\delta_1)\frac{l_1}{2}\ (\varepsilon_2''+\delta_2)\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};
\end{aligned}\right.$$

$$
(32)\quad \begin{cases}
\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\eta_1 \eta_2} = (-1)^{\varepsilon_1(\eta'_1 + \eta''_1) + \varepsilon_2(\eta'_2 + \eta''_2)} \cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1 \frac{\mu_1}{m_1} + \varepsilon_2 \frac{\mu_2}{m_2}\right)} \\[2ex]
\quad \cdot \vartheta^{\mu_1 + (\eta'_1 + \eta''_1 + \eta_1)\frac{m_1}{2}\;\; \mu_2 + (\eta'_2 + \eta''_2 + \eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1 + (\varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\; \lambda_2 + (\varepsilon'_2 + \varepsilon''_2 + \varepsilon_2)\frac{l_2}{2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\[2ex]
\quad \cdot \vartheta^{\mu_1 + \eta_1 \frac{m_1}{2}\;\; \mu_2 + \eta_2 \frac{m_2}{2}}_{\lambda_1 + \varepsilon_1 \frac{l_1}{2}\;\; \lambda_2 + \varepsilon_2 \frac{l_2}{2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \vartheta^{(\eta'_1 + \eta_1)\frac{m_1}{2}\;\; (\eta'_2 + \eta_2)\frac{m_2}{2}}_{(\varepsilon'_1 + \varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\; (\varepsilon'_2 + \varepsilon_2)\frac{l_2}{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\[2ex]
\quad \cdot \vartheta^{(\eta''_1 + \eta_1)\frac{m_1}{2}\;\; (\eta''_2 + \eta_2)\frac{m_2}{2}}_{(\varepsilon''_1 + \varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\; (\varepsilon''_2 + \varepsilon_2)\frac{l_2}{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .
\end{cases}
$$

Die so specialisirte Formel (26) bildet nunmehr die Grundlage der ferneren Untersuchung. Sie werde in folgender Form angenommen:

$$
(33)\quad \begin{cases}
\{\Pi\}_{0\,0}^{0\,0} + i\{\Pi\}_{\delta_1 \delta_2}^{\gamma_1 \gamma_2} + i'\{\Pi\}_{\delta'_1 \delta'_2}^{\gamma'_1 \gamma'_2} + ii'\{\Pi\}_{\delta_1 + \delta'_1\; \delta_2 + \delta'_2}^{\gamma_1 + \gamma'_1\; \gamma_2 + \gamma'_2} \\[1ex]
\quad = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta_1 \eta_2} \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{\eta_1 \eta_2} \left(1 + i(-1)^{\varepsilon_1 \gamma_1 + \eta_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \gamma_2 + \eta_2 \delta_2}\right) \\[1ex]
\quad \cdot \left(1 + i'(-1)^{\varepsilon_1 \gamma'_1 + \eta_1 \delta'_1 + \varepsilon_2 \gamma'_2 + \eta_2 \delta'_2}\right) , \\[1ex]
\qquad (i = \pm 1 ; \quad i' = \pm 1) .
\end{cases}
$$

In dieser Relation kann der Werth der γ_i, δ_i, γ_i', δ_i' so bestimmt werden, dass

$$
\{\Pi\}_{\delta_1 \delta_2}^{\gamma_1 \gamma_2} = \{\Pi\}_{\delta'_1 \delta'_2}^{\gamma'_1 \gamma'_2} = \{\Pi\}_{\delta_1 + \delta'_1\; \delta_2 + \delta'_2}^{\gamma_1 + \gamma'_1\; \gamma_2 + \gamma'_2} = 0 .
$$

Es ist dies der Fall, wenn folgende drei Congruenzen erfüllt sind:

$$
(34)\quad \begin{cases}
[(\varepsilon'_1 + \delta_1)(\eta'_1 + \gamma_1) + (\varepsilon'_2 + \delta_2)(\eta'_2 + \gamma_2)] \\
\quad \cdot [(\varepsilon''_1 + \delta_1)(\eta''_1 + \gamma_1) + (\varepsilon''_2 + \delta_2)(\eta''_2 + \gamma_2)] \\
+ (\varepsilon'_1 + \delta_1)(\eta'_1 + \gamma_1) + (\varepsilon'_2 + \delta_2)(\eta'_2 + \gamma_2) \\
+ (\varepsilon''_1 + \delta_1)(\eta''_1 + \gamma_1) + (\varepsilon''_2 + \delta_2)(\eta''_2 + \gamma_2) \equiv 1 \pmod 2 ; \\[1ex]
[(\varepsilon'_1 + \delta'_1)(\eta'_1 + \gamma'_1) + (\varepsilon'_2 + \delta'_2)(\eta'_2 + \gamma'_2)] \\
\quad \cdot [(\varepsilon''_1 + \delta'_1)(\eta''_1 + \gamma'_1) + (\varepsilon''_2 + \delta'_2)(\eta''_2 + \gamma'_2)] \\
+ (\varepsilon'_1 + \delta'_1)(\eta'_1 + \gamma'_1) + (\varepsilon'_2 + \delta'_2)(\eta'_2 + \gamma'_2) \\
+ (\varepsilon''_1 + \delta'_1)(\eta''_1 + \gamma'_1) + (\varepsilon''_2 + \delta'_2)(\eta''_2 + \gamma'_2) \equiv 1 \pmod 2 ;
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{array}{l}
[(\varepsilon_1'+\delta_1+\delta_1')(\eta_1'+\gamma_1+\gamma_1')+(\varepsilon_2'+\delta_2+\delta_2')(\eta_2'+\gamma_2+\gamma_2')] \\
\cdot\,[(\varepsilon_1''+\delta_1+\delta_1')(\eta_1''+\gamma_1+\gamma_1')+(\varepsilon_2''+\delta_2+\delta_2')(\eta_2''+\gamma_2+\gamma_2')] \\
+\,(\varepsilon_1'+\delta_1+\delta_1')(\eta_1'+\gamma_1+\gamma_1')+(\varepsilon_2'+\delta_2+\delta_2')(\eta_2'+\gamma_2+\gamma_2') \\
+\,(\varepsilon_1''+\delta_1+\delta_1')(\eta_1''+\gamma_1+\gamma_1')+(\varepsilon_2''+\delta_2+\delta_2')(\eta_2''+\gamma_2+\gamma_2') \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv 1 \pmod 2\,.
\end{array}\right.$$

Man erhält so:

$$(35)\quad\left\{\begin{array}{l}
4\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1+(\eta_1'+\eta_1'')\frac{m_1}{2}\;\mu_2+(\eta_2'+\eta_2'')\frac{m_2}{2} \\ \lambda_1+(\varepsilon_1'+\varepsilon_1'')\frac{l_1}{2}\;\lambda_2+(\varepsilon_2'+\varepsilon_2'')\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1+v_1 \\ u_2+v_2\end{pmatrix} \\
\quad\cdot\,\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1 \\ u_2-v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\eta_1'\frac{m_1}{2}\;\eta_2'\frac{m_2}{2} \\ \varepsilon_1'\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2'\frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\eta_1''\frac{m_1}{2}\;\eta_2''\frac{m_2}{2} \\ \varepsilon_1''\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2''\frac{l_2}{2}\end{matrix} \\
=\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\eta_1\eta_2}\Pi^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1+i(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1+\eta_1\delta_1+\varepsilon_2\gamma_2+\eta_2\delta_2}\right) \\
\quad\cdot\left(1+i'(-1)^{\varepsilon_1\gamma_1'+\eta_1\delta_1'+\varepsilon_2\gamma_2'+\eta_2\delta_2'}\right),
\end{array}\right.$$

wo für jedes besonders gewählte Werthensystem der Indices ε_1', ε_2', η_1', η_2'; ε_1'', ε_2'', η_1'', η_2'' die zugehörigen Werthe der Indices δ und γ aus (34) zu bestimmen sind.

Diese Relation stellt das Additionstheorem der Thetareihen einer 16-gliedrigen Untergruppe in allgemeinster Form dar. Aus ihr kann die Darstellung der Differentialquotienten von Quotienten zweier Thetareihen und vom Logarithmus einer Thetareihe ohne Mühe gewonnen werden.

Da für diese Darstellungen die besondere Wahl des Indicessystemes der ε und η wesentlich ist, um die für den jeweiligen Fall zu Tag tretenden Vereinfachungen zu profitiren, greife ich aus der Fülle der in (35) enthaltenen Relationen die folgenden beispielshalber heraus, in welchen der Einfachheit wegen $\Pi^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ durch ${}^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ bezeichnet werden soll.

Es sei $\varepsilon_1'=1$; $\varepsilon_1''=\eta_1'=\eta_1''=\varepsilon_2'=\varepsilon_2''=\eta_2'=\eta_2''=0$; dann erhält man aus (34) für die drei Indicessysteme

$$\begin{matrix}\gamma_1\,\gamma_2 \\ \delta_1\,\delta_2\end{matrix}\quad\begin{matrix}\gamma_1'\,\gamma_2' \\ \delta_1'\,\delta_2'\end{matrix}\quad\begin{matrix}\gamma_1+\gamma_1' & \gamma_2+\gamma_2' \\ \delta_1+\delta_1' & \delta_2+\delta_2'\end{matrix}\,,$$

deren Aufeinanderfolge ohne Bedeutung ist, die acht Werthensysteme:

$$
1)\ \begin{matrix}11&10&01\\10&11&01\end{matrix}\qquad
2)\ \begin{matrix}11&10&01\\00&11&11\end{matrix}\qquad
3)\ \begin{matrix}10&11&01\\01&10&11\end{matrix}\qquad
4)\ \begin{matrix}11&10&01\\00&01&01\end{matrix}
$$

$$
5)\ \begin{matrix}01&10&11\\01&10&11\end{matrix}\qquad
6)\ \begin{matrix}11&01&10\\01&11&10\end{matrix}\qquad
7)\ \begin{matrix}10&01&11\\00&01&01\end{matrix}\qquad
8)\ \begin{matrix}01&11&10\\11&11&00\end{matrix}
$$

und es ist:

$$
(36)\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1\qquad\mu_2}{\lambda_1+\frac{l_1}{2}\;\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1\,\mu_2}{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;0}{\frac{l_1}{2}\;0}\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\,0}{0\,0}\\[2ex]
1)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}\\[1ex]
2)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\quad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}\\[1ex]
3)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2}\\[1ex]
4)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}\\[1ex]
5)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}\\[1ex]
6)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1+1\;\varepsilon_2}\\[1ex]
7)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}\\[1ex]
8)=\genfrac{}{}{0pt}{}{0\quad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0\qquad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\qquad 0}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2+1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{1\quad 1}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2},\\[1ex]
\qquad\qquad(\varepsilon_1=0,1;\quad\varepsilon_2=0,1),
\end{array}\right.
$$

wo

$$
\genfrac{}{}{0pt}{}{\eta_1\;\eta_2}{\varepsilon_1\;\varepsilon_2}=e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\qquad\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}{\lambda_1+(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}
$$

$$
\cdot\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\eta_1\frac{m_1}{2}\qquad\eta_2\frac{m_2}{2}}{(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\eta_1\frac{m_1}{2}\,\eta_2\frac{m_2}{2}}{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
$$

Es sei sodann

$$\eta_1' = 1\,;\ \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \eta_2' = \varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = \eta_1'' = \eta_2'' = 0\,;$$

dann nehmen die Indicessysteme der δ und γ folgende Werthe an:

$$1)\ \begin{matrix} 01 & 01 & 00 \\ 01 & 11 & 10 \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{matrix} 01 & 10 & 11 \\ 01 & 10 & 11 \end{matrix} \qquad 3)\ \begin{matrix} 01 & 01 & 00 \\ 01 & 10 & 11 \end{matrix} \qquad 4)\ \begin{matrix} 01 & 11 & 10 \\ 01 & 10 & 11 \end{matrix}$$

$$5)\ \begin{matrix} 11 & 01 & 10 \\ 01 & 11 & 10 \end{matrix} \qquad 6)\ \begin{matrix} 01 & 00 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \end{matrix} \qquad 7)\ \begin{matrix} 11 & 01 & 10 \\ 01 & 10 & 11 \end{matrix} \qquad 8)\ \begin{matrix} 11 & 11 & 00 \\ 01 & 10 & 11 \end{matrix}$$

und man erhält:

$$(37)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{matrix} \mu_1 + \frac{m_1}{2}\mu_2 \\ \lambda_1 \quad \lambda_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \vartheta\begin{matrix} \mu_1\,\mu_2 \\ \lambda_1\,\lambda_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} \vartheta\begin{matrix} \frac{m_1}{2}\ 0 \\ 0\ \ 0 \end{matrix}\ \vartheta\begin{matrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{matrix} \\[6pt]
1) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
2) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
3) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
4) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
5) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
6) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
7) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2+1 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\[6pt]
8) = \begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ 0\ \ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1+1 & \eta_2+1 \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 \end{matrix}, \\[6pt]
\qquad (\eta_1 = 0, 1\,;\quad \eta_2 = 0, 1)\,, \end{cases}$$

wo

$$\begin{matrix} \eta_1\,\eta_2 \\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \end{matrix} = e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1} + \varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)} \cdot \vartheta\begin{matrix} \mu_1 + (1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \mu_2 + \eta_2\frac{m_2}{2} \\ \lambda_1 + \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2 + \varepsilon_2\frac{l_2}{2} \end{matrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\,\vartheta\begin{matrix} \mu_1 + \eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2 + \eta_2\frac{m_2}{2} \\ \lambda_1 + \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2 + \varepsilon_2\frac{l_2}{2} \end{matrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{matrix} (1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2} \\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2} \end{matrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{matrix} \eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2} \\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2} \end{matrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Es sei schliesslich

$$\varepsilon_1' = 1\,;\ \eta_1'' = 1\,;\ \varepsilon_2' = \eta_1' = \eta_2' = \varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = \eta_2'' = 0\,;$$

die zugehörigen Systeme der Indices δ und γ sind dann:

$$1)\ \begin{matrix}1\,0 & 1\,1 & 0\,1\\ 0\,0 & 0\,1 & 0\,1\end{matrix}\qquad 2)\ \begin{matrix}1\,0 & 0\,1 & 1\,1\\ 0\,0 & 1\,1 & 1\,1\end{matrix}\qquad 3)\ \begin{matrix}1\,1 & 1\,0 & 0\,1\\ 0\,0 & 0\,1 & 0\,1\end{matrix}\qquad 4)\ \begin{matrix}1\,1 & 0\,0 & 1\,1\\ 0\,0 & 1\,1 & 1\,1\end{matrix}$$

$$5)\ \begin{matrix}1\,0 & 0\,1 & 1\,1\\ 0\,1 & 1\,0 & 1\,1\end{matrix}\qquad 6)\ \begin{matrix}0\,0 & 0\,1 & 1\,1\\ 1\,0 & 1\,1 & 1\,1\end{matrix}\qquad 7)\ \begin{matrix}0\,0 & 0\,1 & 0\,1\\ 1\,1 & 1\,0 & 0\,1\end{matrix}\qquad 8)\ \begin{matrix}0\,0 & 0\,1 & 1\,1\\ 1\,0 & 1\,1 & 0\,1\end{matrix}$$

und es ergiebt sich:

$$(38)\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\begin{matrix}\mu_1+\frac{m_1}{2} & \mu_2\\ \lambda_1+\frac{l_1}{2} & \lambda_2\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1 & \mu_2\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\[2ex]
1) = \begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}\\[1ex]
2) = \begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}\\[1ex]
3) = \begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}\\[1ex]
4) = \begin{matrix}0 & \eta_2\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}0 & \eta_2\\ 1 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & \eta_2+1\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}1 & \eta_2+1\\ 1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}\\[1ex]
5) = \begin{matrix}0 & \eta_2\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}0 & \eta_2+1\\ 1 & \varepsilon_2\end{matrix} + \begin{matrix}1 & \eta_2\\ 0 & \varepsilon_2+1\end{matrix} + \begin{matrix}1 & \eta_2+1\\ 1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}\\[1ex]
6) = \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 0 & 1\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 1 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1 & 1\end{matrix}\\[1ex]
7) = \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2+1\\ 0 & 1\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2+1\\ 1 & 1\end{matrix}\\[1ex]
8) = \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 0 & 1\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1 & 0\end{matrix} + \begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 1 & 1\end{matrix},\\[1ex]
(\varepsilon_1 = 0, 1;\quad \varepsilon_2 = 0, 1;\quad \eta_1 = 0, 1;\quad \eta_2 = 0, 1),
\end{array}\right.$$

wo

$$\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} = (-1)^{\varepsilon_1}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\vartheta\begin{matrix}\mu_1+(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

$$\cdot\,\vartheta\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

Entwickelt man diese Relationen nach Potenzen von v_1 und v_2 und setzt man die Coefficienten von v_i einander gleich, so erhält man, wenn der Einfachheit wegen der Quotient

$$\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\binom{u_1}{u_2} : \vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1\;\mu_2}{\lambda_1\;\lambda_2}\binom{u_1}{u_2}$$

durch

$$x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\binom{u_1}{u_2} \text{ oder } x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

bezeichnet wird, nach Division durch

$$\vartheta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu_1\;\mu_2}{\lambda_1\;\lambda_2}\binom{u_1}{u_2}:$$

9)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^{00}_{10}}{\partial u_i}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;0}{0\;0}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;0}{\frac{l_1}{2}\;0}\\
&= x^{10}_{00}x^{10}_{10}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{0\;\;0}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{\frac{l_1}{2}\;0}(v_i)+e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{11}_{01}x^{11}_{11}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{0\;\;\frac{l_2}{2}}(v_i)\\
&= x^{11}_{00}x^{11}_{10}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{0\;\;0}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;0}(v_i)+e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{10}_{01}x^{10}_{11}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{0\;\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}(v_i)\,;
\end{aligned}$$

10)
$$\begin{aligned}
&-e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\frac{\partial x^{10}_{00}}{\partial u_i}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;0}{0\;0}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{0\;\;0}\\
&= x^{00}_{10}x^{10}_{10}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;0}{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;0}{\frac{l_1}{2}\;0}(v_i)+e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{01}_{11}x^{11}_{11}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}(v_i)\\
&= x^{01}_{10}x^{11}_{10}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;0}(v_i)+e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{00}_{11}x^{01}_{11}\,\vartheta\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;0}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta'\genfrac{}{}{0pt}{}{0\;\;\frac{m_2}{2}}{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}(v_i)\,;
\end{aligned}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{10}^{10}}{\partial u_i}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}\;\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix} \\[2ex] = x_{10}^{00}\,x_{00}^{10}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\;\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}(v_i) + e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\,x_{11}^{01}\,x_{01}^{11}\,\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\;\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_i) \\[2ex] = x_{10}^{01}\,x_{00}^{11}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\;\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}(v_i) + e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\,x_{11}^{00}\,x_{01}^{10}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\;\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_i). \end{cases}$$

Aus jedem der Systeme (36), (37) und (38) resultiren somit je zwei Darstellungen eines differentiirten Thetaquotienten und aus anderen Specialisirungen von (35) werden sich in ähnlicher Weise immer je zwei Darstellungen der differentiirten Quotienten zweier Thetareihen der 16-gliedrigen Untergruppe ergeben.

Man bezeichne nun die den Zusammenhang mit den Doppelintegralen vermittelnden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\eta_1\eta_2}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}^{\eta'_1\eta'_2}}{\partial u_1} \\[2ex] \dfrac{\partial x_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\eta_1\eta_2}}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}^{\eta'_1\eta'_2}}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

durch

$$\frac{d\left(x_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\eta_1\eta_2}\;x_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}^{\eta'_1\eta'_2}\right)}{d(u_1\,u_2)}$$

und wähle von den beiden Darstellungen der differentiirten Quotienten diejenigen, welche $\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}(v_i)$ und $\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_i)$ enthalten; es bieten sich dann folgende Relationen dar:

$$
(42a)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,(x^{10}_{00}\,x^{00}_{10})}{d\,(u_1\,u_2)}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;0}\\
&\qquad = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{10}_{11}\,x^{11}_{10}\\
&\left(x^{11}_{00}\,x^{00}_{11}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\,\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}} - x^{10}_{01}\,x^{01}_{10}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}\right)A\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(42b)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,(x^{10}_{10}\,x^{00}_{10})}{d\,(u_1\,u_2)}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;0}\\
&\qquad = e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{10}_{01}\,x^{11}_{00}\\
&\left(x^{10}_{11}\,x^{01}_{10}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}} - x^{00}_{11}\,x^{11}_{10}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\right)A\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(42c)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,(x^{10}_{00}\,x^{10}_{10})}{d\,(u_1\,u_2)}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;0}\\
&\qquad = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{01}_{10}\,x^{00}_{11}\\
&\left(x^{11}_{00}\,x^{10}_{11}\,\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;0} - x^{10}_{01}\,x^{11}_{10}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;\frac{l_2}{0}}\right)A\,;
\end{aligned}\right.
$$

wo

$$
A = \vartheta'^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}(v_1)\,\vartheta'^{\frac{m_1}{2}\;0}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}(v_2) - \vartheta'^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}(v_2)\,\vartheta'^{\frac{m_1}{2}\;0}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}(v_1)\,.
$$

Zur Vereinfachung dieser Formeln setze man in (35)

$$v_1 = v_2 = 0\,;\quad \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \eta_1' = \eta_2' = 1\,;\quad \varepsilon_2'' = \eta_2'' = 0\,,$$

während ε_1'' und η_1'' unbestimmt bleibe. Wenn nun

$$\gamma_1 = 1\,;\quad \delta_1 = \delta_2 = \gamma_2 = 0\,;\quad \delta_1' = 1\,;\quad \gamma_1' = \delta_2' = \gamma_2' = 0$$

gesetzt wird, so erhält man:

$$\begin{aligned}\{\Pi\}^{00}_{00} &= \Pi^{00}_{00} + \Pi^{00}_{01} + \Pi^{01}_{00} + \Pi^{01}_{01} = \Pi^{10}_{00} + \Pi^{10}_{01} + \Pi^{11}_{00} + \Pi^{11}_{01}\\ &= \Pi^{00}_{10} + \Pi^{00}_{11} + \Pi^{01}_{10} + \Pi^{01}_{11} = \Pi^{10}_{10} + \Pi^{10}_{11} + \Pi^{11}_{10} + \Pi^{11}_{11}\,.\end{aligned}$$

Nach Division durch $\vartheta^{2\,\mu_1\,\mu_2}_{\;\;\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ resultiren hieraus für

$$\varepsilon_1'' = \eta_1'' = 0\,;\quad \varepsilon_1'' = 1\,;\quad \eta_1'' = 0\,:\quad \varepsilon_1'' = 0\,;\quad \eta_1'' = 1$$

folgende Gleichungen:

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
x^{11}_{11}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\,0}_{0\,0} &= x^{11}_{00}\,x^{00}_{11}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\,\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\\
&\quad - x^{10}_{01}\,x^{01}_{10}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,;\\
e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\,x^{11}_{01}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0} &= x^{10}_{11}\,x^{01}_{10}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\\
&\quad - x^{00}_{11}\,x^{11}_{10}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\,;\\
x^{01}_{11}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\;0} &= x^{11}_{00}\,x^{10}_{11}\,\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\\
&\quad - x^{10}_{01}\,x^{11}_{10}\,\vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,\vartheta^{0\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\,.
\end{aligned}\right.$$

Die Substitution dieser Werthe in (42) führt zu:

$$
(44a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d(x^{10}_{00}\,x^{00}_{10})}{d(u_1\,u_2)}\;\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\;\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\;\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\;0}\\
&= e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{10}_{11}\,x^{11}_{10}\,x^{11}_{11}\cdot\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,A\;;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(44b)\quad \left\{
\begin{aligned}
&e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\frac{d(x^{10}_{10}\,x^{00}_{10})}{d(u_1\,u_2)}\;\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\;\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\;\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\;0}\\
&= e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{10}_{01}\,x^{11}_{00}\,x^{11}_{01}\cdot\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,A\;;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(44c)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d(x^{10}_{00}\,x^{10}_{10})}{d(u_1\,u_2)}\;\vartheta^{0\;0}_{0\;0}\;\vartheta^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\;\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\;0}\\
&= e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{00}_{11}\,x^{01}_{10}\,x^{01}_{11}\cdot\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,A\,.
\end{aligned}\right.
$$

Bestimmt man noch den Werth von A, der die Determinante

$$
\begin{vmatrix}
\vartheta'^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_1) & \vartheta'^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_1)\\
\vartheta'^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_2) & \vartheta'^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_2)
\end{vmatrix}
$$

darstellt, durch die Thetareihen mit den Argumenten 0, so erhält man die einfachste Form der vorstehenden Relationen.

Aehnlich dieser Determinante giebt es im Ganzen 15, die mittelst der sechs ungeraden Functionen $\vartheta^{\eta_1\frac{m_1}{2}\;\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}$ gebildet

werden können. Sie stehen dem Werthe $\vartheta'^{\frac{m}{2}}_{\frac{l}{2}}$ in der Theorie der Thetareihen einer Variablen zur Seite und reduciren sich für $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 2$ auf die Differentialausdrücke, die zuerst Rosenhain in der früher citirten Abhandlung zu berechnen lehrte.

Wenn nun auch diese Rosenhain'schen Differentialformeln in mannigfacher Weise schon entwickelt wurden [1]), so will ich doch, statt bloss den berechneten Werth von A anzugeben, die entsprechenden Formeln für die hier zu Grunde gelegten Thetareihen einer 16-gliedrigen Untergruppe allgemein ableiten. Denn diese Ableitung kann in derselben Weise geleistet werden, in welcher im Vorhergehenden die Relationen der Thetareihen gewonnen wurden, so dass aus der Grundlage allgemeinster Formeln durch symmetrische Entwicklung die Resultate in möglichst zusammenfassender Form sich ergeben.

Es zeigt sich so zugleich, dass neben der Formel (24), welche Producte von je vier Thetareihen in Beziehung setzt, nur noch die Formel für Producte von je zwei Thetareihen für eine Theorie der 16-gliedrigen Untergruppe einer allgemeinen Gruppe von Thetareihen zweier Variablen benöthigt wird. In derselben Weise bilden ja auch die beiden entsprechenden Formeln für eine Variable das Material, aus dem die Theorie der viergliedrigen Untergruppe einer allgemeinen Gruppe von Thetareihen einer Variablen hergestellt werden kann.

Bezeichnet man die Thetareihe mit den Parametern a_{11}, a_{12}, a_{22} durch $\vartheta\left(a\,{}^{u_1}_{u_2}\right)$, die Thetareihe mit den doppelten Parameterwerthen durch $\vartheta\left(2a\,{}^{u_1}_{u_2}\right)$, so erhält man als allgemeinste Formel für das Product zweier Thetareihen der allgemeinen $l_1 l_2 m_1 m_2$-gliedrigen Gruppe:

---

1) Vergl. Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung; § 15 u. 16.

$$
(45)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\quad\mu_2}_{\lambda_1+\lambda_1'\;\lambda_2+\lambda_2'}\left(a\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right)\vartheta^{\mu_1'\quad\mu_2'}_{\lambda_1-\lambda_1'\;\mu_2-\mu_2'}\left(a\begin{matrix}u_1'\\u_2'\end{matrix}\right)\\
&=\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2} e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\vartheta^{\mu_1+\mu_1'\quad\mu_2+\mu_2'}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\left(2a\begin{matrix}u_1+u_1'\\u_2+u_2'\end{matrix}\right)\\
&\qquad\cdot\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\quad\mu_2-\mu_2'}_{\lambda_1'+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\lambda_2'+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\left(2a\begin{matrix}u_1-u_1'\\u_2-u_2'\end{matrix}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Ist nun $\lambda_i=\varepsilon_i\frac{l_i}{2}$, $\lambda_i'=\varepsilon_i'\frac{l_i}{2}$, $\mu_i=\eta_i\frac{m_i}{2}$, $\mu_i'=\eta_i'\frac{m_i}{2}$ und ersetzt man

$$
\vartheta^{\eta_1\frac{m_1}{2}\;\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\left(a\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)\ \text{durch}\ \begin{matrix}\eta_1\;\eta_2\\\varepsilon_1\;\varepsilon_2\end{matrix}(a),\quad \frac{\partial}{\partial u_i}\vartheta^{\eta_1\frac{m_1}{2}\;\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\left(a\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right)
$$

$$
\text{resp.}\ \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\vartheta^{\eta_1\frac{m_1}{2}\;\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\left(a\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right)\vartheta^{\eta_1'\frac{m_1}{2}\;\eta_2'\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1'\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2'\frac{l_2}{2}}\left(a\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right)\right)
$$

für $u_1=u_2=0$ durch

$$
\left(\begin{matrix}\eta_1\;\eta_2\\\varepsilon_1\;\varepsilon_2\end{matrix}(a)\right)'_{u_i}\quad\text{resp.}\quad\left(\begin{matrix}\eta_1\;\eta_2\\\varepsilon_1\;\varepsilon_2\end{matrix}(a)\ \begin{matrix}\eta_1'\;\eta_2'\\\varepsilon_1'\;\varepsilon_2'\end{matrix}(a)\right)'_{u_i},
$$

so erhält man:

$$
(45\text{a})\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\\varepsilon_1+\varepsilon_1' & \varepsilon_2+\varepsilon_2'\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\\varepsilon_1-\varepsilon_1' & \varepsilon_2-\varepsilon_2'\end{matrix}(a)=\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}(2a)\\
&\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\\varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_1}\cdot\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\\varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}(2a)\\
&\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\\varepsilon_1'+1 & \varepsilon_2'\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_2}\cdot\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\\varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}(2a)\\
&\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\\varepsilon_1' & \varepsilon_2'+1\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_1+\eta_1'}\cdot\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\\varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}(2a)\\
&\qquad\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\\varepsilon_1'+1 & \varepsilon_2'+1\end{matrix}(2a)\ ;
\end{aligned}\right.
$$

$$(45\text{b})\begin{cases}\left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1+\varepsilon_1' & \varepsilon_2+\varepsilon_2'\end{matrix}(a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\ \varepsilon_1-\varepsilon_1' & \varepsilon_2-\varepsilon_2'\end{matrix}(a)\\ =\left(\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\\ +(-1)^{\eta_1}\cdot\left(\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\ \varepsilon_1'+1 & \varepsilon_2'\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\\ +(-1)^{\eta_2}\cdot\left(\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'+1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\\ +(-1)^{\eta_1+\eta_2}\cdot\left(\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}\eta_1-\eta_1' & \eta_2-\eta_2'\\ \varepsilon_1'+1 & \varepsilon_2'+1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}.\end{cases}$$

Bestimmt man, dass in (45 a)

1) $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $\varepsilon_1'=\varepsilon_2'$, $\eta_1+\eta_1'\equiv\eta_2+\eta_2'\equiv$ (mod. 2);

2) $\varepsilon_1=\varepsilon_1'=0$, $\eta_1+\eta_1'\equiv 1$ (mod. 2), $\eta_2+\eta_2'\equiv 0$ (mod. 2);

3) $\varepsilon_2=\varepsilon_2'=0$, $\eta_1+\eta_1'\equiv 0$ (mod. 2), $\eta_2+\eta_2'\equiv 0$ (mod. 2),

so gewinnt man folgende Gleichungen einfachster Form:

$$(46\text{a})\begin{cases}\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon+\varepsilon' & \varepsilon+\varepsilon'\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1-\eta_1 & 1-\eta_2\\ \varepsilon-\varepsilon' & \varepsilon-\varepsilon'\end{matrix}(a)=\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon' & \varepsilon'\end{matrix}(2a)\\ +(-1)^{\eta_1+\eta_2}\cdot\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon+1 & \varepsilon+1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon'+1 & \varepsilon'+1\end{matrix}(2a);\end{cases}$$

$$(46\text{b})\begin{cases}\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & \varepsilon+\varepsilon'\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1-\eta_1 & \eta_2\\ 0 & \varepsilon-\varepsilon'\end{matrix}(a)\\ =\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{matrix}(2a)\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon'\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_2}\cdot\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon+1\end{matrix}(2a)\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon'+1\end{matrix}(2a);\end{cases}$$

$$(46\text{c})\begin{cases}\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon+\varepsilon' & 0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1 & 1-\eta_2\\ \varepsilon-\varepsilon' & 0\end{matrix}(a)\\ =\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon & 0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon' & 0\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_1}\cdot\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon+1 & 0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon'+1 & 0\end{matrix}(2a).\end{cases}$$

Bestimmt man ferner, dass in (45 b)

1) $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_1'=\varepsilon_2'$, $\eta_1+\eta_1'\equiv\eta_2+\eta_2'\equiv 1$ (mod. 2);

2) $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_1'=0$, $\eta_1+\eta_1'\equiv 1$ (mod. 2), $\eta_2+\eta_2'\equiv 0$ (mod. 2);

3) $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_2'=0$, $\eta_1+\eta_1'\equiv 0$ (mod. 2), $\eta_2+\eta_2'\equiv 1$ (mod. 2),

so resultirt:

$$(47\mathrm{a})\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1+\varepsilon & \varepsilon\end{matrix}(a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}1-\eta_1 & 1-\eta_2\\ 1-\varepsilon & -\varepsilon\end{matrix}(a)\\ &=\left\{1-(-1)^{\varepsilon(\eta_1+\eta_2)+\eta_1}\right\}\left\{\left(\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}1&1\\ \varepsilon&\varepsilon\end{matrix}(2a)\right.\\ &\left.-(-1)^{\eta_1+\eta_2}\cdot\left(\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}1&1\\ \varepsilon+1&\varepsilon+1\end{matrix}(2a)\right\};\end{aligned}\right.$$

$$(47\mathrm{b})\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1 & \varepsilon\end{matrix}(a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}\eta_1-1 & \eta_2\\ -1 & \varepsilon\end{matrix}(a)=\left\{1-(-1)^{\varepsilon\eta_2+\eta_1}\right\}\\ &\left\{\left(\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}1&0\\ 0&\varepsilon\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_2}\cdot\left(\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}1&0\\ 0&\varepsilon+1\end{matrix}(2a)\right\};\end{aligned}\right.$$

$$(47\mathrm{c})\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon & 1\end{matrix}(a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2-1\\ \varepsilon & -1\end{matrix}(a)=\left\{1-(-1)^{\varepsilon\eta_1+\eta_2}\right\}\\ &\left\{\left(\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}0&1\\ \varepsilon&0\end{matrix}(2a)+(-1)^{\eta_1}\cdot\left(\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}(2a)\right)'_{u_i}\cdot\begin{matrix}0&1\\ \varepsilon+1&0\end{matrix}(2a)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Aus (46a) und (47a), (46b) und (47b), (46c) und (47c) folgen nun schliesslich, wenn die Determinante

$$\left|\begin{matrix}\left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}(a)\right)'_{u_1} & \left(\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_3'\end{matrix}(a)\right)'_{u_1}\\ \left(\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}(a)\right)'_{u_1'} & \left(\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{matrix}(a)\right)'_{u_2}\end{matrix}\right|\quad\text{durch}\quad\left|\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}(a)\quad\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{matrix}(a)\right|$$

bezeichnet wird, folgende drei Relationen:

$$(48\mathrm{a})\quad\left\{\begin{aligned}&\left|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}(2a)\quad\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}(2a)\right|\left(1-(-1)^{\varepsilon(\eta_1+\eta_2)+\eta_1}\right)\\ &\cdot\left(1-(-1)^{\varepsilon'(\eta_1'+\eta_2')+\eta_1'}\right)\cdot(-1)^{\eta_1'+\eta_2'+1}\\ &=\left|\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1+\varepsilon & \varepsilon\end{matrix}(a)\quad\begin{matrix}\eta_1' & \eta_2'\\ 1+\varepsilon' & \varepsilon'\end{matrix}(a)\right|\\ &\cdot\frac{\begin{matrix}1-\eta_1 & 1-\eta_2\\ 1-\varepsilon & -\varepsilon\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1-\eta_1' & 1-\eta_2'\\ 1-\varepsilon' & -\varepsilon'\end{matrix}(a)}{\begin{matrix}\eta_1+\eta_1' & \eta_2+\eta_2'+1\\ \varepsilon+\varepsilon'+1 & \varepsilon+\varepsilon'+1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'+\eta_1+1 & \eta_2'+\eta_2\\ \varepsilon-\varepsilon'-1 & \varepsilon-\varepsilon'-1\end{matrix}(a)};\end{aligned}\right.$$

$$\tag{48b}\left\{\begin{aligned} &\left| \begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}(2a) \quad \begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}(2a) \right| \\ &\cdot\left(1-(-1)^{\varepsilon\eta_2+\eta_1}\right)\left(1-(-1)^{\varepsilon'\eta_2'+\eta_1'}\right)\cdot(-1)^{\eta_2'} \\ &= \left| \begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\1&\varepsilon\end{smallmatrix}(a) \quad \begin{smallmatrix}\eta_1'&\eta_2'\\1&\varepsilon'\end{smallmatrix}(a) \right| \\ &\cdot \frac{\begin{smallmatrix}\eta_1-1&\eta_2\\-1&\varepsilon\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}\eta_1'-1&\eta_2'\\-1&\varepsilon'\end{smallmatrix}(a)}{\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2+\eta_2'+1\\0&\varepsilon+\varepsilon'+1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}1-\eta_1&\eta_2'+\eta_2+1\\0&\varepsilon-\varepsilon'-1\end{smallmatrix}(a)}\,; \end{aligned}\right.$$

$$\tag{48c}\left\{\begin{aligned} &\left| \begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}(2a) \quad \begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}(2a) \right| \\ &\cdot\left(1-(-1)^{\varepsilon\eta_1+\eta_2}\right)\left(1-(-1)^{\varepsilon'\eta_1'+\eta_2'}\right)\cdot(-1)^{\eta_1'} \\ &= \left| \begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\\varepsilon&1\end{smallmatrix}(a) \quad \begin{smallmatrix}\eta_1'&\eta_2'\\\varepsilon'&1\end{smallmatrix}(a) \right| \\ &\cdot \frac{\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2-1\\\varepsilon&-1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}\eta_1'&\eta_2'-1\\\varepsilon'&-1\end{smallmatrix}(a)}{\begin{smallmatrix}\eta_1+\eta_1'+1&\eta_2\\\varepsilon+\varepsilon'+1&0\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}\eta_1'+\eta_1+1&1-\eta_2\\\varepsilon-\varepsilon'-1&0\end{smallmatrix}(a)}\,. \end{aligned}\right.$$

Dividirt man diese drei Gleichungen durch die aus (46) sich ergebenden Producte:

$$\tag{49a}\left\{\begin{aligned} &4\cdot\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}(2a) \\ &=\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}(a)\,, \end{aligned}\right.$$

$$\tag{49b}\left\{\begin{aligned} &4\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}(2a) \\ &=\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}(a)\,, \end{aligned}\right.$$

$$\tag{49c}\left\{\begin{aligned} &4\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}(2a)\cdot\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}(2a) \\ &=\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}(a)\cdot\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}(a) \end{aligned}\right.$$

so folgt insbesondere:

$$
(50)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}(2a)\right|}{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}(2a)}
=\frac{\left|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}(a)\right|}{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}(a)};\\
&\frac{\left|\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}(2a)\right|}{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(2a)}
=\frac{\left|\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}(a)\right|}{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(a)};\\
&\frac{\left|\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}(2a)\right|}{\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(2a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}(2a)}
=\frac{\left|\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}(a)\right|}{\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}(a)}.
\end{aligned}\right.
$$

Da diese Quotienten ihren Werth nicht ändern, wenn die Parameter den doppelten Werth erhalten, so kann man die letzteren durch ihre Unendlichvielfachen ersetzen; dann ist aber der Werth der Quotienten unmittelbar ersichtlich gleich $\frac{l_1\cdot l_2}{4}$. Mit Rücksicht darauf folgt aus (48) allgemein:

$$
(51)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left|\begin{matrix}\eta_1&\eta_2\\1+\varepsilon&\varepsilon\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'&\eta_2'\\1+\varepsilon'&\varepsilon'\end{matrix}(a)\right|=\alpha\,\frac{l_1\cdot l_2}{4}\\
&\cdot\frac{\begin{matrix}\eta_1+\eta_1'&\eta_2+\eta_2'+1\\\varepsilon+\varepsilon'+1&\varepsilon+\varepsilon'+1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'+\eta_1+1&\eta_2'+\eta_2\\\varepsilon-\varepsilon'-1&\varepsilon-\varepsilon'-1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}(a)}{\begin{matrix}1-\eta_1&1-\eta_2\\1-\varepsilon&-\varepsilon\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1-\eta_1'&1-\eta_2'\\1-\varepsilon'&-\varepsilon'\end{matrix}(a)};\\
&\left|\begin{matrix}\eta_1&\eta_2\\1&\varepsilon\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'&\eta_2'\\1&\varepsilon'\end{matrix}(a)\right|=\beta\,\frac{l_1\cdot l_2}{4}\\
&\cdot\frac{\begin{matrix}\eta_1&\eta_2+\eta_2'+1\\0&\varepsilon+\varepsilon'+1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1-\eta_1&\eta_2'+\eta_2+1\\0&\varepsilon-\varepsilon'-1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(a)}{\begin{matrix}\eta_1-1&\eta_2\\-1&\varepsilon\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'-1&\eta_2'\\-1&\varepsilon'\end{matrix}(a)};\\
&\left|\begin{matrix}\eta_1&\eta_2\\\varepsilon&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'&\eta_2'\\\varepsilon'&1\end{matrix}(a)\right|=\gamma\,\frac{l_1\cdot l_2}{4}\\
&\cdot\frac{\begin{matrix}\eta_1+\eta_1'+1&\eta_2\\\varepsilon+\varepsilon'+1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'+\eta_1+1&1-\eta_2\\\varepsilon-\varepsilon'-1&0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}(a)}{\begin{matrix}\eta_1&\eta_2-1\\\varepsilon&-1\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}\eta_1'&\eta_2'-1\\\varepsilon'&-1\end{matrix}(a)}.
\end{aligned}\right.
$$

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\left(1-(-1)^{\varepsilon(\eta_1+\eta_2)+\eta_1}\right)\left(1-(-1)^{\varepsilon'(\eta'_1+\eta'_2)+\eta'_1}\right).(-1)^{\eta'_1+\eta'_2+1};$$

$$\beta = \tfrac{1}{4}\left(1-(-1)^{\varepsilon\eta_2+\eta_1}\right)\left(1-(-1)^{\varepsilon'\eta'_2+\eta'_1}\right).(-1)^{\eta'_2};$$

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\left(1-(-1)^{\varepsilon\eta_1+\eta_2}\right)\left(1-(-1)^{\varepsilon'\eta'_1+\eta'_2}\right).(-1)^{\eta'_1}.$$

$$(\varepsilon = 0, 1;\ \varepsilon' = 0, 1;\ \eta_1 = 0, 1;\ \eta_2 = 0, 1;\ \eta'_1 = 0, 1;\ \eta'_2 = 0, 1).$$

Damit sind die Darstellungen der 15 Determinanten durch Producte von je vier Thetareihen gewonnen. Es folgt insbesondere:

$$(52)\quad \left|\begin{matrix}1\,1\\1\,0\end{matrix}(a)\cdot\begin{matrix}1\,0\\1\,1\end{matrix}(a)\right| = A = \frac{l_1\cdot l_2}{4}\cdot\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\\frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\0 & 0\end{matrix}\cdot\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}.$$

Die Relationen (44) nehmen somit folgende Form an:

$$(53)\quad\begin{cases}\dfrac{d(x^{10}_{00}\,x^{00}_{10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\dfrac{l_1\cdot l_2}{4}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{10}_{11}\,x^{11}_{10}\,x^{11}_{11};\\[2ex] e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\dfrac{d(x^{10}_{10}\,x^{00}_{10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot\dfrac{l_1\cdot l_2}{4}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{10}_{01}\,x^{11}_{00}\,x^{11}_{01}:\\[2ex] \dfrac{d(x^{10}_{00}\,x^{10}_{10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\dfrac{l_1\cdot l_2}{4}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{00}_{11}\,x^{01}_{10}\,x^{01}_{11}.\end{cases}$$

Zugleich ergeben sich die Relationen:

$$(53a)\quad\begin{cases}\dfrac{d(x^{2\,10}_{\ \,00}\,x^{2\,00}_{\ \,10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot l_1 l_2\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{10}_{00}\,x^{00}_{10}\,x^{10}_{11}\,x^{11}_{10}\,x^{11}_{11};\\[2ex] e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\dfrac{d(x^{2\,10}_{\ \,10}\,x^{2\,00}_{\ \,10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot l_1 l_2\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{10}_{10}\,x^{00}_{10}\,x^{10}_{01}\,x^{11}_{00}\,x^{11}_{01};\\[2ex] \dfrac{d(x^{2\,10}_{\ \,00}\,x^{2\,10}_{\ \,10})}{d(u_1\,u_2)} = e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot l_1 l_2\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot x^{10}_{00}\,x^{10}_{10}\,x^{00}_{11}\,x^{01}_{10}\,x^{01}_{11}.\end{cases}$$

§ 5.

Zur expliciten Darstellung der durch diese Formeln transformirbaren Doppelintegrale bedarf man der Relationen, die zwischen den Functionen $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ statt haben. Man erhält sie insgesammt aus (35), wenn $v_i = v_i' = 0$ gesetzt wird. Sie sind von zweifacher Art, je nachdem das System der Indices ε_1', ε_2', η_1', η_2' übereinstimmend oder nicht übereinstimmend mit dem Systeme der Indices ε_1'', ε_2'', η_1'', η_2'' specialisirt wird. Setzt man $\varepsilon_i' = \varepsilon_i''$; $\eta_i' = \eta_i''$, so erhält man lineare Beziehungen zwischen den Quadraten von je drei der Functionen $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. In diesem Falle müssen die δ, δ', γ, γ' der Formel (35) folgende drei Congruenzen erfüllen:

$$(\varepsilon_1'+\delta_1)(\eta_1'+\gamma_1)+(\varepsilon_2'+\delta_2)(\eta_1'+\gamma_2)\equiv 1 \pmod{2};$$
$$(\varepsilon_1'+\delta_1')(\eta_1'+\gamma_1')+(\varepsilon_2'+\delta_2')(\eta_1'+\gamma_2')\equiv 1 \pmod{2};$$
$$(\varepsilon_1'+\delta_1+\delta_1')(\eta_1'+\gamma_1+\gamma_1')+(\varepsilon_2'+\delta_2+\delta_2')(\eta_2'+\gamma_2+\gamma_2')\equiv 1 \pmod{2}.$$

Es zerfällt dann (35) in folgende Systeme von Gleichungen:

(54a)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2{}^{0\,0}_{0\,0}\\
&=\begin{smallmatrix}0&\eta_2\\0&\varepsilon_2\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}1&\eta_2+1\\0&\varepsilon_2+1\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}0&\eta_2+1\\1&\varepsilon_2+1\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}1&\eta_2\\1&\varepsilon_2\end{smallmatrix}\\
&=\begin{smallmatrix}\eta_1&0\\\varepsilon_1&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1+1&1\\\varepsilon_1+1&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1+1&0\\\varepsilon_1+1&1\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1&1\\\varepsilon_1&1\end{smallmatrix};\\
&\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\\varepsilon_1&\varepsilon_2\end{smallmatrix}=e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta^2{}^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2{}^{\eta_1\frac{m_1}{2}\;\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

(54b)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\;0}\\
&=\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\0&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\1&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1+1&\eta_2+1\\0&1\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1+1&\eta_2+1\\1&1\end{smallmatrix}\\
&=\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\0&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2+1\\1&0\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2+1\\0&1\end{smallmatrix}+\begin{smallmatrix}\eta_1&\eta_2\\1&1\end{smallmatrix};
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix} = e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54c)

$$\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ 0\;\;0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2\\ 0 & 1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2\\ 1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ 1\;\;1\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ 0\;\;0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ 0\;\;1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2+1\\ 1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2+1\\ 1 & 1\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix} = e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & (1+\eta_2)\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54d)

$$\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}0\;\;0\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}1\;\;0\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}0\;\;0\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}1\;\;1\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}\eta_1\,\eta_2\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{matrix} = (-1)^{\eta_1}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54e)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\\
&=\begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}\\
&=\begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2+1\end{matrix};\\
&\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}=(-1)^{\eta_2}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & (1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

(54f)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\\
&=\begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1+1 & \varepsilon_2\end{matrix}\\
&=\begin{matrix}0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2+1\end{matrix};\\
&\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}=(-1)^{\eta_1+\eta_2}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & (1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

(54g)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^{2\,\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix}}\\
&=\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2\\ 0 & 1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & \eta_2\\ 1 & 1\end{matrix}\\
&=\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2+1\\ 1 & 1\end{matrix};
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} = e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & (1+\eta_2)\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54 h)

$$\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}0 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}0 & \eta_2\\ \varepsilon_1+1 & 1\end{matrix}+\begin{matrix}1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}1 & \eta_2\\ \varepsilon_1+1 & 1\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}0 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}0 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & 1\end{matrix}+\begin{matrix}1 & \eta_2+1\\ \varepsilon_1 & 0\end{matrix}+\begin{matrix}1 & \eta_2+1\\ \varepsilon_1 & 1\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} = (-1)^{\eta_1}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & (1+\eta_2)\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54 i)

$$\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & 1\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & 0\\ 1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & 1\\ 1 & \varepsilon_2+1\end{matrix}$$

$$=\begin{matrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1 & 0\\ 1 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & 1\\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1+1 & 1\\ 1 & \varepsilon_2\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}\eta_1 & \eta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix} = (-1)^{\eta_2}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}$$

$$\cdot\,\vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{matrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & (1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

(54k)
$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\\
&=\begin{matrix}0&\eta_2\\0&\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}0&\eta_2\\1&\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1&\eta_2\\0&\varepsilon_2\end{matrix}+\begin{matrix}1&\eta_2\\1&\varepsilon_2\end{matrix}=\begin{matrix}\eta_1&0\\\varepsilon_1&0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1&0\\\varepsilon_1&1\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1&1\\\varepsilon_1&0\end{matrix}+\begin{matrix}\eta_1&1\\\varepsilon_1&1\end{matrix};\\
&\begin{matrix}\eta_1&\eta_2\\\varepsilon_1&\varepsilon_2\end{matrix}=(-1)^{\eta_1+\eta_2}\cdot e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\\
&\cdot\vartheta^{2\;\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\;\;\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\cdot\vartheta^{2\;(1+\eta_1)\frac{m_1}{2}\;\;(1+\eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\;\;(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\;(1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Wird in diesen Gleichungen $v_1 = v_2 = 0$ gesetzt, so resultiren sechzig Relationen zwischen den Thetafunctionen, welche die Quadrate von je vier der sechs Functionen:

$$\vartheta^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}},\qquad \vartheta^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+(1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}},$$

$$\vartheta^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+(1+\eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}},\qquad \vartheta^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+(1+\eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+(1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}},$$

$$\vartheta^{\mu_1+(1+\eta_1)\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+(1+\eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+(1+\varepsilon_2)\frac{l_2}{2}},\qquad \vartheta^{\mu_1+(1+\eta_1)\frac{m_1}{2}\;\;\mu_2+(1+\eta_2)\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+(1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2}\;\;\lambda_2+(1+\varepsilon_2)\frac{l_1}{2}}$$

$$(\varepsilon_1 = 0, 1\;;\quad \eta_1 = 0, 1\;;\quad \varepsilon_2 = 0, 1\;;\quad \eta_2 = 0, 1)$$

in lineare Beziehung setzen.

Diesen sechzehn Systemen von je sechs Functionen entsprechen die sechzehn ROSENHAIN'schen Sechsersysteme, während die erwähnten sechzig Relationen in zusammenfassender Weise die 240 linearen Relationen zwischen den Quotienten der ROSENHAIN'schen Thetareihen enthalten [1]).

Nach Division durch das Quadrat von $\vartheta^{\mu_1\,\mu_2}_{\lambda_1\,\lambda_2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ erhält man

---

1) Vgl. KRAUSE, l. c. §§ 6, 7, 8.

aus den Thetarelationen solche zwischen den Functionen $x^{\eta_1\ \eta_2}_{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}$ von der Art, dass die letzteren in sechs Gruppen von je fünf Functionen zerfallen und die Quadrate der Functionen jeder Gruppe zu je dreien durch eine lineare Relation an einander geknüpft sind.

Die Gruppen sind:

$$(55)\quad \left|\begin{array}{lllll}
x^{00}_{01}, & x^{01}_{00}, & x^{01}_{11}, & x^{11}_{01}, & x^{11}_{11};\\
x^{00}_{01}, & x^{01}_{01}, & x^{01}_{10}, & x^{11}_{00}, & x^{11}_{10};\\
x^{01}_{00}, & x^{01}_{01}, & x^{00}_{11}, & x^{10}_{01}, & x^{10}_{11};\\
x^{00}_{10}, & x^{10}_{00}, & x^{10}_{11}, & x^{11}_{10}, & x^{11}_{11};\\
x^{00}_{10}, & x^{10}_{10}, & x^{10}_{01}, & x^{11}_{00}, & x^{11}_{01};\\
x^{10}_{00}, & x^{10}_{10}, & x^{00}_{11}, & x^{01}_{10}, & x^{01}_{11}.
\end{array}\right.$$

Es gehören nun die Functionenpaare, aus denen die Determinanten (53) resp. (53a) gebildet wurden, je einer der drei letzten Gruppen an und es ergeben sich somit zur expliciten Darstellung dieser Determinanten die Relationen:

$$(56\,\mathrm{a})\quad \left\{\begin{array}{l}
e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^2{}^{10}_{11}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\\
\quad = \vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^2{}^{00}_{10}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix} - x^2{}^{10}_{00}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix};\\
e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^2{}^{11}_{10}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\\
\quad = -\vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^2{}^{00}_{10}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix} + x^2{}^{10}_{00}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix};\\
e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^2{}^{11}_{11}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\\
\quad = \vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^2{}^{00}_{10}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix} - x^2{}^{10}_{00}\cdot \vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix};
\end{array}\right.$$

$$-e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;01}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

56 b)

$$x^{2\,11}_{\;\;00}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix};$$

$$-e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\,x^{2\,11}_{\;\;01}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{2\,00}_{\;\;11}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-x^{2\,10}_{\;\;00}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix};$$

56 c)

$$-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,01}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}-x^{2\,10}_{\;\;00}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix};$$

$$e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_1}{m_1}\right)}\cdot x^{2\,01}_{\;\;11}\cdot\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}$$

$$=\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\;0}-x^{2\,10}_{\;\;00}\cdot\vartheta^2{}^{0\;0}_{0\;0}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\cdot\vartheta^2{}^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\,.$$

Mit Zuhilfenahme dieser Relationen erhält man schliesslich folgende Transformationen von Doppelintegralen:

(57a)

$$\iint\frac{dx^{10}_{00}\cdot dx^{00}_{10}}{\sqrt{R(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;10})}}=\iint du_1\cdot du_2\,;$$

$$R(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;10})=\left(\frac{l_1\cdot l_2}{4}\right)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}}{\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}}$$

$$\cdot\left(\vartheta^2{}^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2{}^{0\;\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;0}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}-\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00}\right)$$

$$\cdot\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2{}^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}+\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\;\frac{l_2}{2}}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00}-\vartheta^2{}^{0\;\;0}_{0\;\frac{l_2}{2}}\right)$$

$$\cdot\left(\vartheta^2{}^{0\;0}_{0\;0}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2{}^{0\;\;0}_{\frac{l_1}{2}\;0}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10}-\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;0}_{0\;\;0}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00}\right).$$

$$\iint\frac{dx^{10}_{10}\cdot dx^{00}_{10}}{\sqrt{R(x^{2\,10}_{\;\;10}\,x^{2\,00}_{\;\;10})}}=\iint du_1\cdot du_2\,;$$

$$R(x^{2\,10}_{\;\;10}\,x^{2\,00}_{\;\;10})=\left(\frac{l_1\cdot l_2}{4}\right)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_2}}}{\vartheta^2{}^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}}$$

$$
(57\text{b})\left\{
\begin{aligned}
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,00}_{\;\;10} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\right).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(57\text{c})\left\{
\begin{aligned}
&\iint\frac{dx^{10}_{00}\cdot dx^{10}_{10}}{\sqrt{R\,(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,10}_{\;\;10})}} = \iint du_1\cdot du_2\,;\\
&R(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,10}_{\;\;10}) = \left(\frac{l_1\cdot l_2}{4}\right)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}}{\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0\end{smallmatrix} - \vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10} - \vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix} - \vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;00} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}\cdot x^{2\,10}_{\;\;10}\right).
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left|
\begin{aligned}
&\iint\frac{dx^{2\,10}_{\;\;00}\cdot dx^{2\,00}_{\;\;10}}{\sqrt{R_1\,(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;10})}} = \iint du_1\cdot du_2\,;\\
&R_1\,(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;10}) = (l_1\cdot l_2)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}}{\vartheta^2\begin{smallmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(58\text{a})\left\{\begin{aligned}
&\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}} x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}}\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} - \vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}}\right)\\
&\cdot\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} + \vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}} - \vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} - \vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(58\text{b})\left\{\begin{aligned}
&\iint\frac{d x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\cdot d x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}}}{\sqrt{R_1\left(x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\, x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}}\right)}} = \iint du_1\cdot du_2\,;\\
&R_1\left(x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\, x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}}\right) = (l_1\cdot l_2)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}}{\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}}\\
&\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}} x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}}\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} + \vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\right)\\
&\cdot\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10}} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&\iint\frac{d x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}}\cdot d x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}}{\sqrt{R_1\left(x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}}\, x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\right)}} = \iint du_1\cdot du_2\,;\\
&R_1\left(x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00}}\, x^{2\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10}}\right) = (l_1\cdot l_2)^2\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}}{\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}}
\end{aligned}\right.
$$

$$58\,c)\left\{\begin{aligned}&\cdot x^{2}{}^{10}_{00}\,x^{2}{}^{10}_{10}\left(\vartheta^{2}{}^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\;\;0}-\vartheta^{2}{}^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\;0}\cdot x^{2}{}^{10}_{00}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^{2}{}^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\cdot x^{2}{}^{10}_{10}\right)\\&\cdot\left(\vartheta^{2}{}^{0\;0}_{0\,\frac{l_2}{2}}\cdot x^{2}{}^{10}_{00}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^{2}{}^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\cdot x^{2}{}^{10}_{10}-\vartheta^{2}{}^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right)\\&\cdot\left(\vartheta^{2}{}^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\;0}-\vartheta^{2}{}^{0\,0}_{0\,0}\cdot x^{2}{}^{10}_{00}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta^{2}{}^{0\;0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\cdot x^{2}{}^{10}_{10}\right).\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Transformationen erhält man unmittelbar andere, für welche die rechts und links stehenden Indices der Thetareihen und der Functionen x mit einander vertauscht sind, da die Relationen für die Thetareihen sich nicht ändern, wenn die genannte Vertauschung der Indices vorgenommen wird. Es können somit die entsprechenden Transformationen für die Functionen x^{00}_{01}, x^{01}_{00}, x^{01}_{01} aus (57) und (58) unvermittelt abgelesen werden. Da ferner die Quadrate der fünf Functionen einer Gruppe durch eine lineare Gleichung an einander geknüpft sind, so kann aus der für zwei Functionen einer Gruppe gebildeten Determinante von der Form (53) resp. (53a) für jedes andere Functionenpaar derselben Gruppe die entsprechende Determinante nebst der zugehörigen Transformationsformel direct entwickelt werden. Es ist ja, wenn:

$$x_1^2 = a_1 x_3^2 + b_1 x_4^2\,;\quad x_2^2 = a_2 x_3^2 + b_2 x_4^2\,,$$

$$\frac{d(x_1^2 x_2^2)}{d(u_1 u_2)} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\frac{d(x_3^2 x_4^2)}{d(u_1 u_2)}\,,$$

$$x_1 x_2 \frac{d(x_1 x_2)}{d(u_1 u_2)} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x_3 x_4 \frac{d(x_3 x_4)}{d(u_1 u_2)}\,.$$

Man erhält somit folgendes Resultat:

Scheidet man die fünfzehn Functionen $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ *in die sechs Gruppen* (55) *und bezeichnet man die fünf Functionen irgend einer Gruppe durch* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *in beliebiger Reihenfolge, so erhält man die Relationen:*

$$(59\text{a})\qquad \frac{d(x_1 x_2)}{d(u_1 u_2)} = A \cdot x_3 x_4 x_5\ ;$$

$$(59\text{b})\qquad \frac{d(x_1^2 x_2^2)}{d(u_1 u_2)} = 4A \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\ .$$

Mittelst der quadratischen Beziehungen zwischen den Functionen einer Gruppe folgen sodann die Transformationen:

$$(60\text{a})\quad \iint \frac{dx_1 \cdot dx_2}{A \cdot x_3 x_4 x_5} = \iint \frac{dx_1 \cdot dx_2}{\sqrt{R(x_1^2 x_2^2)}} = \iint du_1 \cdot du_2\ ;$$

$$(60\text{b})\quad \iint \frac{dx_1^2 \cdot dx_2^2}{4A \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \iint \frac{dx_1^2 \cdot dx_2^2}{\sqrt{R_1(x_1^2 x_2^2)}} = \iint du_1 \cdot du_2\ ,$$

wo die ganzen rationalen Functionen R und R_1 von der aus (57) *und* (58) *erkennbaren Beschaffenheit, bis zum sechsten resp. vierten Grade der Argumente x_i resp. x_i^2 steigen und beide Functionen nur Quadrate der x_i enthalten.*

Aus (59b) folgt noch als Analogon zu der in I (42) und (43) dargestellten Eigenschaft der Thetareihen einer Variablen, dass die aus den Quadraten der fünf Functionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 hergestellten zehn Substitutionsdeterminanten von constanten Factoren abgesehen dem Producte der fünf Functionen gleich sind. Es ist daher:

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} & a\iint x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdot du_1\, du_2 = a_{12}\iint dx_1^2 \cdot dx_2^2 \\ & = a_{13}\iint dx_1^2 \cdot dx_3^2 = \cdots = a_{45}\iint dx_4^2 \cdot dx_5^2\ . \end{aligned}\right.$$

Damit ist der Zusammenhang der Thetareihen mit den Doppelintegralen in seiner einfachsten Gestalt erschöpfend dargelegt; denn die beiden Integralformen (60) enthalten je sechzig individuelle Formen, die insgesammt den Integralen (57) und (58) gleichen, und in völliger Ausführung erhalten werden, wenn die R und R_1 durch die verschiedenen in den sechs Gruppen (55) enthaltenen Functionenpaare ausgedrückt werden.

Ein erstes Beispiel solcher Transformationen von Doppelintegralen durch Thetareihen giebt Herr Scheibner in der Abhandlung [1]: »Ueber eine Transformationsformel für Doppel-

---

1) Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 15. December 1884 oder Crelle's Journal Bd. CIII.

integrale«. Der dort mittelst der Formeln der Rosenhain'schen Thetareihen dargestellte Fall wird mit Hilfe der Quotienten $\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{00}}$ und $\frac{\varphi_{20}}{\varphi_{00}}$, auf die auch Rosenhain in seinen Untersuchungen über den Zusammenhang mit den hyperelliptischen Integralen sich beschränkte, hergeleitet. Beide Quotienten gehören einer der sechs Gruppen (55) an; denn es ist (nach (24 a)):

$$\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{00}} = \frac{\vartheta^{11}_{10}}{\vartheta^{11}_{00}}, \quad \frac{\varphi_{20}}{\varphi_{00}} = \frac{\vartheta^{01}_{10}}{\vartheta^{11}_{00}},$$

so dass dieselben den Functionen x^{00}_{10}, x^{10}_{10} entsprechen und sie direct darstellen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\mu_1 = \frac{m_1}{2}$, $\mu_2 = \frac{m_2}{2}$ und $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 2$ gesetzt wird. Es geht auch thatsächlich unter diesen Beschränkungen die oben für $x^{2\,00}_{\;\;10}$ und $x^{2\,10}_{\;\;10}$ entwickelte Formel in die von Herrn Scheibner in der citirten Abhandlung mitgetheilte über.

Auch Herr Brioschi berührt in seiner Abhandlung [1]: »Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine« den Zusammenhang der von ihm behandelten hyperelliptischen Functionen mit den Doppelintegralen. Er definirt fünf Functionen p_r und zehn Functionen p_{rs} als hyperelliptische Functionen mit einem Index und mit zwei Indices und weist für die Functionen mit einem Index die Eigenschaft nach: $\frac{d(p_r p_s)}{d(u_1 u_2)} = \text{Const.}\ p_m p_\lambda p_\mu$, auf Grund welcher er die Transformationsformel (10) Cap. III seiner Abhandlung gewinnt. Gemäss der linearen Beziehung zwischen den Quadraten dieser fünf Functionen mit einem Index entsprechen sie den fünf Functionen einer der sechs Gruppen (55). Die für die Functionen mit einem Index gefundene Eigenschaft wird sodann in demselben Capitel auf Combinationen bestimmter Art von Functionen mit einem Index und mit zwei Indices ausgedehnt. Nachdem dann Herr Brioschi die Darstellung der Functionen p durch Thetaquotienten gegeben hat, zeigt er auch im 9. Capitel an einem Beispiele die Einkleidung der erwähnten Eigenschaften der Functionen p in das Gewand der Thetareihen.

---

1) Annali di Matematica pura ed applicada; Serie II, tomo XIV; p. 243; 254 flg.; 337.

§ 6.

Es bleibt nun noch der Zusammenhang der nicht einer und derselben Gruppe angehörenden Functionenpaare mit den Doppelintegralen zu erörtern. Solcher Functionenpaare giebt es 45, zu welchen auch das Paar: x^{00}_{10}, x^{00}_{01} gehört. Für dieses Paar ergeben sich beispielsweise folgende Transformationsformeln:

Da aus den beiden Darstellungen (39) von $\frac{d x^{00}_{10}}{d u_i}$ nach Vertauschung der links und rechts stehenden Indices λ und μ die beiden entsprechenden Darstellungen von $\frac{d x^{00}_{01}}{d u_i}$ unmittelbar abgelesen werden können, so erhält man bei geeigneter Combination von je zwei der so gewonnenen Darstellungen:

$$
(62)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4}{l_1 l_2}\cdot\frac{d(x^{00}_{10}x^{00}_{01})}{d(u_1 u_2)}\cdot\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\
&= x^{01}_{00}x^{01}_{01}x^{11}_{00}x^{11}_{10}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\\
&+ e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{01}_{00}x^{01}_{01}x^{10}_{01}x^{10}_{11}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta^2\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{0}\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\\
&- e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{10}_{01}x^{10}_{11}x^{11}_{10}x^{11}_{11}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\
&= x^{10}_{00}x^{10}_{10}x^{11}_{00}x^{11}_{01}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\\
&+ e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{10}_{00}x^{10}_{10}x^{01}_{10}x^{01}_{11}\,\vartheta^2\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\\
&- e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{01}_{10}x^{01}_{11}x^{11}_{01}x^{11}_{11}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{matrix}.
\end{aligned}\right.
$$

Durch Multiplication mit $4\, x_{10}^{00}\, x_{01}^{00}$ folgt daraus die entsprechende Relation für die Quadrate der Functionen x_{10}^{00} und x_{01}^{00}.

Zur expliciten Darstellung der durch diese Formeln transformirbaren Doppelintegrale sind Relationen nöthig, die drei Functionen x, welche verschiedenen Gruppen angehören, in Beziehung setzen. Sie ergeben sich aus (35), wenn ε_1', ε_2', η_1', η_2' nicht übereinstimmend mit dem Indicessysteme ε_1'', ε_2'', η_1'', η_2'' specialisirt und die linearen Relationen zwischen den Quadraten der x zu Hilfe genommen werden. Sie entsprechen den von Rosenhain und Göpel zuerst gefundenen biquadratischen Relationen zwischen den gewöhnlichen Thetareihen und steigen für jede der drei Functionen bis zum vierten Grade an.

Statt nun auf diesem Wege die Formeln für die 45 Functionenpaare einzeln abzuleiten, gewinnt man sie in einheitlicher Zusammenfassung, indem man die fünfzehn Functionen x in ihrer Abhängigkeit von den zweiten Differentialquotienten der Function $\log \vartheta_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}\binom{u_1}{u_2}$ darstellt und für die letzteren den Zusammenhang mit den Doppelintegralen darlegt. Es ist so implicite auch für zwei beliebige Functionen x der Zusammenhang mit den Doppelintegralen gegeben. Er kann somit für die einer und derselben Gruppe angehörigen x nochmals gewonnen und für die verschiedenen Gruppen zugehörenden x direct berechnet werden.

Ich setze:

$$E_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} \log \vartheta_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}; \quad Z_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \log \vartheta_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2};$$

$$H_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} \log \vartheta_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}.$$

Bestimmt man, dass in (54) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ und entwickelt man die Logarithmen der so resultirenden zwanzig Gleichungen nach Potenzen von v_1 und v_2, so erhält man durch Gleichsetzen der Coefficienten von v_1^2, $v_1 v_2$, v_2^2 sechzig Relationen, deren jede eine der drei Functionen $E_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}$, $Z_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}$, $H_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2}$ durch die Quadrate von drei Functionen x in linearer Weise ausdrückt.

So ergiebt sich z. B. aus (54k):

$$
(63)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot E^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}=\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1\,v_1)\\
&+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_1)\,x^{2\,00}_{\;\;10}-\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_1)\,x^{2\,10}_{\;\;00}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_1)\,x^{2\,10}_{\;\;10};\\
&\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot Z^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}=\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1\,v_2)\\
&+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2)\,x^{2\,00}_{\;\;10}-\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2)\,x^{2\,10}_{\;\;00}\\
&-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2)\,x^{2\,10}_{\;\;10};\\
&\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\cdot H^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}=\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2\,v_2)\\
&+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_2)\,x^{2\,00}_{\;\;10}-\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_2)\,x^{2\,10}_{\;\;00}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{matrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{matrix}^2(v_2)\,x^{2\,10}_{\;\;10}.
\end{aligned}\right.
$$

Man sieht unmittelbar, dass mittelst dieses Systemes und mittelst der übrigen neunzehn Systeme die fünfzehn Functionen $x^{2\,\eta_1\eta_2}_{\;\;\varepsilon_1\varepsilon_2}$

linear durch die drei Functionen E, Z, H ausgedrückt werden können. Man sieht ferner, dass die obigen Gleichungen bei Vermehrung der Indices λ_1, μ_1 um $\frac{l_1}{2}$, $\frac{m_1}{2}$ dieselben Functionen $x^{2\,00}_{\;10}$, $x^{2\,10}_{\;00}$, $x^{2\,10}_{\;10}$ enthalten, da, wenn z. B. λ_1 um $\frac{l_1}{2}$ vermehrt wird und die übrigen Indices erhalten bleiben, $x^{2\,00}_{\;10}$ in $e^{-2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} : x^{2\,00}_{\;10}$, $x^{2\,10}_{\;00}$ in $x^{2\,10}_{\;10} : x^{2\,00}_{\;10}$, $x^{2\,10}_{\;10}$ in $e^{-2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} \cdot x^{2\,10}_{\;00} : x^{2\,00}_{\;10}$ übergeht. Fügt man eine so resultirende vierte Gleichung den drei obigen hinzu, so folgt nach Elimination von $x^{2\,10}_{\;00}$, $x^{2\,00}_{\;10}$, $x^{2\,10}_{\;10}$ eine lineare Beziehung zwischen der neu auftretenden Function E oder Z oder H und den drei im obigen Systeme befindlichen Functionen E, Z, H. Da Aehnliches für jedes andere der neunzehn übrigen Systeme von drei Gleichungen gilt, so ergiebt sich, dass jede der Functionen

$$E^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\,\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}, \quad Z^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\,\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}, \quad H^{\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2}\,\mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2}\,\lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}}$$

durch die drei Functionen

$$E^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}, \quad Z^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}, \quad H^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}$$

linear dargestellt werden kann. Man erhält beispielsweise, wenn

$$a_{ik} = \vartheta^{\frac{m_1}{2}\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\frac{l_2}{2}}\,\vartheta''^{\frac{m_1}{2}\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\frac{l_2}{2}}(v_i\,v_k):$$

$$
(63\text{a})\qquad 0=\begin{vmatrix}
\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}E^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}-\alpha_{11} &
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1)\\[2ex]
\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}Z^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}-\alpha_{12} &
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_2) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_2) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_1)\,\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_2)\\[2ex]
\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}H^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}-\alpha_{22} &
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_2) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_2) &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{0}\end{bmatrix}^2(v_2)\\[2ex]
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1) &
\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2}&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}E^{\mu_1\quad\mu_2}_{\lambda_1+\frac{l_1}{2}\lambda_2}-\alpha_{11} &
\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\0&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1) &
e^{-2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot\vartheta'\begin{bmatrix}0&\frac{m_2}{2}\\\frac{l_1}{2}&\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}^2(v_1)
\end{vmatrix}
$$

Man sieht schliesslich, dass aus (63) für $\lambda_i = \varepsilon_i \frac{l_i}{2}$; $\mu_i = \eta_i \frac{m_i}{2}$ die Gleichungen sich ergeben:

$$
(63\text{b})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta''\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i v_k)\\
&= \vartheta^2\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta''\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i v_k)\\
&+(-1)^{\eta_1}\vartheta^2\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k)\\
&-\vartheta^2\begin{bmatrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k)\\
&-(-1)^{\eta_1}\vartheta^2\begin{bmatrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k);\\
&\qquad(\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2\equiv 0 \ (\text{mod. } 2)).\\
&\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k)\\
&=-(-1)^{\eta_1}\vartheta^2\begin{bmatrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{0}\end{bmatrix}(v_k)\\
&+\vartheta^2\begin{bmatrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k)\\
&+(-1)^{\eta_1}\vartheta^2\begin{bmatrix}(1+\eta_1)\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ (1+\varepsilon_1)\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{bmatrix}
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_i)\,
\vartheta'\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}(v_k);\\
&\qquad(\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2\equiv 1 \ (\text{mod. } 2)).
\end{aligned}\right.
$$

Daraus ist leicht ersichtlich, dass durch je vier der sechzehn zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2}{\partial v_i\,\partial v_k}\,\vartheta^2\begin{matrix}\eta_1\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\binom{v_1}{v_2}\quad (\text{für } v_1=v_2=0)\ ,$$

von welchen nur einer aus einer geraden (oder nur einer aus einer ungeraden) Thetareihe gebildet ist, die zwölf übrigen linear dargestellt werden können. Auch bestehen Proportionen in Folge der Gleichungen von der Form (63 b), z. B., wenn $\varepsilon_1=\eta_1=0$, die folgende:

$$(63\,\text{c})\quad\left\{\begin{aligned}
&1:1:-\frac{\vartheta^2\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}}{\vartheta^2\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}:-\frac{\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}}{\vartheta^2\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\,\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}\\
&=\left(\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\right):\left(\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\right)\\
&:\left(\vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\right):\left(\vartheta\begin{matrix}0 & \eta_2\frac{m_2}{2}\\ 0 & \varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\right)\\
&\qquad(\varepsilon_2\cdot\eta_2\equiv 0\ (\text{mod. } 2))\ ,
\end{aligned}\right.$$

wo die dreigliedrigen Klammerausdrücke so zu interpretiren sind, dass z. B.

$$\left(\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix};\ \vartheta\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}\right)$$

$$=\left|\begin{array}{llll}
\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1 v_1) & \cdot\ \vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1 v_2) & & \vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2 v_2)\\
\vartheta'^{\,2}\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{m_2}{2}\end{matrix}(v_1) & \vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1) & \vartheta'\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2) & \vartheta'^{\,2}\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2)\\
\vartheta'^{\,2}\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1) & \vartheta'\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1) & \vartheta'\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2) & \vartheta'^{\,2}\begin{matrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2)
\end{array}\right|\cdot\frac{1}{\vartheta^2\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}\ .$$

Um nun die fünfzehn Functionen $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ in ihrer Abhängigkeit von den Functionen $E^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}$, $Z^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}$, $H^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}$ thatsächlich und in übersichtlicher Form zu erhalten, benutze man ausser der soeben erläuterten symbolischen Darstellungsweise noch eine von ähnlicher Art, der zufolge beispielsweise:

$$\left(EZH;\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right)$$

$$=\left|\begin{matrix} E^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2} & Z^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2} & H^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2} \\ \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}\,2}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_1) & \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_1)\,\vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_2) & \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}\,2}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}(v_2) \\ \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}\,2}_{0\,\frac{l_2}{2}}(v_1) & \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}(v_1)\,\vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}(v_2) & \vartheta'{}^{0\,\frac{m_2}{2}\,2}_{0\,\frac{l_2}{2}}(v_2) \end{matrix}\right|.$$

Kennzeichnet man überdies die Eigenschaft des Symboles

$$\left(\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right)$$

keine Aenderung zu erleiden, wenn

$$\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}} \text{ durch } \vartheta^{0\,0}_{0\,0} \text{ oder } \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0} \text{ oder } \vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}}$$

ersetzt wird, durch die zusammenfassende Bezeichnung:

$$\cdot\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_1}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right)$$

und setzt man:

$$A = \vartheta^{0\,0}_{0\,0}\,\vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,0}\,\vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0}\,\vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0}\,\vartheta^{0\,\frac{m_1}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}$$

$$\cdot\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{0}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}},$$

so erhält man:

$$(64)\quad\left\{\begin{aligned}
&e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,0\,0}_{\;\,1\,0}\cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right)\\
&-\left(\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right);\\
&x^{2\,1\,0}_{\;\,0\,0}\cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_1}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right);\\
&e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{2\,1\,0}_{\;\,1\,0}\cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\right);\\
&x^{2\,0\,1}_{\;\,0\,0}\cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$
(64)\quad \left\{
\begin{aligned}
& x^{2\,1\,1}_{\;\;0\,0} \cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right) \\
& - \left(\vartheta^{0\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ 0},\ \vartheta^{0\ 0}_{0\ \frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ 0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{0\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right); \\
& e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} \cdot x^{2\,0\,1}_{\;\;1\,0} \cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{0\ \frac{l_2}{2}}\right) \\
& - \left(\vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ 0}_{0\ \frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{0\ \frac{l_2}{2}}\right); \\
& e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} \cdot x^{2\,1\,1}_{\;\;1\,0} \cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{0\ \frac{l_2}{2}}\right) \\
& - \left(\vartheta^{0\ 0}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{0\ \frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{0\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{0\ \frac{l_2}{2}}\right); \\
& e^{2\pi i \frac{\mu_2}{m_2}} \cdot x^{2\,0\,0}_{\;\;0\,1} \cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ 0}\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right) \\
& - \left(\vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ 0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ 0};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right); \\
& e^{2\pi i \frac{\mu_2}{m_2}} \cdot x^{2\,1\,0}_{\;\;0\,1} \cdot A = \left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ 0}\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right) \\
& - \left(\vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ 0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{0\ 0},\ \vartheta^{0\ 0}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ 0};\ \vartheta^{0\ \frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\ \frac{l_2}{2}}\right);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(64)\quad\left\{\begin{aligned}
&e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{2\,\substack{0\,0\\1\,1}}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{1}{2}\,0}\right)\\
&-\left(\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right);\\
&e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{2\,\substack{1\,0\\1\,1}}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right);\\
&e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{2\,\substack{0\,1\\0\,1}}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right);\\
&e^{2\pi i\frac{\mu_2}{m_2}}\cdot x^{2\,\substack{1\,1\\0\,1}}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\,\vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\right);\\
&e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{2\,\substack{0\,1\\1\,1}}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right)\\
&-\left(\vartheta^{0\,0}_{0\,0},\ \vartheta^{0\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,0},\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right);
\end{aligned}\right.
$$

$$(64)\quad\left\{\begin{aligned} & e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot x^{2\,11}_{\;\;11}\cdot A=\left(EZH;\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right)\\ & -\left(\vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{0\;\,0},\ \vartheta^{0\;\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0},\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\;\,0},\ \vartheta^{0\;\,0}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{0\,\frac{m_2}{2}}_{0\,\frac{l_2}{2}};\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\,0}_{\frac{l_1}{2}\,0}\right).\end{aligned}\right.$$

Tritt zu diesen Formeln noch eine Gleichung für die Functionen E, Z, H, so ist die Abhängigkeit zwischen ihnen und den $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ vollständig dargelegt und die obigen Relationen können als Parameterdarstellungen gelten, die alle $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ *gleichförmig* umfassen. Eine solche Gleichung kann aber nicht aus den linearen Relationen zwischen den Quadraten der x, die nur einer Gruppe angehören, erhalten werden; denn aus ihnen ergeben sich nach Substitution der E, Z, H blosse Identitäten. Es müssen darum die Gleichungen benutzt werden, welche die x verschiedener Gruppen mit einander verbinden und die aus (35) gewonnen werden, wenn das System der Indices $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \eta_1', \eta_2'$ nicht übereinstimmend mit dem Systeme der Indices $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \eta_1'', \eta_2''$ specialisirt wird. Beispiele solcher Relationen stellen (36), (37), (38) und (43) dar, wenn $v_i = 0$ gesetzt wird.

Da die so resultirende Gleichung zwischen den E, Z, H für jede dieser Grössen den zweiten Grad übersteigt, soll im Folgenden von einer expliciten Darstellung einer der drei Grössen durch die beiden anderen abgesehen werden. Ich weise daher nur nach, dass sie bloss für Z bis zum vierten Grade, für E und H dagegen nur bis zum dritten Grade ansteigt.

Wählt man z. B. die erste der Gleichungen (43), so folgt aus ihr:

$$(65)\quad\left\{\begin{aligned} & \Bigg(x^{2\,11}_{\;\;11}\,\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,\frac{l_1}{2}}\,\vartheta^{2\,0\,0}_{\;\;0\,0}\\ & +x^{2\,11}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;11}\,\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;0\;\;0}\,\vartheta^{2\,0\;\,0}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}-x^{2\,10}_{\;\;01}\,x^{2\,01}_{\;\;10}\,\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,0}_{\;\;0\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{2\,0\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,0}\Bigg)^2\\ & =4\,x^{2\,11}_{\;\;11}\,x^{2\,11}_{\;\;00}\,x^{2\,00}_{\;\;11}\,\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,\vartheta^{2\,0\,0}_{\;\;0\,0}\,\vartheta^{2\,\frac{m_1}{2}\,\frac{m_2}{2}}_{\;\;0\;\;0}\,\vartheta^{2\,0\;\,0}_{\;\;\frac{l_1}{2}\,\frac{l_2}{2}}\,.\end{aligned}\right.$$

Die Substitution der in (64) gegebenen Darstellungen der x durch E, Z, H zeigt unmittelbar, dass die rechte Seite dieser Gleichung dritte Potenzen von E, Z und H aufweist und dass die Quadratwurzel der linken Seite vom ersten Grade bezüglich E und H und vom zweiten Grade bezüglich Z ist, wenn dasselbe von

$$D = x^{2\,11}_{\;\;00}\, x^{2\,00}_{\;\;11}\, \vartheta^2\begin{bmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix} - x^{2\,10}_{\;\;01}\, x^{2\,01}_{\;\;10}\, \vartheta^2\begin{bmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix} \vartheta^2\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

gilt. Es ist aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, in D der Coefficient von E^2 und H^2 gleich Null, der Coefficient von Z^2 gleich:

$$e^{-2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1} + \frac{\mu_2}{m_2}\right)} \cdot \left(\frac{l_1\, l_2}{4}\right)^2.$$

Den Zusammenhang der Functionen E, Z und H mit den Doppelintegralen vermitteln nun folgende Formeln, die aus den Relationen (63) und (53a) gewonnen werden:

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(EZ)}{d(u_1 u_2)} &= A_1 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{11} \cdot x^{11}_{10} \cdot x^{11}_{11} \\ &+ B_1 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{00}_{11} \cdot x^{01}_{10} \cdot x^{01}_{11} + C_1 \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{10}_{01} \cdot x^{11}_{00} \cdot x^{11}_{01}; \\ \frac{d(EH)}{d(u_1 u_2)} &= A_2 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{11} \cdot x^{11}_{10} \cdot x^{11}_{11} \\ &+ B_2 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{00}_{11} \cdot x^{01}_{10} \cdot x^{01}_{11} + C_2 \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{10}_{01} \cdot x^{11}_{00} \cdot x^{11}_{01}: \\ \frac{d(ZH)}{d(u_1 u_2)} &= A_3 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{11} \cdot x^{11}_{10} \cdot x^{11}_{11} \\ &+ B_3 \cdot x^{10}_{00} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{00}_{11} \cdot x^{01}_{10} \cdot x^{01}_{11} + C_3 \cdot x^{00}_{10} \cdot x^{10}_{10} \cdot x^{10}_{01} \cdot x^{11}_{00} \cdot x^{11}_{01}: \end{aligned} \right.$$

wo

$$A_1 = a \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1) \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1); \quad B_1 = b \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1) \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1);$$

$$C_1 = c \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} \frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1) \cdot \vartheta'\begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}(v_1);$$

$$A_2 = a\cdot\left(\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)+\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\right);$$

$$B_2 = b\left(\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)+\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\right):$$

$$C_2 = c\left(\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)+\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_1)\right);$$

$$A_3 = a\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2);\quad B_3 = b\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2);$$

$$C_3 = c\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2)\cdot\vartheta'\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}(v_2);$$

$$a = -\frac{l_1^2 l_2^2}{4}\cdot e^{2\pi i\left(\frac{2\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\frac{\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}{\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}};$$

$$b = \frac{l_1^2 l_2^2}{4}\cdot e^{2\pi i\left(\frac{2\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\frac{\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}{\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}};$$

$$c = -\frac{l_1^2 l_2^2}{4}\cdot e^{2\pi i\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}\right)}\cdot\frac{\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix}\,\vartheta\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}{\vartheta\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}}.$$

Es ist klar, dass bei Zugrundelegen eines der aus (54) sich ergebenden neunzehn anderen Systeme an Stelle von (63) die obigen Relationen in anderer und anderer Form sich ergeben würden; die so resultirenden zwanzig Formen können zusammenfassend dargestellt werden, wenn für jede der sechs Gruppen (55) das Product ihrer fünf Functionen gebildet und die sechs Producte durch $X_1, X_2 \dots X_6$ bezeichnet werden. Es ist alsdann:

$$
(67)\quad \begin{cases}
\dfrac{d(EZ)}{d(u_1\, u_2)} = a_{1\alpha} X_\alpha + b_{1\beta} X_\beta + c_{1\gamma} X_\gamma\,; \\[2ex]
\dfrac{d(EH)}{d(u_1\, u_2)} = a_{2\alpha} X_\alpha + b_{2\beta} X_\beta + c_{2\gamma} X_\gamma\,; \\[2ex]
\dfrac{d(ZH)}{d(u_1\, u_2)} = a_{3\alpha} X_\alpha + b_{3\beta} X_\beta + c_{3\gamma} X_\gamma\,;
\end{cases}
$$

wo α, β, γ jede der zwanzig Combinationen von drei Zahlen aus der Reihe von 1 bis 6 vorstellen soll. Es folgt hieraus zugleich, dass von den sechs Producten $X_1, X_2 \dots X_6$ jedes durch drei der übrigen linear und homogen darstellbar ist. Somit werden lineare Relationen zwischen vier Producten von je fünf Thetareihen gewonnen.

Um nun die Transformationsformeln (66) in expliciter Form zu erhalten, müssen die drei Producte $x^{10}_{00}\, x^{00}_{10}\, x^{10}_{11}\, x^{11}_{10}\, x^{11}_{11}$, $x^{10}_{00}\, x^{10}_{10}\, x^{00}_{11}\, x^{01}_{10}\, x^{01}_{11}$, $x^{00}_{10}\, x^{10}_{10}\, x^{10}_{01}\, x^{11}_{00}\, x^{11}_{01}$ durch E, Z und H ausgedrückt werden. Es kann dies direct mittelst der Gleichungen (64) geschehen; man kann auch die in (58) gegebene Form der Producte zu Grunde legen, in welchen dann

$$
(68)\quad \begin{cases}
e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} A \cdot x^{2\,00}_{\;\;10} = \left(E'Z'H';\ \vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\frac{l_2}{2}}\right) = A[EZH]'\,, \\[3ex]
A \cdot x^{2\,10}_{\;\;00} = \left(E'Z'H';\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\frac{l_2}{2}}\right) = A[EZH]''\,, \\[3ex]
e^{2\pi i \frac{\mu_1}{m_1}} A \cdot x^{2\,10}_{\;\;10} = \left(E'Z'H';\ \vartheta^{0\;\frac{m_2}{2}}_{\frac{l_1}{2}\;\frac{l_2}{2}}\ \vartheta^{\frac{m_1}{2}\;\frac{m_2}{2}}_{0\;\frac{l_2}{2}}\right) = A[EZH]'''
\end{cases}
$$

zu setzen ist, wo

$$E' = E - \frac{\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1\, v_1)}{\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}\,; \quad Z' = Z - \frac{\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_1\, v_2)}{\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}\,;$$

$$H' = H - \frac{\vartheta''\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}(v_2\, v_2)}{\vartheta\begin{matrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{matrix}}\,.$$

Die Producte stellen sich so als Functionen von E, Z und H dar, die für jede dieser Grössen bis zum fünften Grade ansteigen. Es muss dann noch mittelst (65) der Reihe nach jede der drei Grössen E, Z, H durch die beiden anderen ausgedrückt werden.

Das schliesslich sich ergebende Resultat kann durch folgende Formeln angedeutet werden:

$$(69\text{a})\left\{\begin{aligned}\frac{d(EZ)}{d(u_1 u_2)} &= A_1\sqrt{R_1} + B_1\sqrt{R_2} + C_1\sqrt{R_3}\\ &= \varphi_1(EZ)\,;\\ \frac{d(EH)}{d(u_1 u_2)} &= A_2\sqrt{R_1} + B_2\sqrt{R_2} + C_2\sqrt{R_3}\\ &= \varphi_2(EH)\,;\\ \frac{d(ZH)}{d(u_1 u_2)} &= A_3\sqrt{R_1} + B_3\sqrt{R_2} + C_3\sqrt{R_3}\\ &= \varphi_3(ZH)\,.\end{aligned}\right.$$

$$(69\text{b})\left\{\begin{aligned}\iint\frac{dE\,dZ}{A_1\sqrt{R_1}+B_1\sqrt{R_2}+C_1\sqrt{R_3}} &= \iint\frac{dE\,dZ}{\varphi_1(EZ)} = \iint du_1\,du_2\,;\\ \iint\frac{dE\,dH}{A_2\sqrt{R_1}+B_2\sqrt{R_2}+C_2\sqrt{R_3}} &= \iint\frac{dE\,dH}{\varphi_2(EH)} = \iint du_1\,du_2\,;\\ \iint\frac{dH\,dH}{A_3\sqrt{R_1}+B_3\sqrt{R_2}+C_3\sqrt{R_3}} &= \iint\frac{dZ\,dH}{\varphi_3(ZH)} = \iint du_1\,du_2\,.\end{aligned}\right.$$

$$
(69\,c)\left\{
\begin{aligned}
&e^{2\pi i\left(\frac{4\mu_1}{m_1}+\frac{2\mu_2}{m_2}\right)}\,\vartheta^6\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot R_1\\
&=[EZH]'\cdot[EZH]''\left\{\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]'\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}-[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{[EZH]'\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}+[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}-\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]'\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}-[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\};\\
&e^{2\pi i\left(\frac{4\mu_1}{m_1}+\frac{2\mu_2}{m_2}\right)}\,\vartheta^6\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot R_2\\
&=[EZH]''\cdot[EZH]'''\left\{\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]'''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}+[EZH]'''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}-\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-[EZH]'''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}\right\};\\
&e^{2\pi i\left(\frac{2\mu_1}{m_1}+\frac{2\mu_2}{m_2}\right)}\,\vartheta^6\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{bmatrix}\cdot R_3\\
&=[EZH]'\cdot[EZH]'''\left\{\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{bmatrix}-[EZH]'\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+[EZH]'''\,\vartheta^2\begin{bmatrix}\frac{m_1}{2} & \frac{m_2}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\cdot\left\{\vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix} - [EZH]'\vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix} + [EZH]''\vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}\right\}$$

$$\cdot\left\{\vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \frac{l_1}{2} & 0\end{smallmatrix} - [EZH]'\vartheta^2\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix} + [EZH]'''\vartheta^2\begin{smallmatrix}\frac{m_1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right\}.$$

Aus diesen Integralen lassen sich alle anderen Integrale ableiten, die mittelst der 16-gliedrigen Untergruppe der allgemeinen Gruppe von Thetareihen in die Form $\int\int du_1\, du_2$ transformirt werden können. Denn aus (64) erhellt, dass die mit Hilfe der Functionen $x^{2\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ resp. $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ transformirbaren Doppelintegrale Specialisirungen des durch die Functionen F^2 und F_1^2 resp. F und F_1 transformirbaren Doppelintegrales sind, wenn

$$(70)\qquad \begin{cases} F^2 = a\,E + b\,Z + c\,H + d\;; \\ F_1^2 = a_1 E_1 + b_1 Z + c_1 H + d_1\,. \end{cases}$$

Für diese Functionen erhält man

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(F^2F_1^2)}{d(u_1 u_2)} = A_\alpha X_\alpha + B_\beta X_\beta + \Gamma_\gamma X_\gamma\;; \\[2ex] \dfrac{d(FF_1)}{d(u_1 u_2)} = \dfrac{1}{4\,FF_1}(A_\alpha X_\alpha + B_\beta X_\beta + \Gamma_\gamma X_\gamma)\;; \end{cases}$$

wo X_α, X_β, X_γ dieselbe Bedeutung haben wie in (67).

Zugleich ist ersichtlich, dass die in (60) angegebenen speciellen Resultate aus diesem allgemeinen Resultate wieder gewonnen werden, wenn zwei der Constanten A, B, Γ gleich Null werden. Diese Bedingung führt zurück zur Wahl zweier, einer und derselben Gruppe angehörigen Functionen $x^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

§ 7.

Der Zusammenhang der Functionen

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\log\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\binom{u_1}{u_2}\quad (i = 1, 2)\ \text{und}\ \log\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}\binom{u_1}{u_2}$$

mit den Doppelintegralen ist nun noch zu beleuchten.

Die mittelst dieser Functionen gebildeten Substitutionsdeterminanten können nicht algebraisch durch die Functionen selbst ausgedrückt werden, da diese letzteren eine andere Periodicität aufweisen als ihre Differentialquotienten. Es ist somit der Zusammenhang mit den Doppelintegralen für diese Functionen von anderer Art als für die Thetaquotienten und die Functionen E, Z, H.

Es kann sich deshalb bloss darum handeln, Integrale herzustellen, die mit jenen Functionen in einfachem Zusammenhange stehen und für passend gewählte Integrationsbereiche durch jene Functionen dargestellt werden können. Diese Darstellungen werden naturgemäss die Analoga zu den Darstellungen der entsprechenden Functionen einer Variabeln durch einfache Integrale zu bilden haben.

Für die Functionen:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2}$$

findet man als Integralformen:

$$(72\text{a})\quad \begin{cases} \displaystyle\iint d\,\frac{\partial}{\partial u_1} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \cdot d\,\frac{\partial}{\partial u_2} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \\ \displaystyle\qquad = \iint (EH - Z^2)\, du_1\, du_2\ , \end{cases}$$

$$(72\text{b})\quad \iint d\,\frac{\partial}{\partial u_1} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \cdot du_2 = \iint E \cdot du_1\, du_2\ ,$$

$$(72\text{c})\quad \iint d\,\frac{\partial}{\partial u_2} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \cdot du_1 = \iint H \cdot du_1\, du_2;$$

$$(72\text{d})\quad \begin{cases} \displaystyle\iint d\,\frac{\partial}{\partial u_2} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \cdot du_2 \\ \displaystyle = \iint d\,\frac{\partial}{\partial u_1} \log \vartheta^{\mu_1 \mu_2}_{\lambda_1 \lambda_2}\binom{u_1}{u_2} \cdot du_1 = \iint Z \cdot du_1\, du_2\ . \end{cases}$$

Es ist nun in diesen Integralen der Formel (69) gemäss $du_1\, du_2$ durch $\frac{dE\,dZ}{\varphi_1(EZ)}$, $\frac{dE\,dH}{\varphi_2(EH)}$ oder $\frac{dZ\,dH}{\varphi_3(ZH)}$ zu ersetzen, wodurch die definitiven Integralformen entstehen, für welche alsdann das Integrationsgebiet in den neuen Variablen entsprechend zu bestimmen ist.

Um die Form der Doppelintegrale zu gewinnen, deren Zusammenhang mit dem Logarithmus der Thetareihen zweier Variablen analog ist dem Zusammenhange der elliptischen Integrale III. Gattung mit dem Logarithmus der Thetareihen einer Variablen, gehe ich zu der Relation (26) (S. 381) zurück.

Ich setze dort in den Symbolen $\{\Pi\}$ und Π, deren Bedeutung aus (25) ersichtlich ist, $\lambda_i = \lambda_i'$; $\lambda_i'' = \lambda_i'''$; $\mu_i = \mu_i'$; $\mu_i'' = \mu_i'''$; $u_i = u_i'$; $u_i'' = u_i''' = v_i$; $(i = 1, 2)$, so dass:

$$
(73\text{a}) \left\{
\begin{aligned}
\{\Pi\}^{\gamma_1\gamma_2}_{\delta_1\delta_2} &= e^{2\pi i\left(\delta_1\frac{\mu_1}{m_1}+\delta_2\frac{\mu_2}{m_2}\right)} \\
&\cdot \vartheta\begin{matrix}\mu_1+\mu_1'+\gamma_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\mu_2'+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\lambda_1'+\delta_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\lambda_2'+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \\
&\cdot \vartheta\begin{matrix}\mu_1-\mu_1'+\gamma_1\frac{m_1}{2} & \mu_2-\mu_2'+\gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1-\lambda_1'+\delta_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2-\lambda_2'+\delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix} \\
&\cdot \vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2} & \gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2} & \delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix} \cdot \vartheta\begin{matrix}\gamma_1\frac{m_1}{2} & \gamma_2\frac{m_2}{2}\\ \delta_1\frac{l_1}{2} & \delta_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}; \\
\Pi^{\eta_1\eta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} &= e^{2\pi i\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1+\mu_1'}{m_1}+\varepsilon_2\frac{\mu_2+\mu_2'}{m_2}\right)} \\
&\cdot \vartheta^2\begin{matrix}\mu_1+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \cdot \vartheta^2\begin{matrix}\mu_1'+\eta_1\frac{m_1}{2} & \mu_2'+\eta_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1'+\varepsilon_1\frac{l_1}{2} & \lambda_2'+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ich setze ferner, um einen speciellen Fall auszugreifen, $\delta_1 = \delta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$; $\delta_1' = 0, \delta_2' = 1, \gamma_1' = \gamma_2' = 0$; $\delta_1'' = \delta_2'' = \gamma_1'' = 0, \gamma_2'' = 1$; so dass folgende Relation resultirt:

$$
(73) \qquad \{\Pi\}^{11}_{11} = \Pi^{00}_{00} - \Pi^{00}_{10} - \Pi^{10}_{00} + \Pi^{10}_{10}.
$$

Daraus leite ich drei Relationen ab, indem ich unter Festhalten der übrigen Indices erst λ_1 durch $\lambda_1 + \frac{l_1}{2}$, sodann μ_1 durch $\mu_1 + \frac{m_1}{2}$ und schliesslich λ_1 durch $\lambda_1 + \frac{l_1}{2}$ und μ_1' durch $\mu_1 + \frac{m_1}{2}$

gleichzeitig ersetze. In denselben werde der Einfachheit wegen gesetzt:

$$\alpha = e^{2\pi i\frac{\mu_1'}{m_1}} \cdot \frac{\vartheta^{2\,\mu_1' \qquad \mu_2'}_{\quad\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\ \ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{2\,\mu_1'\ \mu_2'}_{\quad\lambda_1'\ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}\,; \quad \beta = \frac{\vartheta^{2\,\mu_1'+\frac{m_1}{2}\ \ \mu_2'}_{\quad\lambda_1' \qquad\ \ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{2\,\mu_1'\ \mu_2'}_{\quad\lambda_1'\ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}\,;$$

$$\gamma = e^{2\pi i\frac{\mu_1'}{m_1}} \cdot \frac{\vartheta^{2\,\mu_1'+\frac{m_1}{2}\ \ \mu_2'}_{\quad\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\ \ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{2\,\mu_1'\ \mu_2'}_{\quad\lambda_1'\ \lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}\,.$$

$$U = e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,00}_{\ \ 10} + x^{2\,10}_{\ \ 00}\,\gamma - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,10}_{\ \ 10}\,\beta - \alpha\,;$$

$$V = x^{2\,10}_{\ \ 00} + e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,10}_{\ \ 10}\,\alpha - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,00}_{\ \ 10}\,\gamma - \beta\,;$$

$$W = e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,10}_{\ \ 10} - e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\, x^{2\,00}_{\ \ 10}\,\beta + x^{2\,10}_{\ \ 00}\,\alpha - \gamma\,.$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man dann folgende Relationen:

$$(74\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v_i}\log\cdot\vartheta^{\mu_1+\mu_1'+\frac{m_1}{2}\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1' \qquad\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \\ &\qquad\cdot\vartheta^{\mu_1-\mu_1'+\frac{m_1}{2}\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1' \qquad\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} + \frac{\frac{\partial U}{\partial v_i}}{U}\,; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v_i}\log\cdot\vartheta^{\mu_1+\mu_1' \qquad\qquad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \end{aligned}\right.$$

$$(74\text{b})\left\{\begin{aligned}&\cdot\,\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\qquad\mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad\lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\binom{u_1-v_1}{u_2-v_2}\\ &=\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}+\frac{\frac{\partial V}{\partial v_i}}{V}\,;\end{aligned}\right.$$

$$(74\text{c})\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v_i}\log\cdot\vartheta^{\mu_1+\mu_1';\;\mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1';\;\lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\binom{u_1+v_1}{u_2+v_2}\\ &\cdot\,\vartheta^{\mu_1-\mu_1';\;\mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1';\;\lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\binom{u_1-v_1}{u_2-v_2}\\ &=\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}+\frac{\frac{\partial W}{\partial v_i}}{W}\,.\end{aligned}\right.$$

Aus denselben ergeben sich zunächst folgende Integralformen, wo $i = 1$ und $k = 2$ oder $i = 2$ und $k = 1$ zu setzen ist:

$$(75\text{a})\left\{\begin{aligned}&\iint d\log\frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'+\frac{m_1}{2};\;\mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'\qquad;\;\lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\binom{u_1+v_1}{u_2+v_2}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'+\frac{m_1}{2};\;\mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'\qquad;\;\lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\binom{u_1-v_1}{u_2-v_2}}\cdot du_k\\ &=\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\binom{v_1}{v_2}\iint du_i\,du_k\\ &+\iint\frac{-\frac{\partial\alpha}{\partial v_i}+x^{210}_{00}\frac{\partial\gamma}{\partial v_i}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{210}_{10}\frac{\partial\beta}{\partial v_i}}{e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{200}_{10}+x^{210}_{00}\gamma-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{210}_{10}\beta-\alpha}\,du_i\,du_k\,;\end{aligned}\right.$$

$$
(75\mathrm{b})\left\{
\begin{aligned}
&\iint d\log \frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix} u_1-v_1 \\ u_2-v_2 \end{pmatrix}}\cdot du_k \\
&= \frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\iint du_i\,du_k \\
&+\iint \frac{-\frac{\partial\beta}{\partial v_i}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{210}_{10}\frac{\partial\alpha}{\partial v_i}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{200}_{10}\frac{\partial\gamma}{\partial v_i}}{x^{210}_{00}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{210}_{10}\cdot\alpha-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{200}_{10}\cdot\gamma-\beta}\cdot du_i\,du_k;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(75\mathrm{c})\left\{
\begin{aligned}
&\iint d\log \frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix} u_1-v_1 \\ u_2-v_2 \end{pmatrix}}\cdot du_k \\
&= \frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,\vartheta^{\mu_1'\,\mu_2'}_{\lambda_1'\,\lambda_2'}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\iint du_i\,du_k \\
&+\iint \frac{-\frac{\partial\gamma}{\partial v_i}+x^{210}_{00}\frac{\partial\alpha}{\partial v_i}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{200}_{10}\frac{\partial\beta}{\partial v_i}}{e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{210}_{10}+x^{210}_{00}\,\alpha-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}\cdot x^{200}_{10}\,\beta-\gamma}\cdot du_i\,du_k.
\end{aligned}
\right.
$$

Mit Hilfe dieser Integralformen folgt ferner, wenn

$$X=\frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'+\frac{m_1}{2}\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'+\frac{m_1}{2}\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}};$$

$$Y=\frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'+\frac{l_1}{2}\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}};$$

$$Z=\frac{\vartheta^{\mu_1+\mu_1'\quad \mu_2+\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1+\lambda_1'\quad \lambda_2+\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{pmatrix}}{\vartheta^{\mu_1-\mu_1'\quad \mu_2-\mu_2'+\frac{m_2}{2}}_{\lambda_1-\lambda_1'\quad \lambda_2-\lambda_2'+\frac{l_2}{2}}\begin{pmatrix}u_1-v_1\\ u_2-v_2\end{pmatrix}}:$$

(76 a)
$$\left\{\begin{aligned}\iint\frac{\frac{d(UV)}{d(v_1v_2)}}{U\cdot V}\,du_1\,du_2 &=\iint d\log X\cdot d\log Y\\ &+\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{X}{Y}\,du_1\\ &-\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_2}\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{X}{Y}\,du_2;\end{aligned}\right.$$

$$\iint\frac{\frac{d(UW)}{d(v_1v_2)}}{U\cdot W}\,du_1\,du_2=\iint d\log X\cdot d\log Z$$

$$(76\,\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}&+\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\,\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{X}{Z}\,du_1\\&-\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_2}\,\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{X}{Z}\,du_2\,;\end{aligned}\right.$$

$$(76\,\mathrm{c})\left\{\begin{aligned}&\iint\frac{\frac{d(VW)}{d(v_1v_2)}}{V\cdot W}\,du_1\,du_2=\iint d\log Y\cdot d\log Z\\&+\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\,\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{Y}{Z}\,du_1\\&-\frac{2}{\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}}\cdot\frac{\partial}{\partial v_2}\,\vartheta^{\mu_1'\mu_2'}_{\lambda_1'\lambda_2'}\iint d\log\frac{Y}{Z}\,du_2\,;\end{aligned}\right.$$

wo

$$\frac{d(UV)}{d(v_1v_1)}=\frac{d(\alpha\beta)}{d(v_1v_2)}\left(1+e^{2\pi i\frac{2\mu_1}{m_1}}x^{4}{}^{10}_{10}\right)$$

$$+\frac{d(\alpha\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{00}_{10}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{10}_{00}\,x^{2}{}^{10}_{10}\right)$$

$$+\frac{d(\beta\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(x^{2}{}^{10}_{00}+e^{2\pi i\frac{2\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{00}_{10}\,x^{2}{}^{10}_{10}\right);$$

$$\frac{d(UW)}{d(v_1v_2)}=\frac{d(\alpha\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(1-x^{4}{}^{10}_{00}\right)+\frac{d(\alpha\beta)}{d(v_1v_2)}\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{00}_{10}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{10}_{00}x^{2}{}^{10}_{10}\right)$$

$$+\frac{d(\beta\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{10}_{10}+e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{00}_{10}\,x^{10}_{00}\right);$$

$$\frac{d(VW)}{d(v_1v_2)}=\frac{d(\beta\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(1-e^{2\pi i\frac{2\mu_1}{m_1}}x^{4}{}^{00}_{10}\right)+\frac{d(\alpha\beta)}{d(v_1v_2)}\left(x^{2}{}^{10}_{00}-e^{2\pi i\frac{2\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{00}_{10}x^{2}{}^{10}_{10}\right)$$

$$-\frac{d(\alpha\gamma)}{d(v_1v_2)}\left(e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{10}_{10}-e^{2\pi i\frac{\mu_1}{m_1}}x^{2}{}^{10}_{00}\,x^{2}{}^{00}_{10}\right).$$

Die auf diesem Wege resultirenden Integralformen erhalten ihre definitive Gestalt, wenn noch die drei Functionen $x^{2\,00}_{\;\;10}$, $x^{2\,10}_{\;\;00}$ und $x^{2\,10}_{\;\;10}$ aus (64) durch die linearen Ausdrücke in den E, Z und H ersetzt werden und alsdann mittelst der Gleichung (65) jede dieser Functionen der Reihe nach durch die beiden anderen ausgedrückt wird; in entsprechender Weise ist schliesslich

$$du_1 \cdot du_2 \text{ durch } \frac{dE\,dZ}{\varphi_1(EZ)},\ \frac{dE\,dH}{\varphi_2(EH)},\ \frac{dZ\,dH}{\varphi_3(ZH)}$$

zu ersetzen und das Integrationsgebiet für die neuen Variablen passend zu bestimmen.

Wie die einfachen elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sich in der Ableitung des I. Theiles als Erweiterungen der Integrale erster Gattung darstellten, indem jene aus diesen letzteren mit Hilfe der Functionen $\frac{d}{du}\log\vartheta^{\mu}_{\lambda}$ und $\log\vartheta^{\mu}_{\lambda}$ ge-gewonnen wurden, so stellen sich auch die Integralformen (72) einerseits, (75) und (76) andererseits als Erweiterungen der Doppelintegrale (69) dar. Da nun aber neben diesen allgemeinen Integralformen (69) die einfachere Gestalt der Integrale (60) als Analogon zu den elliptischen Integralen erster Gattung auftritt, so lassen sich auch Erweiterungen dieser einfacheren Integralformen in directer Weise mittelst der Functionen

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\log\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2} \text{ und } \log\vartheta^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2}$$

gewinnen. Es sind zu diesem Zwecke in (72) E, Z, H beispielsweise durch die Ausdrücke in den $x^{2\,00}_{\;\;10}$, $x^{2\,10}_{\;\;00}$ und $x^{2\,10}_{\;\;10}$, wie sie aus (63) folgen, darzustellen; in (75) und (76) dagegen sind die gewonnenen Formen beizubehalten, statt sie durch Ausdrücke in den E, Z, H zu ersetzen. Es muss sodann die Gleichung zwischen den Functionen x^{00}_{10}, x^{10}_{00} und x^{10}_{10} entwickelt und mit ihrer Hilfe der Reihe nach jede der drei Functionen x^{00}_{10}, x^{10}_{00}, x^{10}_{10} durch die beiden anderen ausgedrückt und schliesslich $du_1 \cdot du_2$ damit übereinstimmend auf Grund der Relationen (58) der Reihe nach durch

$$\frac{dx^{2\,10}_{\;\;00}\cdot dx^{2\,10}_{\;\;10}}{\sqrt{R(x^{2\,10}_{\;\;00}\,x^{2\,10}_{\;\;10})}},\quad \frac{dx^{2\,00}_{\;\;10}\cdot dx^{2\,10}_{\;\;10}}{\sqrt{R(x^{2\,00}_{\;\;10}\,x^{2\,10}_{\;\;10})}},\quad \frac{dx^{2\,00}_{\;\;10}\cdot dx^{2\,10}_{\;\;00}}{\sqrt{R(x^{2\,00}_{\;\;10}\,x^{2\,10}_{\;\;00})}}$$

ersetzt werden.

Es stellen sich somit als Analoga zu den einfachen elliptischen Integralen verschiedenartige Doppelintegrale dar, die entsprechend der einfacheren und der complicirteren Form der Relationen zwischen den Quotienten der sechzehn Thetareihen $\vartheta\begin{smallmatrix}\mu_1+\nu_1\frac{m_1}{2};\ \mu_2+\nu_2\frac{m_2}{2}\\ \lambda_1+\varepsilon_1\frac{l_1}{2};\ \lambda_2+\varepsilon_2\frac{l_2}{2}\end{smallmatrix}$ sich scheiden in solche von specieller und in solche von allgemeinerer Form.

INHALT.

Seite

Ernst von Meyer. Vergleichende Charakteristik der dimolekularen Nitrile. Nach eigenen Untersuchungen und Versuchen von Dr. P. S. Burns 403

Otto Staude. Über die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen. Vorgelegt von Herrn Ad. Mayer . . . 429

Sophus Lie. Untersuchungen über Translationsflächen. (Abhandlung I.) 447

G. F. Lipps. Über Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. Fortsetzung zu S. 384. Vorgelegt von Herrn Scheibner 473

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1892.

VI.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

SITZUNG VOM 5. DECEMBER 1892.

W. Ostwald, *Ueber die Leitung der Elektricität durch Metalle.*

Für die Fortleitung der elektrischen Energie durch Metalle sind die allgemeinen, von den Factoren dieser und der Form des Leiters abhängigen Beziehungen wohl bekannt; was den von der Natur des Stoffes abhängigen Coefficienten des specifischen Widerstandes anlangt, so weiss man über ihn, dass er bei reinen Metallen annähernd proportional der absoluten Temperatur zunimmt, und mit der Wärmeleitfähigkeit annähernd in umgekehrtem Verhältniss steht. Kleine Mengen fremder Metalle haben einen sehr grossen Einfluss, indem sie den specifischen Widerstand der Metalle über den berechneten Mittelwerth vergrössern, und zwar häufig in ganz ausserordentlich hohem Maasse.

Während man nun über den Vorgang der Elektricitätsleitung bei Elektrolyten sich vermittelst die Theorie der freien Jonen von Arrhenius ein nach allen Seiten zutreffendes Bild machen kann, nach welchem der Widerstand elektrolytischer Leiter auf einen der Reibung ähnlichen Energieverbrauch bei der Fortbewegung der Jonen durch das Lösungsmittel zurückzuführen ist, sind die Versuche, diese Anschauungen auf die metallische Leitung zu übertragen, von keinem Erfolge begleitet gewesen. Eine solche Uebertragung ist in der That von vornherein als hoffnungslos zu bezeichnen, da bei der metallischen Leitung die charakteristische Erscheinung der elektrolytischen Leitung, die Bewegung ponderabler Materie im positiven und negativen Sinne des Stromes ganz sicher nicht stattfindet.

Eine Theorie des Leitungswiderstandes metallischer Körper hat vor allen Dingen eine Antwort auf die Frage zu geben, durch welchen Umstand der Verlust elektrischer Energie und ihre

Umwandlung in Wärme bedingt ist. Nun können wir im vorliegenden Falle chemische, mechanische und ähnliche Vorgänge, durch welche die elektrische Energie verbraucht werden könnte, ausschliessen und es bleiben uns daher nur elektrische Ursachen anzunehmen übrig, die in der Beschaffenheit der metallischen Leiter selbst liegen müssen, und die die fragliche Umwandlung bewirken.

Es geht aus den älteren Versuchen von Wroblewski und den neueren von Flfming und Dewar, durch welche wir die Leitfähigkeit von Metallen bei sehr tiefen Temperaturen kennen gelernt haben, hervor, dass in der That der Widerstand der reinen Metalle bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt sich dem Nullwerth nähert; die Eigenschaft des Widerstandes erscheint demgemäss als eine, die dem Leiter als solchem nicht nothwendig zukommt, sondern in ihm dadurch hervorgerufen wird, dass er eine gewisse Temperatur besitzt. Es ist mit anderen Worten in dem metallischen Leiter eine von der Temperatur abhängige und derselben proportionale Ursache des Energieverbrauches vorhanden, welche in dem Sinne wirkt, dass elektrische Energie in Wärme verwandelt wird.

Solche Umwandlungen von elektrischer Energie in Wärme sind uns nur in Gestalt der von Peltier entdeckten elektrothermischen Vorgänge bekannt, welche an der Grenzfläche zweier Metalle beim Durchleiten eines elektrischen Stromes entstehen. Die allgemeinen Gesetze dieser Erscheinungen, und der mit ihnen im engsten Zusammenhange stehenden thermoelektrischen sind wohlbekannt. Ich benutze aber gern die Gelegenheit, um auch an diesem Beispiele die grosse Unmittelbarkeit und Anschaulichkeit zu zeigen, mit welcher das von mir aufgestellte Princip der virtuellen Energien derartige Beziehungen abzuleiten gestattet.

Es sei an der Berührungstelle zweier Metalle ein Potentialsprung von dem Betrage π vorhanden. Dann wird, wenn die Elektricitätsmenge ε durch diese Stelle geführt wird, eine Aenderung der elektrischen Energie im Betrage von $\varepsilon\pi$ entstehen, und eine entsprechende Wärmemenge w aufgenommen, resp. entwickelt werden, so dass wir zunächst haben

$$w = \varepsilon\pi .$$

Nun ist π eine Function der Temperatur, aber keine der Elektricitätsmenge. Eine virtuelle Aenderung der elektrischen Energie in unserem Gebilde muss von einer Aenderung der

Wärmeenergie begleitet sein, und beide müssen nach dem erwähnten Princip einander gleich sein. Wir haben demgemäss

$$\varepsilon d\pi = s dT,$$

wo s die Aenderung der Entropie und T die absolute Temperatur ist. Ersetzen wir ersteren Werth durch den ihm gleichen $s = \frac{w}{T}$, so folgt

$$T \frac{d\pi}{dT} = \frac{w}{\varepsilon}$$

und, da $\frac{w}{\varepsilon} = \pi$,

$$\frac{d\pi}{dT} = \frac{\pi}{T}.$$

Dies sind die Fundamentalformeln der thermoelektrischen und der elektrothermischen Wirkungen; ihre Anwendung hängt davon ab, welche Beziehung zwischen T und π angenommen wird. In erster Annäherung wird man erfahrungsmässig innerhalb nicht allzu weiter Gebiete und bei reinen Metallen $\frac{d\pi}{dT}$ als constant, und daher π als proportional der absoluten Temperatur betrachten dürfen. Dementsprechend ist auch die elektrothermische Wirkung w als proportional der absoluten Temperatur anzusehen.

Denken wir uns nun einen Leiter aus an sich widerstandslosem Material in der Weise aufgebaut, dass er aus abwechselnden Platten von zwei verschiedenen Stoffen besteht, zwischen denen Potentialunterschiede $+\pi$ und $-\pi$ vorhanden sind, die dem oben erwähnten idealen Falle der Proportionalität zur absoluten Temperatur entsprechen. Beim absoluten Nullpunkte würde ein solcher Leiter keinen elektrischen Widerstand besitzen, wie dies für die reinen Metalle wahrscheinlich gemacht worden ist.

Bringen wir das Gebilde auf die Temperatur T und leiten einen Strom hindurch, dessen Betrag in der Zeiteinheit i sei. Alsdann werden an den Berührungsstellen abwechselnd Erwärmungen und Abkühlungen eintreten und es werden sich die Temperaturen $T - \Delta$ und $T + \Delta$ an ihnen ausbilden, die nach einiger Zeit stationär sein werden. Hierdurch wird die Wärmeentwicklung an der einen Berührungsstelle $w_1 =$

$ik\,(T+\Delta)$, wo k der oben erwähnte Proportionalitätscoefficient zwischen dem Potentialunterschiede π und der absoluten Temperatur ist, $\pi = kT$ und i die Stromstärke ist. Der Wärmeverbrauch an der anderen Berührungsstelle beträgt $-w_2 = ik\,(T-\Delta)$ und ist wegen der niedrigeren Temperatur kleiner, als die Wärmeentwicklung. Der Gesammteffect ist somit eine Wärmeentwicklung vom Betrage $w = w_1 - w_2 = 2ik\Delta$, und ein entsprechender Verlust an elektrischer Energie, d. h. ein Widerstand in gewöhnlichem Sinne.

Die Gesetze dieses Widerstandes ergeben sich nun folgendermassen. Zunächst ist der Temperaturunterschied Δ bei gegebener Stromstärke von der Natur des Materials abhängig, welches den Coefficienten k bestimmt. Sodann muss er bei Leitergebilden aus Platten von constanter Dicke, aber verschiedenem Querschnitt dem Querschnitt umgekehrt proportional sein, da die gleiche Stromstärke eine gleiche Wärmeentwicklung ergiebt, diese aber sich auf eine dem Querschnitt proportionale Substanzmenge vertheilt, also eine dem Querschnitt umgekehrt proportionale Temperaturänderung ergiebt. Dementsprechend ist auch der Widerstand umgekehrt proportional dem Querschnitt. Endlich muss der Energieverbrauch und demgemäss der Widerstand bei gleicher Stromstärke der Anzahl der Berührungsstellen, also unter der oben gemachten Annahme constanter Plattendicke der Länge des Leiters proportional sein. Dies sind aber die gleichen Gesetze, welche bei gewöhnlichen metallischen Leitern ihre Gestalt mit dem Widerstande in Beziehung setzen.

Leitet man Ströme verschiedener Stärke durch unser Gebilde, so nimmt zunächst die Wärmeentwicklung und -absorption an den Berührungsstellen proportional der Stromstärke, d. h. proportional der in der Zeiteinheit durchgeleiteten Elektricitätsmenge zu. In gleichem Maasse wachsen aber auch hierdurch die Temperaturunterschiede Δ, wodurch eine zweite der Stromstärke proportionale Ursache der Wärmewirkung gegeben wird, so dass schliesslich die Wärmeentwicklung proportional dem *Quadrat* der Stromstärke sich ergiebt. Denn es ist $w = 2ik\Delta$, Δ wächst aber proportional der Stromstärke i, $\Delta = ei$, so dass wir haben $w = 2i^2ke$. Dies ist das Joule'sche Gesetz, welches für gewöhnliche Leiter als gültig nachgewiesen ist. Ferner ist bekannt, dass aus dem Joule'schen Gesetz mittelst des ersten Energiesatzes sich unmittelbar das Ohm'sche Gesetz ergiebt; für

unser Gebilde ist somit auch das Ohm'sche Gesetz als gültig erwiesen.

Der Temperaturunterschied Δ ist weiter bei verschiedenen Anfangstemperaturen des Leiters proportional der Wärmeentwicklung w, die ihrerseits dem Potentialunterschied π und mit diesem der absoluten Temperatur proportional ist. Somit nimmt auch der Widerstand des Gebildes proportional der absoluten Temperatur zu, wie dies auch für Leiter aus reinen Metallen gültig ist, und zwar ungefähr in derselben Annäherung, in welcher die elektrothermische Wirkung der absoluten Temperatur proportional ist. Es ist dies meines Wissens das erste Mal, dass eine rationelle Begründung des von Clausius gefundenen annähernden Gesetzes gegeben wird.

Endlich ist der stationäre Temperaturunterschied Δ der Wärmeleitfähigkeit der Platten, an deren Endflächen die Wärmeentwicklung stattfindet, umgekehrt proportional. Dementsprechend wird *unter sonst gleichen Verhältnissen* der elektrische Widerstand unseres Gebildes im umgekehrten Verhältniss zur Wärmeleitfähigkeit der Platten stehen. Bekanntlich ist ein annäherndes Gesetz dieser Art von G. Wiedemann und Franz für gewöhnliche metallische Leiter gefunden worden, und auch in dieser Beziehung stimmen beide mit einander überein. Auch für diese Beziehung war eine rationelle Begründung bisher nicht bekannt.

Es fragt sich natürlich zum Schluss, wie weit es möglich ist, die Metalle als analog unserem Gebilde constituirt aufzufassen. Die zu machende Voraussetzung besteht darin, dass in einem Metall Unstetigkeiten in der Raumerfüllung angenommen werden müssen, welche zur Bildung von Grenzflächen Anlass geben, an denen elektrothermische Wirkungen bei der Stromleitung auftreten können. Es ist ersichtlicherweise nicht nothwendig, dass das Bild auch soweit festgehalten wird, dass diese Unstetigkeiten als ebene Flächen den ganzen Querschnitt des Leiters durchsetzen; vielmehr erlangt man das gleiche Ergebniss, wenn man eine irgendwie beschaffene körnige Structur voraussetzt.

Nun ist uns durch die Molekularhypothese die Annahme einer körnigen Structur der Materie vollkommen geläufig. Aus der Thatsache, dass die Metalle die Elektricität überhaupt leiten, geht hervor, dass sowohl die Körner oder Molekeln wie auch das Zwischenmedium leitend sein müssen, wobei wir von der

Ausbildung weiterer Vorstellungen, worin die Leitung »eigentlich« besteht, zunächst absehen können, und wahrscheinlich noch für lange Zeit werden absehen müssen. Ferner wissen wir, dass im Allgemeinen immer und überall, wenn und wo heterogene Dinge sich berühren, ihre Grenzfläche der Sitz von Unterschieden des elektrischen Potentials wird; es ist also nicht widersinnig anzunehmen, dass auch die Molekeln gegen den Raum, in welchem sie sich befinden, durch elektrische Doppelschichten abgegrenzt sind. Damit sind aber die Voraussetzungen erfüllt, welche zu machen sind, dass man das oben beschriebene Gebilde für ein vereinfachtes Modell eines metallischen Leiters nehmen kann, und aus der Uebereinstimmung der Eigenschaften jenes Gebildes mit den erfahrungsmässig festgestellten der metallischen Leiter ergiebt sich die theoretische Ableitung der letzteren. Ich habe schon erwähnt, dass eine solche Theorie bisher in diesem Umfange nicht vorhanden gewesen ist.

Die eben entwickelten Gesetze gelten, wie noch besonders erwähnt werden mag, nur für den stationären Zustand, wie er sich bei constanter oder langsam veränderlicher Stromstärke ergiebt. Bei sehr schnellen, namentlich oscillatorischen Potentialänderungen werden andere Erscheinungen auftreten, die sich im Allgemeinen als eine scheinbare Vermehrung des Widerstandes (in Folge des Umstandes, dass die entstehenden Temperaturverschiedenheiten sich nicht durch Leitung ausgleichen können) zeigen werden. Auch in dieser Hinsicht zeigt, soviel ich jetzt schon übersehen kann, unser Modell die grösste Aehnlichkeit mit den metallischen Leitern.

Es bleiben zum Schluss noch einige Worte über die Widerstände von Legirungen zu sagen. Bei solchen kommen zu den elektrothermischen Wirkungen der molekularen Unstetigkeit noch die der heterogenen Metalltheilchen, wodurch eine Steigerung des gemeinsamen Widerstandes über die Einzelbeträge hinaus zu erwarten ist, wie dies auch die Erfahrung lehrt. Ferner ist zu erwarten, dass Metallpaare, deren thermoelektrische Wirkung gering ist, auch Legirungen geben werden, deren Widerstand nur wenig grösser ist, als der aus den Antheilen berechnete, während weit von einander in der thermoelektrischen Reihe abstehende Metalle eine bedeutende Wirkung zeigen sollen. Auch dies trifft häufig zu. Nach Matthiessen ändern Blei, Zinn, Cadmium, Zink gegenseitig ihren Widerstand nur wenig; ihre thermoelek-

trischen Constanten gegen Silber sind 1,03, 1,00, —0,2, —0,3 (Wismuth-Antimon = 36 bis 45), während Legirungen dieser Metalle mit Wismuth beispielsweise sehr grosse Zunahmen des Widerstandes ergeben. Ebenso steht Nickel, dessen Legirungen mit Kupfer und Zink grosse Widerstände aufweisen, in der Nähe des Wismuths bezüglich seiner thermoelektrischen Constanten und ist weit vom Kupfer und Zink entfernt. Ein durchgehender Vergleich ist hier leider nicht möglich, da Legirungen sich häufig thermoelektrisch ganz anders verhalten, als ihre Bestandtheile, und wir gegenwärtig zu geringe Kenntniss darüber besitzen, in welchem Zustande sich die verschiedenen Metalle innerhalb einer erstarrten Legirung befinden.

Pfeffer, *Ueber Anwendung des Gipsverbandes für pflanzenphysiologische Studien.*

Um Wachsthum und Bewegungen von Pflanzen oder Pflanzengliedern mechanisch zu hemmen, habe ich schon seit längerer Zeit mit Erfolg die Umkleidung mit einem Gipsverband in Anwendung gebracht[1]). In Folgendem soll ein kurzer Hinweis auf diese Methode gegeben werden, die in der That in sehr mannigfacher Weise physiologischen Studien dienstbar gemacht werden kann. Denn es hat ja ein vielseitiges Interesse, die Reactionen der Pflanzen gegen feste Widerlagen ihren Wirkungen und ihren Ursachen nach zu studiren und thatsächlich kann, wie gezeigt werden soll, die mechanische Aussenleistung mit Hilfe der Gipsmethode gemessen werden.

Eine Umhüllung der Pflanzen mit Gips ist durch Umgiessen mit Gipsbrei leicht zu erreichen, der mit dem baldigen Erstarren eine allseitig anschliessende feste Widerlage bildet. Je nach dem erwünschten Härtegrade dieser letzteren hat man den gebrannten Gips mit Wasser zu einem dickflüssigeren oder dünnflüssigeren Brei anzurühren. Die Herstellung einer äusseren Form für den flüssigen Gipsbrei ist gewöhnlich mit Hilfe von Papier, plastischem Thon, gespaltenen Korken u. s. w. unschwer zu erreichen. Wird z. B. der Basaltheil der Wurzel umhüllt, so wächst die Spitze dieser ganz gut weiter und bei gänzlicher Einbettung der Keimwurzel in Gips kann der oberirdische Theil der Keimpflanze zu weitgehender Fortbildung gebracht werden. Sogar im Ganzen empfindliche Pflanzen, wie Nitella und Spirogyra,

1) Vgl. z. B. Pfeffer, Studien zur Energetik 1892, p. 78.

hielten sich einige Monate lebendig in der starren Gipshülle. Objecte dieser Art bringe ich in etwas Gipsbrei zwischen zwei kleine oder grössere Glasplatten, die durch Pressung so weit genähert werden, dass die Pflanzen beiderseitig durchscheinen und nöthigenfalls mit einer Längslinie dem Glase angepresst sind. Nach dem Erstarren des Gipses werden die Glasplatten mit starken Gummiringen umgeben und in einer verdünnten Nährlösung in geigneter Beleuchtung aufgestellt. In solchem Gipsverband lässt sich bei Nitella, an geeigneten Stellen, die normale Fortdauer der Plasmaströmung direct beobachten und bei Spirogyra u. s. w. kann man sich wenigstens von dem gesunden Aussehen der Zellen überzeugen. Für solche Objecte empfiehlt sich die Anwendung des feinsten Stuckgipses, während für Wurzeln u. s. w. der gewöhnliche gebrannte Gips des Handels ausreicht und zumeist sogar vorzuziehen ist.

Zumeist gelingt es leicht, die eingegipste Pflanze ohne Beschädigung von ihrer Gipshülle zu befreien. Handelt es sich z. B. um einen beiderseitig aus dem Gips hervorsehenden Stengel, so schneidet man parallel mit letzterem von zwei Seiten den Gips so hinweg, dass eine Gipsplatte entsteht. Nachdem in dieser dann noch derartig eine Rinne beiderseitig eingekerbt ist, dass längs dieser eine dünnere deckende Gipsschicht über dem Stengel bleibt, gelingt es leicht, durch vorsichtiges Zerbrechen der Gipsplatte den Stengel zu befreien.

Kommt aber der Spitzentheil, wie z. B. beim gänzlichen Einbetten der Wurzeln, in Gips zu liegen, so verfährt man zweckmässig folgendermassen. Zunächst wird die Wurzel in der bei Spirogyra angegebenen Weise in eine Gipsplatte eingebettet. Diese wird nach dem Erstarren und Abnehmen der Glasplatten auf entsprechende Breite und Form geschnitten und dann mit weiterer Gipsmasse umgossen, die ich mit etwas Frankfurter Schwarz grau zu färben pflege. Beim Abtragen dieses Hüllgipses von der Spitze des Gipscylinders aus stösst man dann zunächst auf die sich gut markirende weisse Gipsplatte. Legt man darauf die beiden Schmalseiten dieser frei, so gelingt es nach dem Einlegen in Wasser leicht, den grauen Hüllgips ganz zu entfernen, worauf die Befreiung der Pflanze aus einer genügend dünnen Gipsplatte durch directes Brechen dieser erfolgen kann.

Selbst bei Herstellung eines stark erhärtenden Gipses darf doch die Hülle nicht zu schwach gewählt werden, um einer

Sprengung vorzubeugen. Diese tritt z. B. bei kräftigen Keimwurzeln zuweilen noch ein, wenn der umhüllende Gipscylinder 2 cm Durchmesser hat. Durch genügende Gipsdicke, durch Umwickeln mit Bindfaden, durch Einlegen von Metallringen in den Gipsguss u. s. w. kann natürlich eine ausreichende Widerstandskraft immer erreicht werden. Ein Gemenge aus Gips (1 Th.) und Portlandcement (3 Th.) erstarrt zwar auch schnell, gewinnt aber erst in längerer Zeit die dann freilich ansehnlichere Widerstandskraft und dürfte nur in besonderen Fällen vorzuziehen sein.

Die schon mitgetheilten Thatsachen beweisen, dass die Pflanzen im Gips lebendig und lebensthätig bleiben, und die mechanischen Druckleistungen gegen die starre Hülle geben von der Fortdauer der Wachsthumsbestrebungen Kenntniss. Hierdurch, sowie durch das Anhalten der Plasmaströmungen wird auch eine ausreichende Versorgung mit Sauerstoff verrathen, die übrigens auch noch in anderer Weise controlirt wurde. Die Sättigung des zugeführten Wassers mit dem nur sehr wenig löslichen Gips führte an den benutzten Objecten keine merklichen Nachtheile herbei. Für die auf Beleuchtung angewiesenen Pflanzentheile fällt freilich, sobald eine dickere Gipshülle nothwendig ist, die partielle oder totale Lichtentziehung als ein in Rechnung zu ziehender Factor ins Gewicht. Dagegen ist die Verdunklung z. B. ohne Bedeutung für Wurzeln, die ohnehin bei ihrem Leben im Boden gelegentlich gegen hohe oder unüberwindliche Widerstände zu reagiren haben.

Wie u. a. mittelst der Gipshülle der von Pflanzen gegen eine feste Widerlage ausgeübte Druck bestimmt werden kann, mag hier speciell mit Rücksicht auf Wurzeln angedeutet werden.

Eine Keimpflanze wird derartig in einen mit feuchten Sägespänen oder mit Erde gefüllten Blumentopf gebracht, dass die Wurzel eine genügende Strecke aus dem Loche des Topfes hervorsieht. Nunmehr wird dieser freie Wurzeltheil, nach Umdrehung des Topfes, mit Gipsbrei umgossen, dann sogleich über die Spitze ein durchlochtes Wachspapierchen geschoben und dieses mit einer durchlochten ebenen Platte derart gegen den Brei gepresst, dass die gewünschte Strecke der Wurzelspitze frei von dem mit dem Topfe verbundenen Gipse bleibt.

Nach dem Erhärten des Gipses wird an Stelle des Wachspapiers sehr dünnes nasses Seidenpapier der oberen Gipsfläche angeschmiegt und nun die Wurzelspitze ebenfalls mit Gips um-

gossen. Das nasse Seidenpapier bedingt eine nur geringe Adhäsion der in kleinen Dimensionen zu haltenden Gipskappe, die demgemäss durch die fortwachsende Wurzel fortgeschoben wird. Die zur Aequilibrirung dieser Fortschiebung nöthige Gegenwirkung ist aber ein Maass für die Kraft, mit welcher die Wurzel in einem widerstandsfähigen Medium, also auch im Boden, vorwärts zu dringen vermag.

Zur Messung dieser Gegenwirkung verwende ich elliptisch geformte Stahlfedern, deren Spannkraft mit der Compression schnell ansteigt. Mit den hier nicht näher zu beschreibenden Apparaten ist es ferner möglich, die Feder sogleich und jederzeit mit gewünschter Energie gegen die Gipskappe zu spannen. So ist es erreichbar, dass bei Herstellung des Gleichgewichts zwischen Federspannung und Wurzelkraft nur ein sehr geringes Auseinanderrücken der Contactfläche von Gipskappe und der die übrige Wurzel fixirenden Gipsmasse eingetreten ist. Die an sich plastische Wurzel vermag somit nicht auszubiegen und kann nun ihre volle Energie entwickeln. Diese Energie, mit welcher also die Wurzel vorwärts zu dringen strebt, wurde, beiläufig bemerkt, zu 7 bis 10 Atmosphären bestimmt.

Die Compression der Messfedern wurde durch mikrometrische Bestimmung des Abstands zweier Nadelspitzen controlirt, eine Methode, die grosse Genauigkeit gewährt und in diesem Falle, was Einfachheit und Präcision betrifft, einer Messung mittelst Hebelvergrösserung vorzuziehen ist. Näher wird diese Methode, sowie die Technik der Versuche überhaupt an anderer Stelle behandelt werden. Bemerkt sei nur noch, dass bei richtiger Ausführung die Wurzeln, sowohl während des Eingipsens, als während der Versuchszeiten sich völlig gesund und wachsthumskräftig erhalten. In der ausführlichen Publication soll auch mitgetheilt werden, wie und warum theilweise in etwas anderer Weise verfahren wurde. Auch soll dann eine andere Methode beschrieben werden, in welcher die Wurzel in einem Kautschuckschlauche wirkte und aus der Ausdehnung dieses die Energie des Wurzeldruckes ermittelt wurde.

Mit Hilfe der Gipshüllen und geeigneter Federapparate lässt sich auch der Querdruck, d. h. die Energie bestimmen, mit welcher Wurzeln, Stengel u. s. w. in einer zu ihrer Längsachse senkrechten Richtung gegen eine Widerlage wirken. Zu diesem Zwecke muss beim Fixiren in Gips in dieser Hülle ein einseitiges

Fensterchen ausgespart werden (ich verwende dazu eine Form aus Plastilina des Handels), in welchem das rückseitig gegen den Gips gestützte Pflanzenorgan mit der anderen Längshälfte hervorsteht. Dieser letzteren dient dann als Widerlage ein durch Angiessen hergestellter, enganschliessender Gipsdeckel, dessen Fortbewegung wiederum durch die Spannung der messenden Feder in engsten Grenzen gehalten wird.

Näheres über die Methodik bringt die ausführliche Publication. In dieser werden auch die in der That nicht immer gleichen Mittel und Wege gekennzeichnet, durch welche die theilweise sehr hohen Aussenleistungen erreicht werden. Dabei wird sich ferner ergeben, wie aus diesen und anschliessenden Erscheinungen gewisse, die Wachsthumsmechanik betreffende Fragen definitiv zu beantworten sind[1]).

[1]) Eine allgemein gehaltene Discussion findet sich über gewisse Theile dieser Fragen in Pfeffer, Studien zur Energetik. 1892, p. 76 u. s. w.

J. Thomae. *Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.*

Die Methode, nach welcher Hesse im 24. Bande des Crelle-schen Journals eine Fläche F zweiter Ordnung linear construirt, indem er zu einem beliebigen Punkte des Raumes die ihm für die gesuchte Fläche zugehörige Polarebene finden lehrt, zeichnet sich aus durch die Einfachheit der angewandten Principien, hat aber den Mangel, dass sie für die wirkliche Ausführung die Construction einer Reihe von Hyperboloiden, d. h. je dreier Erzeugender derselben erfordert, wodurch sie übermässig umständlich wird. Dieser Mangel lässt sich dadurch beseitigen, dass man die Polarebene eines besonderen Punktes sucht, zu deren Auffindung jene Hülfshyperboloide nicht nöthig sind. Eine solche Vereinfachung will ich hier mittheilen. Dabei sehe ich die Aufgabe als gelöst an, wenn in zwei Ebenen je fünf Punkte der Fläche, also die Elemente von zwei Kegelschnitten gefunden sind. Bekanntlich ist dann die Construction des Schnittpunktes der Fläche mit einer beliebigen Geraden γ, welche durch einen weiteren ausserhalb jener Ebenen gegebenen, die Fläche nun völlig bestimmenden Punkt M geht, eine durchaus einfache lineare. Denn eine Ebene durch jene Gerade γ schneidet die Ebene der beiden Kegelschnitte in Geraden, auf denen die Paare für diese Kegelschnitte conjugirter Punkte je eine Involution bestimmen. Die beiden Involutionen und der Punkt M bestimmen den gesuchten Punkt auf γ als Punkt eines Kegelschnittes in bekannter Weise linear.

Zuerst erweisen wir den Satz:

I. *Liegen die Punkte M_{11} M_{12} M_{13} in der Ebene e_1, die Punkte M_{21} M_{22} M_{23} in der Ebene e_2, so giebt es zu jedem Punkte P auf der Schnittlinie α der Ebenen e_1 e_2 einen Punkt Q, der P in Bezug auf jede durch die sechs Punkte $M_{11} M_{12} \cdot\cdot M_{23}$ gehende Fläche zweiter Ordnung conjugirt ist.*

Dieser Punkt soll der Kürze halber der dem Punkte P in Bezug auf die sechs Punkte M_{11} $M_{12} \cdot\cdot M_{23}$ conjugirte Punkt heissen.

Analytisch erweist sich der Satz so. Es seien $F=0$, $F'=0$, $F''=0$ drei Flächen zweiter Ordnung durch die sechs Punkte M, die sich in acht und nur acht nicht alle in den Ebenen $e_1=0$, $e_2=0$ liegenden Punkten schneiden. Alsdann sind die Gleichungen aller durch die sechs Punkte M gehenden Flächen zweiter Ordnung in der Form enthalten

$$AF+BF'+CF''+De_1e_2=0,$$

wenn die Verhältnisse der Parameter $ABCD$ alle möglichen Werthe annehmen. Erinnert man sich des Algorithmus der Polarenbildung, so bemerkt man, dass die Polare eines Punktes P auf α in Bezug auf eine Fläche dieses Systems von e_1 e_2 unabhängig ist, dass sie die Polare desselben Punktes in Bezug auf die Fläche

$$AF+BF'+CF''=0$$

ist. Die Polare von P, gebildet in Bezug auf jede beliebige Fläche des Systems, enthält daher den Punkt Q, der P in Bezug auf die drei Flächen $F=0$, $F'=0$, $F''=0$ conjugirt ist, den Schnittpunkt der drei Polarebenen von P für diese Flächen.

In besonderen Fällen kann es unendlich viele P conjugirte Punkte Q geben, z. B. wenn in e_1 sowohl, als auch in e_2 zwei der gegebenen Punkte mit P in einer Geraden liegen. In diesem Falle enthält die Verbindungslinie der Punkte, welche von P bez. durch die beiden betreffenden Punkte in e_1 und e_2 harmonisch getrennt sind, alle P für die sechs Punkten conjugirten Punkte Q.

Auf rein geometrischem, synthetischem Wege beweist man den Satz I. folgendermassen. — Nimmt man auf α eine Involution J_3 an, die keine doppelten Elemente hat, so bestimmt sie in e_1 mit M_{11} M_{12} M_{13} einen Kegelschnittbüschel, dessen Individuen durch die drei Punkte und ein Paar der Involution gehen. Einem Punkt P auf α ist für diesen Büschel (d. h. für jedes Individuum

desselben) ein Punkt S_1 conjugirt. Dieselbe Involution bestimmt in gleicher Weise in e_2 mit $M_{21} M_{22} M_{23}$ einen Büschel, für den dem Punkte P ein Punkt S_2 conjugirt ist. Die Polarebene des Punktes P in Bezug auf jede Fläche zweiten Grades, die die Punkte $M_{11} M_{12} \cdot\cdot M_{23}$ und ein Paar der Involution J_s enthält, geht durch die Gerade γ_s, welche S_1 mit S_2 verbindet. Nehmen wir nun auf α eine zweite Involution ohne doppelte Punkte J_t an, so gehen die Polarebenen von P in Bezug auf alle Flächen zweiter Ordnung durch $M_{11} M_{12} \cdot\cdot M_{23}$ und ein Paar dieser Involution durch eine Gerade γ_t, welche die P in Bezug auf die Kegelschnittbüschel $M_{11} M_{12} M_{13} J_t$ und $M_{21} M_{22} M_{23} J_t$ bez. conjugirten Punkte T_1 und T_2 verbindet. Die Geraden γ_s und γ_t schneiden sich in einem Punkte Q. Die Involutionen $J_s J_t$ besitzen nämlich ein gemeinsames (weil sie ohne doppelte Punkte sind reelles) Paar. Die Geraden $\gamma_s \gamma_t$ liegen beide in der Ebene, welche die Polarebene von P in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung durch die sechs Punkte M und das besprochene gemeinsame Paar der Involutionen $J_s J_t$ ist, und schneiden sich also.

Nehmen wir weiter einen Punkt U_1 in e_1 an, der nicht auf der Geraden $S_1 T_1$ liegt, so bestimmen $M_{11} M_{12} M_{13}$ und das Paar conjugirter Punkte PU_1 einen mit $M_{11} M_{12} M_{13} (PU_1)$ zu bezeichnenden Kegelschnittbüschel, dieser bestimmt auf α eine Involution J_u und diese bestimmt in e_2 mit $M_{21} M_{22} M_{23}$ einen Büschel, für welchen der P conjugirte Punkt U_2 sein mag. Die Polarebenen von P in Bezug auf die Flächen, die durch die sechs Punkte M und ein Paar von J_u gehen, schneiden sich in der $U_1 U_2$ verbindenden Geraden γ_u. Diese Gerade γ_u trifft die Gerade γ_s, denn die Involutionen $J_s J_u$ haben ein gemeinsames (weil wenigstens eine der Involutionen ohne doppelte Punkte ist, reelles) Paar. In der zu diesem gemeinsamen Paare gehörenden Polarebene des Punktes P liegt sowohl γ_s als auch γ_u. Aus demselben Grunde schneidet die Gerade γ_u die Gerade γ_t. Da aber $\gamma_u \gamma_s \gamma_t$ nach unseren Annahmen über die Lage der Punkte $U_1 S_1 T_1$ nicht in einer Ebene liegen, so muss γ_u durch den Schnittpunkt von $\gamma_s \gamma_t$ durch den Punkt Q hindurch gehen. Lässt man den Punkt U_1 die ganze Ebene e_1 durchwandern, so erkennt man, dass alle durch die sechs Punkte M gehenden Flächen zweiter Ordnung PQ zu conjugirten Punkten haben. Nur wenn U_1 auf die Gerade $S_1 T_1$ fällt, ist der Beweis unvollständig. Dass aber auch dann der Satz richtig bleibt, ist daraus ersichtlich, dass S_1

auf unendlich viele Weisen angenommen werden kann, folgt aber auch aus Stetigkeitsbetrachtungen.

Als Lemma ziehen wir hieraus den folgenden, nach den angestellten Betrachtungen unmittelbar klaren Satz:

II. *Ist in einer Ebene* e_1 *ein Tripel von Punkten* $M_{11} M_{12} M_{13}$ *gegeben, in der Ebene* e_2 *ein Tripel* $M_{21} M_{22} M_{23}$, *und ist* P *ein Punkt auf der Schnittlinie* α *der beiden Ebenen, nimmt man in* e_1 *einen Punkt* S_1 *an, der mit* P *als Paar conjugirter Punkte, und mit* $M_{11} M_{12} M_{13}$ *einen Kegelschnittbüschel* $M_{11} M_{12} M_{13}$ $(P S_1)$ *bestimmt, so bestimmt dieser Büschel auf* α *eine Involution* J_s *und diese in* e_2 *mit* $M_{21} M_{22} M_{23}$ *einen Büschel* $(J_s) M_{21} M_{22} M_{23}$. *Der* P *in Bezug auf diesen Büschel zugeordnete Punkt* S_2 *ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Die Punkte* S_1 *und* S_2 *sind einander perspectivisch zugeordnet.*

Fallen die Ebenen $e_1 e_2$ zusammen, so kann α darin willkürlich angenommen werden.

Der Satz II. wird hinfällig, wenn von den Punkten $M_{11} M_{12} M_{13}$ (oder $M_{21} M_{22} M_{23}$) zwei, etwa $M_{12} M_{13}$ mit P in einer Geraden liegen, weil dann der P für die sechs Punkte $M_{11} M_{12} \cdot\cdot M_{23}$ conjugirte Punkt Q in der Ebene e_1 auf den von P durch $M_{12} M_{13}$ harmonisch getrennten Punkt fällt. Nimmt man in diesem Falle einen Punkt S_1 in e_1 auf einer durch Q gehenden Geraden γ an, und lässt S_1 auf γ wandern, so ändert sich dabei der Kegelschnittbüschel $M_{11} M_{12} M_{13} (P S_1)$ nicht, denn er ist derjenige Büschel $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$, dessen vierter Grundpunkt M_{14} der von M_{11} durch P und γ harmonisch getrennte Punkt ist. Demnach entspricht allen Punkten S_1 auf γ ein und derselbe Punkt S_2, und zwar der Schnittpunkt $\alpha\gamma$, weil er der P für den Büschel $(J_s) M_{21} M_{22} M_{23}$ conjugirte Punkt ist. Fällt aber S_1 auf Q, so entspricht diesem Punkte jeder Punkt der Ebene e_2. Den Punkten S_2 in e_2 entspricht also in e_1 im Allgemeinen der Punkt Q, nur wenn der Punkt S_2 auf α fällt, so entspricht ihm jeder Punkt der durch S_2 und Q gelegten Geraden.

Liegen nicht blos $M_{12} M_{13}$, sondern auch noch $M_{22} M_{23}$ mit P auf einer Geraden, und ist R der von P durch $M_{22} M_{23}$ harmonisch getrennte Punkt, so entspricht jedem Punkte S_1 in e_1 jeder Punkt S_2 der Geraden, welche den Schnittpunkt der Geraden $S_1 Q$ und α mit dem Punkte R verbindet, und jedem Punkte S_2 entspricht in e_1 jeder Punkt der Geraden, welche den Schnittpunkt der Geraden $S_2 R$ und α mit dem Punkte Q verbindet.

Dem Punkte Q aber entspricht jeder Punkt in e_2, dem Punkte R jeder Punkt in e_1.

Man könnte nun den P für die sechs Punkte M conjugirten Punkt Q in folgender Weise construiren:

III. *Man nimmt in der Ebene e_1 die Gerade p_1 beliebig an. Sie bestimmt als Polare von P mit den gegebenen Punkten $M_{11} M_{12} M_{13}$ einen Kegelschnitt K_1 linear. Die Paare für K_1 conjugirter Punkte auf α bestimmen linear mit $M_{21} M_{22} M_{23}$ einen Kegelschnitt K_2, für den dieselben Paare auf α conjugirte Punkte sind, und man findet in bekannter Weise die Polare p_2 von P für K_2 linear. Die Geraden $p_1 p_2$ schneiden sich auf α, liegen also in einer Ebene. Wiederholt man diese Construction, indem man p_1', p_1'' für p_1 setzt, welche Geraden sich nicht in einem Punkte schneiden, und die zugehörigen Geraden p_2', p_2'' sucht, so bestimmen die drei Ebenen (p_1, p_2), (p_1', p_2'), (p_1'', p_2'') den gesuchten Punkt Q.*

Das Verfahren wird hinfällig, wenn zwei Punkte, etwa $M_{12} M_{13}$ mit P in einer Geraden liegen, dann ist aber der von P durch $M_{12} M_{13}$ harmonisch getrennte Punkt der gesuchte. Es ist leicht zu erkennen, dass der Punkt Q nur dann in einer der Ebenen $e_1 e_2$ liegen kann, wenn zwei der Punkte M mit P in einer Geraden liegen. Zu dieser immerhin etwas complicirten Construction braucht man aber nur dann seine Zuflucht zu nehmen, wenn von den sechs Punkten ein oder zwei Paare nicht unmittelbar, sondern als Doppelpunkte von Involutionen, als welche sie auch imaginär sein können, gegeben sind. Liegen aber sechs reelle Punkte vor, so findet man Q mittels des evidenten Satzes:

IV. *Der P in Bezug auf die sechs Punkte $M_{11} M_{12} M_{13} M_{21} M_{22} M_{23}$ conjugirte Punkt Q ist der Schnittpunkt der drei Ebenen, welche von P durch die Ebenenpaare*

$$(M_{12} M_{13} M_{21}) \; (M_{11} M_{22} M_{23}),$$
$$(M_{13} M_{11} M_{22}) \; (M_{12} M_{23} M_{21}),$$
$$(M_{11} M_{12} M_{23}) \; (M_{13} M_{21} M_{22}),$$

harmonisch getrennt sind.

Wir geben hier der Bemerkung Raum, dass, wenn man zwei sich in zwei Punkten schneidende Kegelschnitte in verschiedenen Ebenen durch eine dritte Ebene e schneidet, im Allgemeinen jeder durch die vier Schnittpunkte dieser Ebene mit den Kegelschnitten gehende Kegelschnitt mit den beiden ersten in einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Denn nimmt man in der dritten

Ebene einen Punkt M an, so ist durch ihn und die beiden gegebenen Kegelschnitte eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt. Der Schnitt derselben mit der Ebene e ist ein Kegelschnitt, und dieser ist durch den Punkt M und die Schnittpunkte von e mit den Kegelschnitten im Allgemeinen völlig bestimmt. Wird aber die Ebene e durch einen Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte gelegt, so sind von dem durch e aus der Fläche zweiter Ordnung geschnittenen Kegelschnitte mit M nur *vier* Punkte gegeben. Nicht jeder durch die vier Punkte gehende Kegelschnitt liegt mit den beiden ersten auf einer Fläche zweiter Ordnung, sondern nur der, dessen Tangente in dem den drei Kegelschnitten gemeinsamen Punkte mit den Tangenten an die ersten Kegelschnitte in einer Ebene liegt.

Nun sollen neun Punkte gegeben sein. Die Punkte $M_{11} M_{12} M_{13}$ sollen in der Ebene e_1, $M_{21} M_{22} M_{23}$ in der Ebene e_2, $M_{31} M_{32} M_{33}$ in der Ebene e_3 liegen. Die Ebenen $e_2 e_3$ schneiden sich in α_1, $e_3 e_1$ in α_2, $e_1 e_2$ in α_3 und $e_1 e_2 e_3$ in P. In nicht singulären Fällen construirt man die durch die neun Punkte gehende Fläche zweiter Ordnung in folgender Weise:

V. *Man construire nach der Anweisung IV (oder wenn Paare von Punkten nicht unmittelbar, sondern nur als Doppelpunkte von Involutionen auf Geraden gegeben sind, nach III), die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, die dem Punkte P bez. für die drei Gruppen von je sechs Punkten*

$$M_{21} M_{22} M_{23} M_{31} M_{32} M_{33}$$
$$M_{31} M_{32} M_{33} M_{11} M_{12} M_{13}$$
$$M_{11} M_{12} M_{13} M_{21} M_{22} M_{23}$$

conjugirt sind. Sie bestimmen die Polarebene p von P für die gesuchte Fläche. Ihre Schnitte $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ mit den Ebenen $e_1 e_2 e_3$ sind die Polaren von P für die aus derselben Fläche durch dieselben Ebenen ausgeschnittenen Kegelschnitte. Durch ein Paar Pol und Polare und drei Punkte, von denen nicht zwei mit dem Pol in einer Geraden liegen, ist ein Kegelschnitt, d. h. es sind fünf Punkte desselben linear bestimmt. Folglich sind von der Fläche drei Kegelschnitte linear, und damit ist die Fläche linear bestimmt.

Diese Construction wird unausführbar, wenn $Q_1 Q_2 Q_3$ auf einer Geraden liegen. — Wir sehen zunächst von dem Falle ab, dass zwei der Punkte M mit P in einer Geraden liegen, in welchem zwei von den Punkten Q in den von P durch jene beiden

Punkte harmonisch getrennten zusammenfallen. — Die Gerade γ, in der $Q_1 Q_2 Q_3$ liegen, möge $e_1 e_2 e_3$ bez. in den Punkten $N_1 N_2 N_3$ treffen. Dann liegen die vierten Doppelpunkte $M_{14} M_{24} M_{34}$ der Büschel $M_{11} M_{12} M_{13} (PN_1)$, $M_{21} M_{22} M_{23} (PN_2)$, $M_{31} M_{32} M_{33} (PN_3)$ auf der gesuchten Fläche. Bestimmt nun der Kegelschnitt K_1 des Büschels $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$ durch seine Schnittpunkte mit α_3 den Kegelschnitt K_2 des Büschels $M_{21} M_{22} M_{23} M_{24}$ und dieser durch seine Schnittpunkte mit α_1 den Kegelschnitt K_3 des Büschels $M_{31} M_{32} M_{33} M_{34}$ und dieser durch seine Schnittpunkte mit α_2 den Kegelschnitt K_1' des Büschels $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$, und fällt dann bei jeder Wahl von K_1 K_1' mit K_1 zusammen, so giebt es durch die neun Punkte unendlich viele Flächen zweiter Ordnung und es kann noch ein Punkt etwa M_{15} in e_1 willkürlich angenommen werden. Dieser bestimmt dann mit $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$ einen Kegelschnitt und damit die Fläche. Fallen K_1 und K_1' für zwei Wahlen von K_1 zusammen, so fallen sie jedesmal zusammen.

Die Polaren $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ des Punktes P für die Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$ liegen in einer Ebene, denn $\pi_1 \pi_2$ liegen in einer Ebene, in der auch γ liegt, $\pi_2 \pi_3$ in einer Ebene, in der wiederum γ liegt, also liegen $\pi_1 \pi_3$ in der Ebene $\pi_2 \gamma$. Wählen wir den Kegelschnitt K_1 so, dass er α_2 berührt, etwa im Punkte R_1 oder R_2 (die Berührung ist auf zweierlei Weise möglich) und berührt K_3 nicht ebenfalls α_2 bez. in R_1 oder R_2, so ist die durch den Büschel $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$ auf α_2 bestimmte Involution J_1 von der durch $M_{31} M_{32} M_{33} M_{34}$ auf α_2 bestimmten Involution J_3 verschieden. Denn die erste Involution hat ihre Doppelpunkte in $R_1 R_2$. Die Polaren von P in Bezug auf die berührenden Kegelschnitte K_1 gehen durch R_1 bez. R_2. Die Polaren π_3 von P in Bezug auf die berührenden Kegelschnitte K_3, weil sie sich mit π_1 auf α_2 treffen, und der Treffpunkt auf α_3 mit dem Kegelschnitt K_1 veränderlich ist, gehen im Allgemeinen nicht durch R_1 und R_2, wenn nicht etwa dem in R_1 berührenden Kegelschnitte K_1 ein in R_2 berührender Kegelschnitt K_3 entspricht. Dies ist jedoch unmöglich, denn der Kegelschnitt K_3 der dem in R_1 berührenden K_1 entspricht, muss α_2 in Punkten treffen, die durch R_1 P harmonisch getrennt sind, diese können deshalb nicht beide in R_2 zusammenfallen. Demnach muss die Involution, die der Büschel $M_{11} M_{12} M_{13} M_{14}$ auf α_2 bestimmt, von der, die der Büschel $M_{31} M_{32} M_{33} M_{34}$ auf α_2 bestimmt, verschieden sein. Der

dem Punkte N_3 entsprechende Punkt in e_1 kann nicht auf N_1 fallen, d. h. es ist nicht möglich, dass $Q_1 Q_2 Q_3$ in eine Gerade fallen, wenn die neun Punkte nicht in einer Curve vierter Ordnung erster Species liegen.

Geht die Gerade γ durch eine Kante, etwa α_3, so ist nicht so unmittelbar klar, dass die Geraden $\pi_1 \pi_2$ mit γ in einer Ebene liegen, weil sich die Geraden $\pi_1 \pi_2$ in demselben Punkte der Geraden γ schneiden, nämlich in dem Schnittpunkte N_{12} von γ mit α_3. Dass der Punkt Q_3, durch den γ geht, nicht in e_1 oder e_2 liegen kann, wenn nicht zwei Punkte M mit P in einer Geraden liegen, also auch nicht auf N_{12} fallen kann, ist unschwer zu erweisen. Nehmen wir nun einen Punkt S_1 in e_1 als P für einen Kegelschnitt K_1 des Büschels $M_{11} M_{12} M_{13} (PN_{12})$ conjugirt an, so dass die Gerade π_1 durch $S_1 N_{12}$ die Polare von P ist, so geht die Polare π_2 von P für den durch K_1 bestimmten Kegelschnitt K_2 des Büschels $M_{21} M_{22} M_{23} M_{24}$ durch einen Punkt S_2, der mit S_1 und Q_3 in einer Geraden liegt. Die Polare π_2 liegt also in der Ebene $\pi_1 Q_3$, die die Gerade γ enthält, und es liegen $\pi_1 \pi_2 \gamma$ in einer Ebene. Die weitere Schlussfolgerung ist wie im Falle der allgemeinen Lage von γ, und es giebt demnach, wenn $Q_1 Q_2 Q_3$ auf einer Geraden liegen, auch wenn γ eine Kante α trifft, unendlich viele Flächen zweiter Ordnung durch die neun Punkte, die genau wie oben construirt werden können.

Geht die Gerade γ durch den Punkt P, so ist dieser für die gesuchte Fläche sich selbst conjugirt, er liegt auf ihr. Um in diesem Falle die Fläche zu construiren, ordne man die neun Punkte in drei Ebenen $e_1 e_2' e_3'$ so an, dass e_1 die Punkte $PM_{11} M_{12} M_{13}$, die Ebenen e_2', e_3' von den übrigen sechs Punkten je drei enthalten, sich aber in einem von P verschiedenen Punkte P' schneiden. Verfährt man nun wie früher, so gelingt entweder die Construction der Flächen unmittelbar, oder führt auf denselben singulären Fall. Dann sind aber in der Ebene e_1 fünf Punkte $PP' M_{11} M_{12} M_{13}$ von der Fläche bekannt. Der durch sie bestimmte Kegelschnitt bestimmt durch die Paare conjugirter Punkte auf der Schnittlinie $e_1 e_2$ oder auch $e_1 e_2'$ mit den in e_2 bez. e_2' gegebenen Punkten einen weiteren Kegelschnitt der Fläche, und damit diese selbst linear. — Wir haben somit den Satz gefunden:

VI. *Liegen die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, welche dem Schnittpunkte*

P der die neun Punkte enthaltenden Ebenen $e_1 e_2 e_3$ für die drei Gruppen von je sechs Punkten

$$M_{21} M_{22} M_{23} M_{31} M_{32} M_{33} \text{ in } e_2 e_3$$
$$M_{31} M_{32} M_{33} M_{11} M_{12} M_{13} \text{ in } e_3 e_1$$
$$M_{11} M_{12} M_{13} M_{21} M_{22} M_{23} \text{ in } e_1 e_2$$

bez. conjugirt sind, in einer Geraden, so giebt es durch sie unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die linear construirbar sind. Die Punkte liegen auf einer Curve vierter Ordnung erster Species.

Nur für den Fall, dass die Gerade $Q_1 Q_2 Q_3$ durch den Schnittpunkt P der Ebenen $e_1 e_2 e_3$ geht, ist dieser Satz nicht erwiesen, die Fläche aber ist ebenfalls linear construirt.

Es kann nun noch der Fall eintreten, dass die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ in einen Q zusammenfallen. Dann denken wir uns durch den Punkt Q in der Polarebene von P für die, oder wenn es deren mehrere geben sollte, für eine durch die neun Punkte gehende Fläche eine Gerade γ gelegt, welche $e_1 e_2 e_3$ bez. in den Punkten $N_1 N_2 N_3$ trifft. Ein Kegelschnitt K_1 des Büschels $M_{11} M_{12} M_{13} (PN_1)$ bestimmt einen Kegelschnitt K_2 des Büschels $M_{21} M_{22} M_{23} (PN_2)$ und dieser einen Kegelschnitt K_3 des Büschels $M_{31} M_{32} M_{33} (PN_3)$. Die Kegelschnitte $K_3 K_1$ müssen sich aus den auf Seite 549 dargelegten Gründen in denselben Punkten auf α_2 schneiden.

Es giebt demnach unendlich viele Flächen durch die neun Punkte, woraus wiederum nachträglich folgt, dass die Gerade γ durch Q beliebig gewählt werden kann. Bei jeder Wahl von γ drehen sich die Polarebenen von P für die zugehörigen Flächen zweiter Ordnung durch die neun Punkte um diese Gerade, die Polarebenen von P für alle möglichen Flächen bilden einen Bündel und die Mannigfaltigkeit der Flächen ist eine zweifach unendliche. Dies ist nur möglich, wenn von den neun Punkten sieben in einem Kegelschnitt liegen, oder wenn acht in zwei Geraden oder in einer Ebene, oder wenn alle in einer Curve dritter Ordnung liegen.

Ist P die Spitze eines Kegels, in dem die neun Punkte liegen, so kann die Polarebene nicht zur Construction dienen, indessen ist in diesem Falle die Fläche unmittelbar gegeben.

Liegen zwei der neun Punkte, etwa $M_{32} M_{33}$ mit P in einer Geraden, so ändere man M_{33} in M'_{33} ab und construire die Polarebene p' von P in Bezug auf die durch die neun Punkte $M_{11} M_{12} \ldots M_{31} M_{32} M'_{33}$ gehende Fläche zweiter Ordnung. Dann

ersetze man M'_{33} durch M''_{33} und construire die Polarebene p'' von P für die Fläche durch $M_{11}\,M_{12}\,..\,M_{32}\,M''_{33}$. Die Polarebene p von P in Bezug auf die Fläche durch $M_{11}\,..\,M_{32}\,M_{33}$ geht durch die Schnittlinie γ der Ebenen $p'p''$. Die Gerade γ treffe die Ebenen $e_1 e_2 e_3$ bez. in den Punkten $N_1 N_2 N_3$. Ist N_3 von dem Punkte N, der von P durch $M_{32}\,M_{33}$ harmonisch getrennt ist, verschieden, so ist die Ebene $N\gamma$ die Polarebene von P für die durch die Punkte $M_{11}\,M_{12}\,..\,M_{32}\,M_{33}$ gehende Fläche zweiter Ordnung und die Fläche ist linear construirbar. Man kann aber, abgesehen von dem leicht zu erledigenden Falle, dass die gesuchte Fläche die Gerade $P M_{32}\,M_{33}$ enthält, $M'_{33}\,M''_{33}$ immer so wählen, dass die Polarebenen $p'p''$ nicht durch N gehen, und dass also auch γ nicht durch N geht.

Liegen dreimal zwei Punkte mit P in einer Geraden, so ist damit die Polarebene des Punktes P unmittelbar gegeben, und damit je ein vierter Punkt der Fläche in jeder der Ebenen $e_1 e_2 e_3$. Liegen nur zweimal zwei Punkte mit P in einer Ebene, so liegen diese vier Punkte in einer Ebene. Dieser Fall, dass vier der gegebenen Punkte in einer Ebene liegen, soll noch allgemein hier besprochen werden.

Liegen in der Ebene e_1 die vier Punkte $M_{11}\,M_{12}\,M_{13}\,M_{14}$, so legen wir durch drei weitere Punkte $M_{21}\,M_{22}\,M_{23}$ die Ebene e_2 und durch die Punkte $M_{31}\,M_{32}\,M_{23}$ die Ebene e_3. Der Kegelschnittbüschel $M_{11}\,M_{12}\,M_{13}\,M_{14}$ bestimmt in e_2 mit $M_{21}\,M_{22}\,M_{23}$ einen Büschel und durch den vierten Grundpunkt dieses Büschels einen vierten Punkt M_{24} der Fläche, in e_3 bestimmt derselbe Büschel $M_{11}\,..\,M_{14}$ mit $M_{31}\,M_{32}\,M_{23}$ einen Büschel und somit einen vierten Punkt M_{33} als vierten Grundpunkt des Büschels. Dem Punkte P sei für den in e_1 gelegenen Büschel der Punkt N_1, für den in der Ebene e_2 gelegenen Büschel der Punkt N_2, für den in der Ebene e_3 gelegenen Büschel der Punkt N_3 conjugirt. Dann ist die Ebene $N_1 N_2 N_3$ die Polarebene von P für die gesuchte Fläche, und diese ist dadurch bestimmt. Liegen jedoch $N_1 N_2 N_3$ in einer Geraden, so ist die Polarebene nicht bestimmt. Dann bestimmt ein Kegelschnitt K_1 des Büschels in e_1 einen Kegelschnitt K_2 des Büschels in e_2 und einen Kegelschnitt K_3 des Büschels in e_3. $K_2 K_3$ schneiden sich in M_{23}. M sei der zweite Schnittpunkt von K_2 mit α_1, M' der zweite Schnittpunkt von K_3 mit α_1, so sind MM' einander projectivisch angeordnet. Ein sich selbst entsprechender Punkt der projectiven Reihen ist P, er

gehört im Allgemeinen nicht zur Fläche. Der zweite sich selbst entsprechende linear construirbare Punkt ist ein Punkt der Fläche und bestimmt von ihr drei Kegelschnitte. Fällt M stets mit M' zusammen, so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung durch die neun Punkte, sie liegen auf einer Curve vierter Ordnung erster Species.

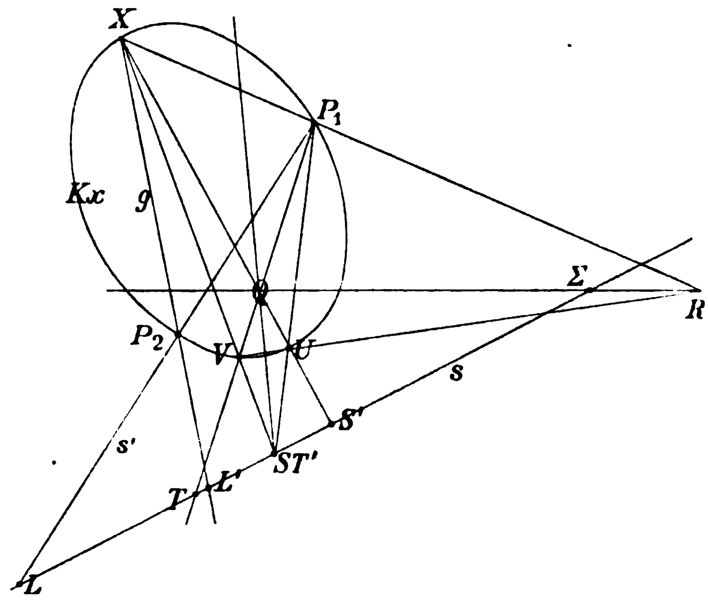
Die Einfachheit der im Satz V gegebenen Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten legt die Vermuthung nahe, dass auch andere Geometer, die sich mit dieser Aufgabe beschäftigt haben, auf diese Auflösung gekommen seien. Doch ist mir eine Publication dieser Lösung nicht zu Gesicht gekommen. Die mir bekannten Arbeiten über diesen Gegenstand, welche alle diese Construction nicht enthalten, stelle ich hier zusammen.

Im Jahre 1881 hat R. Heger in einer Monographie: »Die Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten und verwandte Constructionen. Leipzig bei Fues« die wichtigsten Lösungen der Aufgabe zusammengestellt. Dort sind angeführt zuerst die Hesse'sche Construction in Crelle's Journal, die schon im Eingang dieser Abhandlung erwähnt wurde. Dann die Construction von Seydewitz mittels reciproker Bündel (Seydewitz in Grunert's Archiv für Math. und Phys. Theil 9. 1847). Ferner eine Construction von Chasles (Comptes rendus des séances de l'ac. d. sciences 24. Dec. 1855). Dass diese Construction linear ist, hat Heger in Schlömilch's Zeitschrift 25. Jahrgang gezeigt. Weiter ist eine Lösung des Problems durch v. Staudt (Geometrie der Lage, Nürnberg 1850, 1857, 1860) angeführt, und eine Lösung von Reye (Geometrie der Lage), die die Raumcurven dritter Ordnung benutzt. Endlich wird eine Construction von Schröter (Crelle's Journal B. 62. 1863) gebracht.

Von späteren Bearbeitungen des Problems sind mir bekannt geworden die Arbeiten von Piquet im 73. und 79. Bande des Crelle'schen Journals, von Hossfeld »Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind«, Schlömilch's Zeitschrift Jahrgang XXXIII 1888 und eine Dissertation von Diesing, Jena 1887.

Nachträgliche Bemerkung. Die Schlussweise auf den Seiten 549, 550 lassen sich erheblich vereinfachen, und es giebt auch dann unendlich viele Flächen durch die neun Punkte, wenn γ durch P geht.

Es mag gestattet sein, hier noch eine Bemerkung aus der Geometrie der Kegelschnitte anzuschliessen. — Auf einer Geraden s liegen zwei projective Punktreihen, $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ Projicirt man die Reihe $ABC\ldots$ von einem Punkte P_1 durch den Strahlenbüschel $P_1(ABC\ldots)$, die zweite von einem Punkte X der Geraden g, welche s in L' schneidet durch den Büschel $X(A'B'C'\ldots)$, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen dieser Büschel in einem Kegelschnitte K_x. Lässt man X auf der Geraden g laufen, so erhält man eine Reihe von Kegelschnitten,



welche durch zwei feste Punkte gehen, nämlich durch P_1 und den Punkt P_2 auf g, welcher durch den Strahl P_1L bestimmt wird, wenn L der dem Punkte L' der Reihe $A'B'C'\ldots$ entsprechende Punkt der Reihe $ABC\ldots$ ist. Besitzen die projectiven Punktreihen reelle sich selbst entsprechende Punkte, etwa $P_3 P_4$, so ist es selbstverständlich, dass auch diese auf dem Kegelschnitt K_x liegen, und dass die Reihe einen Büschel mit den Grundpunkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ bildet. Giebt es aber keine (reellen) sich selbst entsprechenden Punkte, so ist es vom Standpunkt der reinen (synthetischen) Geometrie nicht ohne Weiteres klar,

dass die Kegelschnittreihe einen Büschel bildet, für den die Gerade s eine allen Individuen des Büschels gemeinsame ideale Sehne ist, die mit der $P_1 P_2$ verbindenden Geraden s' zusammen ein Paar bildet. Es lässt sich dies aber wie folgt erweisen:

Dem Punkte T der Reihe $ABC\ldots$ entspreche der Punkt T' der Reihe $A'B'C'\ldots$, als Punkt der ersten Reihe werde T' mit S bezeichnet, und ihm entspreche in der zweiten Reihe der Punkt S'. Die Punkte S und T' fallen zusammen. Der Strahl $P_1 S$ und XS' schneiden sich in U auf K_x, $P_1 T$ und XT' (XS) in V auf K_x, $P_1 V$ und XU schneiden sich in Q, $P_1 X$ und UV in R, QR gehe durch den Punkt Σ auf s. Dann sind die Strahlen $Q\Sigma R$, QUS', QS, QVT und also die Punkte $\Sigma S' S T$ harmonische, nach bekannten Vierecksätzen. Die Polare von S in Bezug auf K_x ist QR und also sind $S\Sigma$ für diesen Kegelschnitt conjugirte Punkte. Aendert man die Lage von X auf g, so bleiben TSS' fest und also bleibt auch Σ fest als vierter harmonischer Punkt zu den dreien. $S\Sigma$ sind deshalb für alle Kegelschnitte K_x conjugirte Punkte. Da S auf s willkürlich gewählt wurde, so folgt daraus, dass auf s ein Paar von Punkten, die für einen Kegelschnitt K_x conjugirt sind, es für alle Kegelschnitte der Reihe sind, dass s eine (ideale) gemeinsame Sehne der Reihe ist. Eine zweite gemeinsame Sehne ist s', und da sich $s s'$ nicht in einem gemeinsamen Punkte der Curven K_x schneiden, so bilden sie ein Paar, die Kegelschnitte bilden einen Büschel. — Hieraus schliesst man noch, dass man eine Punktinvolution erhält, wenn man in zwei projectiven Reihen auf einer Geraden zu einem Punkte S als Punkt der ersten Reihe den entsprechenden Punkt S' der zweiten Reihe bestimmt, dann zum Punkte S als Punkt der zweiten Reihe den entsprechenden Punkt T der ersten Reihe, und endlich den Punkt Σ so bestimmt, dass $TSS'\Sigma$ vier harmonische Punkte sind. S und Σ bilden ein Paar der Involution, und diese ist durch die gegebene Projectivität völlig bestimmt.

Jena 1892.

Leuckart, *Ueber die Speicheldrüsen der Hirudineen.*

Durch Leydig's Untersuchungen ist der Nachweis geliefert, dass der von Brandt bei dem medicinischen Blutegel entdeckte Speichelapparat aus einzelligen Drüsen besteht und unter den Hirudineen eine weite Verbreitung hat. Ueber das Verhalten der Ausführungsgänge und die Ausmündung derselben besonders bei den Kieferegeln ist aber bis jetzt erst Weniges bekannt geworden. Und auch dieses Wenige stützt sich mehr auf Vermuthungen, als auf directe Beobachtung.

Die Lücke, die unsere Kenntnisse in dieser Hinsicht aufweisen, ist um so fühlbarer, als es für den Zootomen kaum zweifelhaft sein konnte, dass der durch Haykraf's Experimentaluntersuchungen im Vorderkörper unseres medicinischen Blutegels nachgewiesene Extractivstoff, welcher die Gerinnbarkeit des Blutes aufhebt und das lange Nachbluten der Blutegelbisse erklärt, nur das Secret der Speicheldrüsen sei.

Dass diese Annahme völlig berechtigt ist, geht aus den Beobachtungen hervor, die der Vortragende über die Ausmündung der Speicheldrüsen bei dem medicinischen Blutegel nicht bloss, sondern auch bei Haemadipsa und Aulastomum angestellt hat und in Kürze ausführlich veröffentlichen wird.

Die Ausführungsgänge der einzelligen Speicheldrüsen laufen bei diesen Würmern sämmtlich nach vorn und sammeln sich allmählich in drei dicke Stränge, die der Innenseite der drei langen Abductoren der Kiefer sich anlegen, so dass sie leicht für Theile der Muskeln gehalten werden könnten — wie das in der That auch geschehen ist —, wenn sie nicht durch ihr körniges Aussehen und ihre histologische Beschaffenheit ihre wahre Natur

zu erkennen gäben. Mit den Abductoren nun treten diese Stränge je in die Substanz der Kiefer ein, um dann alsbald fächerförmig in eine mehr oder minder grosse Zahl von Zügen sich aufzulösen, die einzeln durch Quermuskelfasern von einander getrennt, auf die Zähne der Kieferfirste zulaufen. Die Zahl dieser Züge entspricht der Menge der Zähne; sie beträgt also bei Hirudo nahezu hundert, bei Aulastomum dagegen kaum ein Dutzend. Von früheren Forschern sind diese Züge gelegentlich für Muskelfasern gehalten, die zur Bewegung der Zähne dienen sollten, obwohl letztere doch fest in eine helle Cuticularschicht eingelagert sind und nur mit den Spitzen hervorragen.

Bevor die einzelnen Stränge nun aber die Wurzeln der Zähne berühren, spalten sich dieselben in zwei divergirende Hälften, die sich den Zwischenräumen der Zähne zuwenden, hier aber paarweise von vorn und von hinten zusammenstossen und dann durch eine gemeinschaftliche Oeffnung auf der Firste ausmünden. Die Mündung geschieht durch Hilfe eines besonderen kurzen und engen Ganges, dessen hinteres blindes Ende die pinselförmig einstrahlenden Drüsenröhrchen aufnimmt. Ist der Gang leer, dann hält es schwer, ihn durch die Cuticulardecke der Kieferfirste hindurch zu verfolgen, während sein blindes, in die Substanzmasse der Kiefer eingesenktes Ende meist deutlich hervortritt.

Die vorstehend geschilderten Organisationsverhältnisse erlauben es also, die von den Kiefern geschnittene Wunde alsbald auch mit dem Secrete der Speicheldrüsen zu befeuchten.

Wo die Kiefer fehlen, wie bei Nephelis, da wird der Speicheldrüsenapparat völlig vermisst, während der sog. Pferdeegel (Aulastomum) ihn, wenn auch in schwächerer Entwickelung als Hirudo oder gar Haemadipsa, deren Speicheldrüsen sich nach hinten weit über den Cardiacaltheil des Magens hinaus fortsetzen, besitzt. Da Aulastomum nicht Blut saugt, sondern Regenwürmer und dergleichen Thiere in toto verschlingt, liegt die Vermuthung nahe, dass die Function der Speicheldrüsen nicht bloss und ausschliesslich darin bestehe, das aufgenommene Blut flüssig zu erhalten.

Diese Vermuthung wird noch dadurch gestützt, dass auch die Rüsselegel, die doch zum grossen Theile gleichfalls eine räuberische Lebensweise führen, mit einem mächtigen Speichelapparate versehen sind, wie das schon früher von Leydig für

Clepsine und Piscicola bemerkt ist. Der Vortragende kennt denselben namentlich vom Clepsine, bei der die röhrigen Ausführungsgänge der Drüsen, wiederum zu Strängen vereinigt, den Rüssel seiner ganzen Länge nach durchziehen, um schliesslich gruppenweise auf der Spitze desselben auszumünden. In Folge dessen wird also auch hier das Secret beim Einsenken des Rüssels direct in die Wunde übertragen. Der Rüssel dieser Würmer hat somit eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Giftzahn der Schlangen, eine Aehnlichkeit, die noch dadurch erhöht wird, dass die Ausführungsgänge der Speicheldrüsen, die vor ihrem Eintritt in die Rüsselwurzel strangartig zur Rechten und Linken des Oesophagus hinziehen, von einer Lage mächtiger Muskelfasern überzogen werden, die offenbar dazu bestimmt sind, den Inhalt der Ausführungsgänge nach aussen in derselben Weise hervorzupressen, wie das der Muskelüberzug der Giftdrüsen bei den Schlangen thut.

Zum Schlusse erwähnt der Vortragende noch die Thatsache, dass die Hirudineen in grosser, ja wahrscheinlich allgemeiner Verbreitung ausser den Speicheldrüsen noch Lippendrüsen besitzen, die gleichfalls eine ansehnliche Entwickelung zeigen und wie die Speicheldrüsen aus einzelnen Zellen bestehen, die ihr Secret durch mehr oder minder lange Röhren entweder direct in den vordern Theil der Mundhöhle (Kieferegel) oder in die nächste Umgebung der Mundöffnung (Rüsselegel) entleeren. Histologisch sind übrigens diese einzelligen Drüsen — und Gleiches gilt von den optischen, wie chemischen Eigenschaften ihres Secretes — von den Speicheldrüsen verschieden, dafür aber den in der Tiefe des Körpers sehr allgemein (besonders bei den Kieferegeln) vorhandenen Unterhautdrüsen nahezu identisch.

Sophus Lie, *Untersuchungen über Translationsflächen* (Abhandlung II).

Die nachstehende Arbeit zerfällt in drei Theile, unter denen der erste sich mit einer speciellen Classe von Translationsflächen beschäftigt, die beiden andern Theile behandeln verwandte wenn auch allgemeinere Probleme.

Unter den Ergebnissen dieser Arbeit sind mehrere schon früher in norwegischen Arbeiten veröffentlicht worden. Diese meine älteren Untersuchungen, die in schwer zugänglichen Schriften und grösstentheils in sehr knapper Form dargestellt sind, haben bis jetzt nicht die Beachtung gefunden, die sie verdienen. Indem ich sie im Folgenden in etwas ausführlicherer Redaction zusammenstelle, füge ich viele neue Bemerkungen hinzu.

Erster Theil.

Wir beschäftigen uns hier mit der Gleichung

$$(1) \qquad s = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$$

und ihren Integralflächen

$$(2) \qquad z = F(x) + \Phi(y) ,$$

deren jede in zwei Weisen durch *Translationsbewegung einer ebenen Curve* erzeugt werden kann.

Unter diesen Translationsflächen giebt es unbegrenzt viele *algebraische.* Sind nämlich $F(x)$ und $\Phi(y)$ beliebige algebraische Functionen ihrer Argumente, so stellt $z = F(x) + \Phi(y)$ immer

eine algebraische Fläche dar, und in dieser Weise erhält man alle algebraischen Integralflächen von $s = 0$; denn eine solche Fläche schneidet jede Ebene $x =$ Const. oder $y =$ Const. nach einer algebraischen Curve.

Die Frage nach allen algebraischen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ ist somit ein triviales Problem.

Ist eine gewundene Curve vorgelegt und in jedem Punkte derselben eine berührende Ebene, so giebt es immer eine ganz bestimmte Integralfläche, welche die von diesen Ebenen erzeugte Developpable längs dieser Curve berührt. Um dieselbe zu finden, denkt man sich am besten die laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Punktes unserer Curve als gegebene Functionen eines Parameters t und dementsprechend die Richtungscosinus X, Y, Z der betreffenden Ebenen ebenfalls als bekannte Functionen von t. Ist nun $z = F(x) + \Phi(y)$ die gesuchte Fläche und sind dementsprechend $F'(x)$, $\Phi'(y)$ und -1 Richtungscoefficienten der zugehörigen Normale, so bestehen längs der Curve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen

$$\frac{F'(\mathfrak{x})}{X} = \frac{\Phi'(\mathfrak{y})}{Y} = \frac{-1}{Z},$$

woraus folgt

$$-F'(\mathfrak{x}) = \frac{X}{Z}, \quad -\Phi'(\mathfrak{y}) = \frac{Y}{Z}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen bestimmen die unbekannten Grössen $F'(\mathfrak{x})$ und $\Phi'(\mathfrak{y})$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{y}$.

Zwei Quadraturen:

$$-F(\mathfrak{x}) = \int \frac{X}{Z} d\mathfrak{x}, \quad -\Phi(\mathfrak{y}) = \int \frac{Y}{Z} d\mathfrak{y}$$

geben uns sodann die Werthe von $F(x)$ und $\Phi(y)$ längs der gegegebenen Curve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, und da sowohl F wie Φ nur von einem Argumente abhängen, sind diese Functionen jetzt als bekannt zu betrachten.

Wünscht man daher die Integralfläche der Gleichung $s = 0$ zu finden, die eine gegebene Curve

$$x = \mathfrak{x}(t), \quad y = \mathfrak{y}(t), \quad z = \mathfrak{z}(t)$$

enthält und längs derselben diejenigen Ebenen berühren, deren Richtungscosinus die Werthe

$$\cos\alpha = X(t)\,,\quad \cos\beta = Y(t)\,,\quad \cos\gamma = Z(t)$$

besitzen, so berechnet man zuerst die Integrale

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)}\,d\mathfrak{x}(t)\,,\ \int \frac{Y(t)}{Z(t)}\,d\mathfrak{y}(t)$$

und drückt sodann das erste Integral mit Benutzung der Gleichung $x = \mathfrak{x}(t)$ *als Function von* x *aus:*

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)}\,d\mathfrak{x}(t) = F(x)$$

und dementsprechend das zweite Integral mit Benutzung der Gleichung $y = \mathfrak{y}(t)$ *als Function von* y *aus:*

$$\int \frac{Y(t)}{Z(t)}\,d\mathfrak{y}(t) = \Phi(y)\,;$$

alsdann ist

$$-z = F(x) + \Phi(y)$$

die gesuchte Fläche[1]).

Das Problem: diejenige Integralfläche zu finden, die eine gegebene Developpable längs einer gegebenen Curve berührt, bietet somit gar keine Schwierigkeit.

Sind insbesondere sowohl die vorgelegte Developpable wie die gegebene Curve *algebraisch*, so sind die Grössen $F(x)$ und $\Phi(y)$ ABEL'sche Integrale und somit im Allgemeinen transcendent.

Es stellt sich daher naturgemäss die Aufgabe: *Alle algebraischen Integralflächen von* $s = 0$ *zu finden, die in eine vorgelegte Developpable eingeschrieben sind.*

---

1) Setzen wir

$$x = u + iv\,,\quad y = u - iv\,,$$

so geht die Gleichung $s = 0$ über in die Gleichung der Functionentheorie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0\,. \tag{3}$$

Die von CAUCHY geschaffene und von RIEMANN und seinen Nachfolgern insbesondere C. NEUMANN und SCHWARZ ausgebildete Functionentheorie behandelt Fragen, die von den im Folgenden erledigten Problem grundverschieden sind, wenn sie auch für eine oberflächliche Betrachtung mit ihnen verwandt sind. In der Functionentheorie handelt es sich um die Auffindung einer Function $U + iV$ des imaginären Argumentes $u + iv$, deren reelle Theile U, V eo ipso die Gleichung (3) erfüllen und dabei längs einer Curve der uv-Ebene gegebene Werthe haben.

Die allgemeine Erledigung dieses schwierigen Problemes gab ich im norwegischen Archiv Bd. 4, 1879. Ich erlaube mir im Folgenden meine elegante Lösung, die bis jetzt, als erschienen in einer wenig verbreiteten Schrift den Mathematikern schwer zugänglich war, zu reproduciren.

1.

Ich werde zunächst zeigen, dass das Problem alle in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Flächen $z = F(x) + \Phi(y)$ zu finden, sich, sobald *eine* derartige Fläche gefunden ist, unmittelbar auf das einfachere Problem reducirt. alle algebraischen Flächen $z = F(x) + \Phi(y)$ zu finden, welche in einen vorgelegten algebraischen *Kegel* eingeschrieben sind. Die Tangentenebenen dieses Kegels sind dabei parallel mit den Ebenen der gegebenen Developpablen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erkannt man am schnellsten durch die folgende Betrachtung, die allerdings die ersten Elemente meiner Theorie der Berührungstransformationen als bekannt voraussetzt.

Es giebt eine ganz bestimmte Berührungstransformation, welche die Gleichung $s = 0$ invariant lässt, die Form

$$p' = p, \quad q' = q, \quad z' - p'x' - q'y' = F(p, q, z - px - qy)$$

besitzt und überdies eine beliebig gegebene Integralfläche von $s = 0$ in einen gegebenen Punkt des Raumes transformirt.

Wenden wir nun eine solche Berührungstransformation auf eine vorgelegte algebraische Developpable und eine eingeschriebene *algebraische* Integralfläche an, so verwandelt sich diese Integralfläche in einen Punkt, die algebraische Developpable in einen algebraischen Kegel und alle anderen eingeschriebenen algebraischen Integralflächen in algebraische Integralflächen, welche in den besprochenen Kegel eingeschrieben sind.

In mehr elementarer Weise erkennt man die Richtigkeit meiner Behauptung folgendermassen.

Es möge eine algebraische Developpable vorgelegt sein und die Richtungscosinus X, Y, Z ihrer Ebenen als algebraische Functionen eines Parameters dargestellt sein. Es seien ferner $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten der Punkte auf der Berührungscurve einer vorgelegten eingeschriebenen Integralfläche, und dementsprechend $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$, die entsprechenden Grössen für irgend eine

andere eingeschriebene algebraische Integralfläche. Wir betrachten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ als Functionen von t.

Die bekannte algebraische Integralfläche wird dargestellt durch

$$-z = \int \frac{X}{Z}\, d\mathfrak{x} + \int \frac{Y}{Z}\, d\mathfrak{y}$$

und dementsprechend die gesuchte Fläche durch

$$-z = \int \frac{X}{Z}\, d\mathfrak{x}_1 + \int \frac{Y}{Z}\, d\mathfrak{y}_1 .$$

Unsere Annahme, dass die erste Fläche algebraisch ist kommt darauf hinaus, dass die beiden Integrale

$$\int \frac{X}{Z}\, d\mathfrak{x}, \quad \int \frac{Y}{Z}\, d\mathfrak{y}$$

algebraische Functionen von t sind. Unsere Forderung, dass auch die neue Integralfläche algebraisch sein soll, läuft darauf hinaus, dass auch die beiden Integrale

$$\int \frac{X}{Z}\, d\mathfrak{x}_1, \quad \int \frac{Y}{Z}\, d\mathfrak{y}_1$$

algebraische Functionen von t sein sollen.

Setzen wir nun

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 = \xi, \quad \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1 = \eta, \quad \mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1 = \zeta,$$

so deckt sich diese Forderung damit, dass die Integrale

$$\int \frac{X}{Z}\, d\xi, \quad \int \frac{Y}{Z}\, d\eta$$

algebraische Functionen von t sein sollen.

Nun ist

$$X d\mathfrak{x}_1 + Y d\mathfrak{y}_1 + Z d\mathfrak{z}_1 = 0,$$
$$X d\mathfrak{x} + Y d\mathfrak{y} + Z d\mathfrak{z} = 0$$

und in Folge dessen:

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = 0 .$$

Ferner ist

$$X(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) + Y(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1) + Z(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1) = 0 = X\xi + Y\eta + Z\zeta,$$

indem jede Tangentialebenen unserer Developpable die zugehörige Gerade derselben enthält.

Endlich erfüllen die Richtungscoefficienten:

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 = \xi, \quad \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1 = \eta, \quad \mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1 = \zeta$$

der Geraden unserer Developpablen eine gewisse Relation:

$$0 = \Omega\left(\frac{\xi}{\zeta}\,\frac{\eta}{\zeta}\right).$$

Berücksichtigen wir daher, dass die Gleichungen

$$\frac{X}{\eta\,d\zeta - \zeta\,d\eta} = \frac{Y}{\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta} = \frac{Z}{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}$$

bestehen, so können wir unserem Probleme die folgende Gestalt geben:

Man soll drei Grössen ξ, η, ζ, welche eine gegebene homogene algebraische Relation erfüllen, in allgemeinster Weise als solche Functionen des Parameters t bestimmen, dass die beiden Integrale

$$\int \frac{\eta\,d\zeta - \zeta\,d\eta}{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}\,d\xi, \quad \int \frac{\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta}{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}\,d\eta$$

algebraische Functionen von t werden.

Unsre früheren Entwickelungen zeigen, dass dieses Problem darauf hinauskommt, *alle algebraischen Flächen*: $z = F(x) + \Phi(y)$ *zu finden, welche in einen vorgelegten algebraischen Kegel*

$$\Omega\left(\frac{x}{z}\,\frac{y}{z}\right) = 0$$

eingeschrieben sind.

2.

Wir zeigen jetzt, dass sobald *eine* algebraische Developpable vorgelegt ist, sich sogleich mindestens eine (bez. ∞^3) eingeschriebene algebraische Integralflächen angeben lassen. Gleichzeitig erkennen wir mit Berücksichtigung der Entwickelungen der vorhergehenden Nummer, dass sich unser ursprüngliches Problem erledigen lässt, sobald es für einen Kegel gelöst ist, dessen Tangentialebenen mit den Ebenen der gegebenen Developpablen parallel sind.

Die gegebene Developpable schneidet eine Ebene $y = b$ $=$ Const. nach einer Curve, deren Gleichungen wir uns auf die Form

$$(4) \qquad x = A_1(t)\,, \quad y = B_1(t) = b\,, \quad z = C_1(t)$$

gebracht denken. Unsere Developpable schneidet dementsprechend eine Ebene $x = a$ nach einer Curve, deren Gleichungen sein mögen

$$(5) \qquad x = A_2(\tau) = a\,, \quad y = B_2(\tau)\,, \quad z = C_2(\tau)\,.$$

Wir können dabei ohne Beschränkung annehmen, dass die Tangente im Punkte t der ersten Curve, die Tangente im Punkte $\tau = t$ der zweiten Curve schneidet. Dieser Schnittpunkt liegt selbstverständlich auf der Schnittlinie der beiden Ebenen $x = a$ und $y = b$. Die hier eingeführte Annahme kommt darauf hinaus dass die Determinante

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} A_1(t) - A_2(t) & B_1(t) - B_2(t) & C_1(t) - C_2(t) \\ dA_1(t) & dB_1(t) & dC_1(t) \\ dA_2(t) & dB_2(t) & dC_2(t) \end{vmatrix} = 0$$

für jeden Werth von t verschwindet. Der Leser übersieht, dass die Ebenen unsrer Developpablen die beiden ebenen Curven (4) und (5) jedesmal in Punkten berührt, für welche $t = \tau$ ist. Jeder Verbindungsgerade von zwei solchen zusammengehörenden Berührungspunkten ist daher eine geradlinige Erzeugende unserer Developpablen.

Ich behaupte nun, dass die Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(A_1 t + A_1 \tau) = \tfrac{1}{2}(A_1(t) + a) \\ y = \tfrac{1}{2}(B_1 t + B_2 \tau) = \tfrac{1}{2}(B_2(\tau) + b) \\ z = \tfrac{1}{2}(C_1 t + C_2 \tau) \end{cases}$$

eine algebraische Integralfläche darstellen, welche in unsre Developpable eingeschrieben ist.

Da die beiden ersten Gleichungen t als algebraische Function von x, τ als algebraische Function von y bestimmen, so leuchtet unmittelbar ein, dass unsre Gleichungen eine algebraische Integralfläche von $s = 0$ darstellen. Nun aber wird die Tangentialebene dieser Fläche in einem Punkte $t = \tau$ dargestellt durch die Gleichung

$$(8)\quad \begin{vmatrix} x-\frac{A_1t+A_2t}{2} & y-\frac{B_1t+B_2t}{2} & z-\frac{C_1t+C_2t}{2} \\ dA_1t & dB_1t & dC_1t \\ dA_2t & dB_2t & dC_2t \end{vmatrix} = 0\ ,$$

die wegen der Gleichung (6) sowohl durch die Substitution

$$x = A_1 t\ , \quad y = B_1 t\ , \quad z = C_1 t\ ,$$

wie durch die Substitution

$$x = A_2 t\ , \quad y = B_2 t\ , \quad z = C_2 t$$

identisch befriedigt wird. Diese Tangentialebene enthält somit diejenige Gerade unsrer Developpablen, welche dem Parameter t entspricht. Unsre Tangentialebene trifft andrerseits die beiden ebenen Curven (4) und (5) in zwei Punkten, deren Parameter t, τ jedesmal denselben Zahlenwerth haben. Da nun aber die zugehörige Tangente der ersten Curve die Richtungscoefficienten

$$dA_1t \quad dB_1t \quad dC_1t$$

und die Tangenten der zweiten Curve im Punkte $\tau = t$ die Richtungscoefficienten

$$dA_2t \quad dB_2t \quad dC_2t$$

besitzen, so leuchtet ein, dass diese beiden Tangenten mit der Tangentialebene (8) parallel sind, ja sogar in ihr enthalten sind.

Unsre Tangentialebene (8) der Integralfläche (7) berührt somit die beiden Curven (4) und (5) und fällt somit zusammen mit der Ebene t der gegebenen Developpablen.

Hiermit ist eine in die vorgelegte Developpable eingeschriebene algebraische Integralfläche gefunden. Da diese Fläche von den beiden Parametern a und b abhängt, so liefern die vorhergehenden Betrachtungen im Allgemeinen ∞^2 verschiedene Flächen.

Es ist überdies leicht, noch weitere eingeschriebene algebraische Integralflächen zu finden. Durch eine selbstverständliche Verallgemeinerung der vorangehenden Betrachtungen ergiebt sich nämlich, dass die Formeln:

$$(m+n)\,x = m A_1 t + n A_2 \tau$$
$$(m+n)\,y = m B_1 t + n B_2 \tau$$
$$(m+n)\,z = m C_1 t + n C_2 \tau$$

jedenfalls im Allgemeinen ∞^3 verschiedene eingeschriebene algebraische Integralflächen darstellen, welche von den drei Parametern a, b, $m : n$ abhängen.

3.

Unser allgemeines Problem führten wir darauf zurück, alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind. Es ist nun sehr merkwürdig, dass es uns, sogar durch sehr durchsichtige Betrachtungen gelingen wird, dieses reducirte Problem vollständig zu erledigen.

Wir denken uns also jetzt einen algebraischen Kegel (K) vorgelegt, dessen Ebenen mit den Ebenen der vorgelegten Developpablen (D) parallel sind. Um nun algebraische Integralflächen zu finden, welche in K eingeschrieben sind, benutze ich eine andere algebraische Developpable D', deren Ebenen ebenfalls mit den Ebenen von D parallel sind. Sodann construire ich nach den Regeln der Nummer 2 eine in D' eingeschriebene algebraische Integralfläche

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(A_1' t + A_2' \tau) = \tfrac{1}{2}(A_1' t + a) \\ y &= \tfrac{1}{2}(B_1' t + B_2' \tau) = \tfrac{1}{2}(B_2' \tau + b) \\ z &= \tfrac{1}{2}(C_1' t + C_2' \tau) . \end{aligned}$$

Sodann betrachte ich die Fläche

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A_1' t - A_2' \tau = A_1' t - a \\ y &= B_1' t - B_2' \tau = b - B_2' \tau \\ z &= C_1' t - C_2' \tau , \end{aligned} \right.$$

die offenbar wiederum eine *algebraische* Integralfläche ist. Die Tangentialebenen dieser Fläche längs der Curve $t = \beta$ / τ

$$0 = \begin{vmatrix} x - (A_1' t - A_2' t) & y - (B_1' t - B_2' t) & z - (C_1' t - C_2' t \\ d A_1' t & d B_1' t & d C_1' t \\ d A_2' t & d B_2' t & d C_2' t \end{vmatrix}$$

gehen offenbar sämmtlich durch den Coordinatenanfang, denn durch die Substitution $x = y = z = 0$ in die vorangehende Gleichung kommt die Relation

$$0 = \begin{vmatrix} A_1' t - A_2' t & B_1' t - B_2' t & C_1' t - C_2' t \\ d A_1' t & d B_1' t & d C_1' t \\ d A_2' t & d B_2' t & d C_2' t \end{vmatrix}$$

die (vgl. (6)) identisch besteht. Ueberdies leuchtet ein, dass unsre ∞^1 Tangentialebenen mit den ∞^1 Tangentialebenen

$$0 = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2}(A_1' t + A_2' t) & y - \frac{1}{2}(B_1' t + B_2' t) & z - \frac{1}{2}(C_1' t + C_2' t \\ d A_1' t & d B_1' t & d C_1' t \\ d A_2' t & d B_2' t & d C_2' t \end{vmatrix}$$

der Fläche (7) längs ihrer Curve $t = \tau$ parallel sind. Also sind sie auch parallel mit den Ebenen der Developpablen D' (oder D).

Es liefern daher die Gleichungen (9) eine algebraische Integralfläche, welche eingeschrieben ist in den Kegel K. Und indem man alle algebraischen Developpablen D' nimmt, deren Ebenen mit D's Ebenen parallel sind, erhält man jedenfalls ∞^ν algebraische Integralflächen, welche in den Kegel K eingeschrieben sind.

Es stellt sich jetzt mit Nothwendigkeit die Frage, ob wir in dieser Weise alle in K eingeschriebenen algebraischen Integralflächen erhalten.

Diese Frage beantworten wir folgendermassen. Seien

$$\begin{aligned} x &= A_1 t - A_2 \tau \\ y &= B_1 t - B_2 \tau \\ z &= \Gamma_1 t - \Gamma_2 \tau \end{aligned}$$

die Gleichungen einer ganz beliebigen algebraischen in K längs der Curve $\tau = t$ eingeschriebenen Integralfläche. Dann stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(A_1 t + A_2 \tau) \\ y &= \tfrac{1}{2}(B_1 t + B_2 \tau) \\ z &= \tfrac{1}{2}(\Gamma_1 t + \Gamma_2 \tau) \end{aligned}$$

eine Integralfläche dar, welche algebraisch ist und längs ihrer Curve $t = \tau$ eine algebraische Developpable berührt, deren Ebenen mit den Ebenen unseres Kegels parallel sind.

Die Operationen dieser Nummer geben daher alle in einen algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen.

Durch Verbindung von den Ergebnissen der drei vorangehenden Nummern erhalten wir das folgende merkwürdige

Theorem. *Ist eine beliebige algebraische Developpable D vorgelegt, so ist es möglich, alle in sie eingeschriebenen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ zu finden. Zu diesem Zwecke construirt man zuerst nach den Regeln der Nummer* 1. *eine in D eingeschriebene algebraische Integralfläche, sodann eine algebraische Integralfläche F', welche in einen algebraischen Kegel K' mit parallelen Ebenen eingeschrieben ist. Indem man sodann die Flächen F und F' nach den früher angegebenen Regeln verbindet, erhält man eine und zwar die allgemeinste Integralfläche, welche die gestellten Forderungen erfüllt.*

4.

Die vorhergehenden Entwickelungen beruhen im Grunde auf meinen Untersuchungen über Berührungstransformationen.

Da ich gefunden habe, dass jede Monge-Ampère'sche Gleichung, mit zwei intermediären Integralen für jede Charakteristik, durch Berührungstransformation die Form $s = 0$ erhalten kann, so dehnt sich die vorhergehende Theorie ohne weiteres auf eine grosse Kategorie von partiellen Differentialgleichungen aus.

Hierauf gehe ich bei dieser Gelegenheit nicht näher ein. Dagegen dürfte es nothwendig sein ausdrücklich hervorzuheben, dass meine Theorie der Functionengruppen wirklich alle Berührungstransformationen liefert, welche eine vorgelegte Monge-Ampère'sche Gleichung mit vollständigen intermediären Integralen invariant lassen.

Liegt insbesondere die Gleichung $s = 0$ vor, so sind

$$p - f(x) = 0 \quad \text{und} \quad q - \varphi(y) = 0$$

die zugehörigen intermediären Integrale. Setzen wir nun

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

$$p = -\frac{p_1}{p_3} \quad q = -\frac{p_2}{p_3},$$

so gehören unsre intermediären Integrale zu den Functionengruppen

$$p_1\, x_1\, p_3 \quad \text{und} \quad p_2\, x_2\, p_3\,.$$

Die gesuchten Berührungstransformationen bilden eine unendliche Gruppe, welche alle Berührungstransformationen umfasst, die entweder unsre beiden Functionengruppen invariant lassen oder diese Gruppen vertauschen.

Diese unendliche Gruppe enthält eine continuirliche Untergruppe, die man findet, indem man canonische Formen

$$X_1\ P_1\ X_3 \qquad X_2\ P_2\ X_3$$

unsrer reciproken Gruppen sucht und sodann

$$x_k' = X_k \quad p_k' = P_k$$

setzt. Hierzu kommt

$$x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_3'$$
$$p_1 = p_2', \quad p_2 = p_1', \quad p_3 = p_3' .$$

Besitzt eine Monge-Ampère'sche Gleichung zwei intermediäre Integrale X_1, X_2, die in Involution liegen und zu derselben Charakteristik gehören, so giebt es ein drittes derartiges Integral X_3. Dann bestimmen Gleichungen von der Form

$$x_k' = F_k(X_1\, X_2\, X_3)$$

die allgemeinste Berührungstransformation, welche unsre Gleichung invariant lassen.

Die von Herrn Vivanti in neuerer Zeit angestellten Untersuchungen über Berührungstransformationen subsumiren sich als *ganz specielle* Fälle unter meinen älteren allgemeinen Theorien.

Theil II.

Unter den partiellen Differentialgleichungen giebt es gewiss keine, die ein grösseres Interesse darbietet, als die Gleichung der Functionentheorie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 .$$

Es ist längst bemerkt worden, dass diese Gleichung durch Einführung der unabhängigen Veränderlichen

$$x = u + iv\,, \quad y = u - iv$$

die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0 = s$$

erhält und somit die Integralgleichung

$$z = F(x) + \Phi(y) = F(u + iv) + \Phi(u - iv)$$

besitzt.

Die vielseitigen Untersuchungen der Functionentheoretiker über diese Gleichung sind jetzt allgemein bekannt und haben in neuerer Zeit merkwürdige Untersuchungsrichtungen geschaffen, die sich überhaupt auf LAPLACE's lineare Differentialgleichungen beziehen: ich denke hier einerseits an DARBOUX's andrerseits an PICARD's schöne Untersuchungen.

In norwegischen Zeitschriften habe ich selbst im Laufe der Jahre einige originale Untersuchungen über lineare partielle Differentialgleichungen veröffentlicht, welche gewiss mehr Aufmerksamkeit verdienen, als sie bis jetzt gefunden haben.

So veröffentlichte ich z. B. im Jahre 1881 im sechsten Bande des norwegischen Archivs eine Transformationstheorie der linearen partiellen Differentialgleichungen

$$A(xy)r + B(xy)s + Ct + Dp + Eq + Fz = 0\,,$$

präciser gesagt, ich bestimmte alle derartigen Gleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten, und reducirte gleichzeitig alle diese Gleichungen auf canonische Formen. Diese meine Arbeiten lieferten u. A. den Ausgangspunkt für DARBOUX's und APPEL's bemerkenswerthe Untersuchungen über die beiden Gleichungen

$$s + \frac{A}{x-y}\cdot q + \frac{B}{(x-y)^2}\cdot z = 0$$

und

$$r + q = 0\,.$$

DARBOUX's und APPEL's Arbeiten über diese Gleichungen erschienen in den Jahren 1882, 1883 und 1892[1]).

---

1) Herr APPEL hat neuerdigs darauf hingewiesen, dass lineare Differentialgleichungen

$$y^{(r)} + X_{r-1}(x)\,y^{(r-1)} + \cdots Xy = 0\,,$$

die eine infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy)\,\frac{\partial y}{\partial f}$$

gestatten, in lineare Gleichungen mit *constanten* Coefficienten transformirt werden können. Ich erlaube mir hervorzuheben, dass diese interessante Bemerkung von *mir* herrührt.

Meine Theorie der Functionengruppen gab mir ferner eine ganz neue und *vollständige* Classification aller partiellen Differentialgleichungen

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0\,,$$

die ein oder mehrere intermediäre Integrale erster Ordnung besitzen. Hierdurch wurden einerseits bekannte Untersuchungen von AMPÈRE und IMSCHENETSKY nicht allein *vereinfacht*, sondern auch *vervollständigt* und *verallgemeinert*. Auf diese meine Classification, die sich übrigens auf n Dimensionen ausdehnt, begründete ich bemerkenswerthe neue Integrationsmethoden für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die intermediäre Integrale *erster* Ordnung besitzen[2]. Besonders wichtig ist meine Theorie derjenigen MONGE-AMPÈRE'schen Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei verschiedenen Charakteristiken, welche für jede Charakteristik zwei intermediäre Integrale besitzen. Es ergab sich, dass es zur Integration einer solchen Gleichung zweiter Ordnung hinreicht, für jede Charakteristik *ein* intermediäres Integral erster Ordnung zu finden; sind solche Integrale gefunden, so genügt es, eine Anzahl Quadraturen auszuführen.

Ich habe dieses Beispiel herangezogen, um die Unrichtigkeit einer Ansicht zu illustriren, die neuerdings in einer Schrift eines sehr hervorragenden Mathematikers hervorgetreten ist. In dieser Schrift wird u. A. etwa gesagt, dass auf Transformationstheorien sich keine wesentlich neuen Integrationsmethoden gründen lassen. Ich habe eine entgegengesetzte Ansicht. Meine Integrationstheorie der MONGE-AMPÈRE'schen Gleichung mit zwei intermediären Integralen für jede Charakteristik beruht auf meiner Theorie der Berührungstransformationen, und Niemand wird leugnen, dass diese meine Integrationstheorie neu ist und wesentlich mehr leistet als die älteren Theorien leisten konnten.

Ich behalte mir vor, auf diesen Punkt bei einer anderen Gelegenheit tiefer einzugehen. Nach meiner Ansicht liegt *die*

---

1) Meine (Seite 571) besprochene Arbeit aus dem Jahre 1881 giebt vereinigt mit meinen Untersuchungen über Differentialinvarianten die Grundlage für eine *vollständige Transformationstheorie* der linearen partiellen Differentialgleichungen. Beiträge zu dieser Theorie hat besonders DARBOUX geliefert. Mit einigen hierher gehörigen Fragen beschäftigte sich PFANNENSTIEL im Jahre 1882.

2) Diese Untersuchungen sind bis jetzt nur theilweise veröffentlicht.

fundamentale Bedeutung meiner Gruppentheorie in erster Linie darin, dass sich auf sie neue Integrationstheorien gründen lassen. Nicht allein meine eigenen Untersuchungen, sondern auch die schönen Arbeiten von HALPHEN, PICARD und VESSIOT geben Beispiele für die Richtigkeit meiner Auffassung.

Hoffentlich wird es mir einmal gelingen, eine vollständige *Classification aller Monge-Ampère'schen Gleichungen* durchzuführen, welche eine endliche oder unendliche Gruppe von Berührungstransformationen gestatten. Dieses Problem ist schwer; ich glaube indess Methoden zu besitzen, die mir gestatten werden, es vollständig zu erledigen. Eine Reihe specieller Untersuchungen in dieser Richtung habe ich schon längst durchgeführt und auch theilweise veröffentlicht. Ist dieses Problem erledigt, so wird es möglich sein, eine vollständige *Invariantentheorie der Monge-Ampère'schen Gleichungen gegenüber allen Berührungstransformationen zu entwickeln.*

Selbstverständlich dehnen sich diese Gesichtspunkte auf andere Classen von partiellen Differentialgleichungen aus[1]).

RIBAUCOUR und BIANCHI gaben seinerzeit eine bemerkenswerthe Methode zur Ableitung neuer Flächen constanter Krümmung aus einer gegebenen derartigen Fläche. Ich habe später durch schwierige Untersuchungen streng bewiesen, dass man in dieser Weise durch fortgesetzte Operationen ∞^{∞} Flächen constanter Krümmung erhält. Merkwürdigerweise ist es der Aufmerksamkeit der Herren BIANCHI, DARBOUX und BÄCKLUND vollständig entgangen, dass ich hiermit einen ausserordentlich wichtigen Beitrag zu dieser Theorie geliefert habe. Die Bemerkung, dass die Anwendung dieser Methode auf die Rotationsfläche constanter Krümmung eine Reihe *Flächen constanter Krümmung mit algebraischen Krümmungslinien* liefert, gehört ebenfalls mir.

Im Uebrigen bemerke ich dass man die Bemerkung, dass man Orthogonalsysteme mit ∞^1 Flächen constanter Krümmung finden kann, die von einer arbiträren Function abhängen, mit einem Federstrich aus meinen Sätzen ableiten kann.

---

1) Giebt es partielle Differentialgleichungen $F(xyzpqrst) = 0$, welche eine unendliche Gruppe gestatten und die MONGE-AMPÈRE'sche Form nicht besitzen?

Theil III.

Das Problem alle Minimalflächen zu bestimmen kommt, wie bekannt, darauf hinaus, alle Flächen zu finden, deren Haupttangenten in jedem Punkte harmonisch hinsichtlich der beiden Tangenten liegen, die den Kugelkreis treffen.

Indem ich nun bemerkte, dass alle Geraden, die den Kugelkreis treffen, einen Liniencomplex bilden, sah ich mich schon längst[1]) dazu veranlasst, das folgende allgemeine Problem zu stellen:

Gegeben ist ein irreducibler oder zerfallener Liniencomplex. Es werden alle *Flächen* gesucht, welche in dem Sinne *hinsichtlich des Complexes conjugirt* sind, dass für jeden Punkt die Haupttangenten hinsichtlich zwei Complextangenten conjugirt sind.

Jedes derartiges Problem findet seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr + Ss + Tt = 0 .$$

Dieses allgemeine und hervorragend wichtige Problem ist in neuerer Zeit von mehreren Geometern aufs Neue formulirt worden. Demgegenüber erlaube ich mir festzustellen, dass es zuerst von mir aufgestellt worden ist. Soweit mir bekannt, bin ich der Einzige, der dieses Problem sogar für eine Reihe specieller Fälle gelöst habe.

Ich bemerkte zunächst, dass mein Problem, sobald der betreffende Liniencomplex aus allen *Treffgeraden einer ebenen Curve C* besteht, dadurch gelöst wird, dass man die Curve C ins Unendliche verlegt und sodann alle *Translationsflächen* construirt, deren erzeugende Curven dem besprochenen Liniencomplexe angehören.

Ich löste ferner mein allgemeines Problem für den *tetraedalen Liniencomplex*. Zu diesem Zwecke brachte ich die Gleichung des Kugelkreises auf die Form

$$(a-b)\,d\xi\,d\eta + (b-c)\,d\eta\,d\zeta + (c-a)\,d\zeta\,d\xi = 0 ,$$

setzte sodann

$$\text{(A)} \qquad \xi = \log x , \quad \eta = \log y , \quad \zeta = \log z$$

1) Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. Christiana 1877. Vgl. auch: Kurzes Resumé... Ges. d. W. zu Christiania 1872.

und erhielt so die Differentialgleichung

$$(a-b)z\,dx\,dy+(b-c)x\,dy\,dz+(c-a)y\,dz\,dx=0\ ,$$

welche mit der Gleichung

$$b\,dy(x\,dz-z\,dx)+c\,dz(y\,dx-x\,dy)+a\,dx(z\,dy-y\,dz)=0$$

äquivalent ist und somit einen Liniencomplex zweiten Grades, und zwar einen *tetraedralen Complex* darstellt. Ich fand nun, dass die Gleichung jeder Minimalfläche

$$\Omega(\xi\eta\zeta)=0$$

durch die Substitution (A) eine Fläche

$$\Omega(\log x,\ \log y,\ \log z)=0$$

liefert, welche hinsichtlich des betreffenden tetraedralen Complexes conjugirt ist. In dieser Weise fand ich alle Integralflächen der betreffenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nicht gleichzeitig dem singulären intermediären Integral genügen. Diese Flächen gestatten eine schöne geometrische Erzeugung, wie ich schon im Januar 1870 in den Göttinger Nachrichten angedeutet habe. Nimmt man nämlich zwei sich schneidende Curven c und k, deren Tangenten dem tetraedralen Complexe angehören und führt sodann auf c alle ∞^1 projective Transformationen aus, welche das Fundamentaltetraeder invariant lassen und dabei den Schnittpunkt der Curven c und k in irgend einen anderen auf k gelegenen Punkt überführen, so erzeugen die erhaltenen Curven eine Fläche, welche hinsichtlich unsres tetraedralen Complexes conjugirt ist. Diese Fläche enthält überdies ∞^1 Curven, welche mit k hinsichtlich des Fundamentaltetraeders projectiv sind.

Die hier gegebene geometrische Integration unsrer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bleibt noch gültig, wenn das Fundamentaltetraeder ein ausgeartetes ist.

Diese Flächenkategorien haben viele schöne geometrische Eigenschaften, die ich früher nur flüchtig angedeutet habe. Doch habe ich wiederholt hervorgehoben, dass die Haupttangentencurven dieser Flächen immer bestimmt werden können. Dies beruht darauf, dass auf jeder derartigen Fläche die beiden Schaaren Haupttangentencurven sowie die beiden Schaaren Curven, welche unsrem tetraedalen Complexe angehören, sogar

drei gemeinsame infinitesimale Transformationen gestatten. Liegt eine solche Fläche vor, so fallen überdies die beiden Quadraturen, welche zunächst zur Bestimmung der beiden zuletzt besprochenen Curvenschaaren erforderlich sind, einfach weg.

Indem wir uns nun wieder zu meinem allgemeinen Problem wenden, bemerke ich, dass ich dasselbe auch für den Fall gelöst habe, dass der Liniencomplex in einen allgemeinen linearen Complex und in einen speciellen linearen zerfällt, dabei vorausgesetzt, dass die Axe des speciellen Complexes dem allgemeinen linearen Complexe angehört. Ich erhielt[1] die Lösung dieses Problems, indem ich auf alle Minimalflächen meine schöne Berührungstransformation anwandte, welche die Minimalgeraden und die Punkte des Raumes in die Punkte und die Geraden eines linearen Complexes eines zweiten Raumes überführt. Bei dieser Berührungstransformation gehen die Minimalflächen über in Flächen, welche zu zwei linearen Complexen in der besprochenen Beziehung stehen.

Da ein tetraedaler Complex zerfallen kann in den Inbegriff aller Geraden, welche die eine unter zwei windschiefen Geraden schneiden, so konnte ich ebenfalls alle Flächen angeben, welche hinsichtlich eines Complexes conjugirt sind, die aus zwei speciellen linearen Complexen besteht. Wenn die Axen dieser beiden speciellen linearen Complexe sich schneiden, so erhält man die Integralflächen der Gleichung $s = 0$, welche übrigens direct aus den Minimalflächen hervorgehen, wenn der Kugelkreis in ein Geradenpaar zerfällt.

Für alle hier betrachteten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt das allgemeine Gesetz, dass auf jeder Integralfläche die beiden Schaaren von Haupttangentencurven und die beiden Schaaren von Complexcurven drei gemeinsame infinitesimale Transformationen gestatten.

Wendet man meine Berührungstransformation, welche Gerade in Kugeln umwandelt, auf mein früher besprochenes allgemeines Problem an, so erhält man ein äquivalentes ebenfalls wichtiges Problem, das ich folgendermassen formulire.

Ist ein *Kugelcomplex* vorgelegt, so wird eine vorgelegte Fläche in jedem Punkte von gewissen etwa m Kugeln des Com-

---

1) Vgl. meine Arbeit Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. Bd. 2, 1877, § 1.

plexes berührt. Liegen unter diesen m Kugeln jedesmal zwei harmonisch zu den beiden zugehörigen Krümmungskugeln der Fläche, so erfüllt diese Fläche eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen durch diese Eigenschaft definirt sind.

Meine obenstehenden Betrachtungen gestatten nun ohne weiteres, dieses allgemeine Problem für eine Reihe specieller Fälle zu erledigen.

Besteht der Complex aus lauter congruenten Kugeln, also aus Kugeln, deren Radius r durch die Gleichung

$$r^2 = a^2 = \text{Const.}$$

gegeben ist, so erhält man die partielle Differentialgleichung der Flächen constanter Krümmung.

Betrachtet man dagegen den zerfallenen Kugelcomplex, der aus allen Punkten und Ebenen des Raumes besteht, so erhält man die *partielle Differentialgleichung der Minimalflächen.*

Ich habe gezeigt, dass jede continuirliche Gruppe mehrere Reihen von Differentialinvarianten liefert.

Betrachtet man z. B. die endliche continuirliche Gruppe aller Bewegungen des Euklidischen Raumes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},$$

so kann man die zugehörigen Differentialinvarianten von Curven suchen. Bezeichnet man nun mit ϱ und τ den Krümmungsradius und Torsionsradius, sowie durch s die Bogenlänge, so sind

$$\varrho, \ \tau, \ \frac{d\varrho}{ds}, \ \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{d^2\varrho}{ds^2} \cdots$$

die gesuchten Differentialinvarianten. Meine allgemeine Integrationtheorie [1]) eines vollständigen Systems mit bekannten infini-

1) Herrn Goursat's Resultate hinsichtlich Curven des *vierfach* ausgedehnten Raumes, deren drei Krümmungen gegebene Functionen der Bogenlänge sind, waren früher von mir angegeben worden (vgl. Ges. d. W. zu Christiania, 1882).

tesimalen Transformationen erklärt die von Hoppe und mir erhaltenen Resultate hinsichtlich der Bestimmung aller Curven, deren Krümmung, Torsion und Bogenlänge durch eine oder zwei gegebene Relationen gebunden sind.

Sucht man andererseits die Differentialinvarianten der *Flächen* gegenüber der Euklidischen Bewegungsgruppe, so erhält man zunächst die beiden Hauptkrümmungsradien

$$R_1 \text{ und } R_2 ,$$

sodann, wie ich in meinen Vorlesungen immer hervorhebe, vier Grössen dritter Ordnung

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \quad \frac{d R_1}{d s_2} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_2} ;$$

in den soeben geschriebenen Formeln bedeuten s_1 und s_2 die Bogenlängen der Krümmungslinien.

Die einzigen, nicht singulären invarianten Differentialgleichungen sind die von Weingarten betrachteten Gleichungen

$$R_2 - \varphi(R_1) = 0 .$$

Es hat ein gewisses Interesse, diese Betrachtungen auf die Gruppe der Nichteuklidischen Bewegungen auszudehnen.

Wir denken uns also gegeben eine Fläche zweiten Grades im dreifachen Raume und ihre sechs projectiven infinitesimalen Transformationen aufgestellt.

Diese Gruppe liefert für Flächen zwei unabhängige Differentialinvarianten J, $\mathfrak{J}$ zweiter Ordnung, vier von dritter Ordnung, fünf von vierter Ordnung u. s. w.

Es ist nun leicht, diese Differentialinvarianten zu bestimmen oder jedenfalls begrifflich zu deuten.

Unsere Fläche zweiten Grades bestimmt eine Nichteuklidische Geometrie in dem von Riemann, Beltrami und Klein angegebenen Sinne. Dehnt man nun den Begriff Krümmungskugel auf diese Geometrie aus, wie Darboux näher ausgeführt hat, so hat jede Fläche in jedem Punkte zwei Krümmungskugeln. Andrerseits haben die Kugeln eine Invariante. Es lassen sich die Invarianten J und $\mathfrak{J}$ wählen als die Pseudokrümmungsradien unserer Fläche.

Die allgemeinste invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung, die nicht etwa singulär ist, hat daher die Form

$$\Omega(J\mathfrak{J}) = 0 .$$

Hierher gehört die Differentialgleichung aller Flächen, deren Haupttangenten hinsichtlich der Fläche zweiten Grades ein constantes Doppelverhältniss haben.

Hierher gehört andererseits eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen dadurch charakterisirt sind, dass ihre sämmtlichen Haupttangentencurven linearen Complexen angehören.

Die Entwickelungen des ersten Theiles dieser Abhandlung geben, mit dem Principe der Dualität verbunden, ein neues Resultat, das ein hervorragendes selbständiges Interesse darbietet:

Satz. *Ist eine beliebige algebraische Raumcurve vorgelegt, so giebt es* ∞^{∞} *hindurchgehende Integralflächen der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

welche algebraisch sind. Es ist immer möglich alle diese Flächen zu finden.

Der Beweis beruht darauf, dass die Gleichung $s = 0$ die dualistische Transformation gestattet.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1894.

Professor *August Leskien* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1894.

Hugo Berger in Leipzig.

Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.

Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.

—— *Berthold Delbrück* in Jena.

—— *Friedrich Delitzsch* in Leipzig.

—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.

—— *Georg Götz* in Jena.

—— *Albert Hauck* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.

Professor *Hubert Janitschek* in Leipzig.

—— *Friedrich Kluge* in Jena.

Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.

Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig.

Professor *Richard Meister* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *August von Miaskowski* in Leipzig.
—— —— *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Theodor Schreiber* in Leipzig.
—— *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— *Albert Socin* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.
—— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Georg Ebers* in München.
—— *Hans Georg Conon Frhr. von der Gabelentz* in Berlin.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Rath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
—— *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Müller* in Jena.
Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
—— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
—— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Friedrich Stohmann* in Leipzig.
—— *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Oberbergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Robert Behrend* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Ernst von Meyer* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
—— *Adalbert Krüger* in Kiel.
—— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.

Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1892.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1892 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1891. Berlin 1892.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1891, No. 41—53. 1892, No. 1—40. Berlin 1891. 92.

Preussische Staatsschriften aus der Regierungszeit König Friedrichs II. Im Auftrage der Kgl. Akademie d. Wissensch. herausgeg. v. *H. v. Sybel* und *G. Schmoller*. Bd. 8. Berlin 1892.

Acta Borussica. Denkmäler der Preussischen Staatsverwaltung im 18. Jahrhundert. Herausgeg. von der Kgl. Akademie d. Wissensch.: Die Preussische Seidenindustrie im 18. Jahrhundert und ihre Begründung durch Friedrich d. Gr. Bd. 1—3. Berlin 1892.

Koepp, Friedr., Ueber das Bildnis Alexanders des Grossen. Zweiundfünfzigstes Programm zum Winckelmannsfeste der Archäol. Gesellschaft. Berlin 1892.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XXIV, No. 19. 20. Jahrg. XXV, No. 1—18. Berlin 1891. 92.

Die Fortschritte der Physik im J. 1885. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 41, Abth. 1—3. Berlin 1891.

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1891 (Jahrg. 10). Berlin 1892.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 5 (Jahrg. 1891), No. 18—26. Bd. 6 (Jahrg. 1892), No. 1—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 16 (1891/92), No. 17. Berlin 1892.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen u. den Thüringischen Staaten. Bd. IX, H. 3. Bd. X, H. 3 (nebst Atlas), H. 4. — Abhandlungen der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt. N. F. H. 5—8 (nebst Karte). H. 11. 13. Berlin 1892.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1889/90. Berlin 1892.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 91—93. Register zu H. 61—90. Bonn 1892.

Kloos, Ueber die geologischen Verhältnisse des Untergrundes der Städte Braunschweig und Wolfenbüttel. Vortrag gehalten im Verein f. Naturwissenschaften zu Braunschweig. Braunschweig 1891.

Neunundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1891. Nebst Ergänzungsheft zum 69. Jahresbericht. Breslau 1892.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 9 (1891), I. Hälfte (= Abth. 1. 2). Chemnitz 1892.

Vorläufige Mittheilung der Beobachtungs-Ergebnisse von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. 1891, Dec. 1892, Jan.—Nov.

Schreiber, Paul, Resultate aus den i. J. 1891 angestellten meteorologischen Beobachtungen von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. Wetterbericht vom Dec. 1891—Nov. 1892 (in: Wissenschaftl. Beilage d. Leipz. Zeitung 1891/92).

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 8, H. 1. 2. (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens). Danzig 1892/93.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *V. Böhmert*. Jahrg. 37 (1891), H. 1—4. Jahrg. 38 (1892), H. 1. 2. Dresden 1892.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1891—92. Dresden 1892.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1891, Juli—December. Dresden 1892.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1892. Für d. Wintersem. 1892/93. Dresden 1892.

Festschrift zur fünfzigjährigen Stiftungsfeier der Pollichia, naturwissensch. Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1892.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 6. Düsseldorf 1892.

Tagebuch des Lieutenants Anton Voss, vornehmlich über den Krieg in Russland 1812. Bearbeitet von *Otto Redlich*. Herausgeg. vom Düsseldorfer Geschichtsverein. Düsseldorf 1891.

Redlich, Otto, Die Anwesenheit Napoleons I. in Düsseldorf 1811. Mit einer Kunstbeilage: Einzug Napoleons in die Stadt Düsseldorf. Herausgeg. vom Düsseldorfer Geschichtsverein. Düsseldorf 1892.

Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte u. Alterthumskunde von Erfurt. H. 15. Erfurt 1892.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 24 (1892). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1890/91. Frankfurt 1892.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausgeg. von *Ernst Huth*. Jahrg. 9, No. 1—12. Jahrg. 10, No. 1—4. (April 1891—Juli 1892.) Berlin d. J.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien u. Vereine aller Länder erscheinenden Einzelnarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausgeg. von *Ernst Huth* u. *Arthur Hering*. Jahrg. 5 (1891), No. 1—12. Jahrg. 6 (1892), No. 1—8. Berlin d. J.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1892. Freiberg d. J.

Achtundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft f. Natur- und Heilkunde. Giessen 1892.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen, Sommer 1892, Winter 1892/93; Personalbestand W. 1891/92, S. 1892. — *Riegel, Franz*, Die Lehre von der Herzirregularität und Incongruenz in der Thätigkeit der beiden Herzhälften (Gratulationsschrift) Giessen 1891. — *Siebeck, Herm.*, Beiträge zur Entstehungsgeschichte der neueren Psychologie (Progr.). Giessen 1891. — *Siebeck, Herm.*, Über die Lehre vom genetischen Fortschritte der Menschheit (Akad. Rede).— Giessen 1892. 28 Dissertationen vom J. 1891/92.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von *R. Jecht*. Bd. 67, H. 2. Bd. 68, H. 1. Görlitz 1891. 92.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 37, vom Jahre 1891. Göttingen d. J.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1891. No. 1—11. Göttingen d. J.

Astronomische Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. Herausgeg. v. *Wilh. Schur*. Th. 2. (Gedruckt auf Kosten der Kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen). Göttingen 1891.

Wilhelm Weber's Werke. Herausgeg. von d. Kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. 1. 2. Berlin 1892.

Pertsch, W., Die arabischen Handschriften in der herzogl. Bibliothek zu Gotha. Bd. 5. Gotha 1892.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1891/92. Grimma 1892.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXVII, No. 21—24, H. XXVIII, No. 1—20. Halle 1891. 92.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 17, H. 3. 4, Bd. 18, H. 1. Halle 1892.

Berichte über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle i. J. 1888—1891. Halle 1891/92.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 5. Folge Bd. 2, (d. ganzen Reihe 64. Bd.), H. 4—6. Bd. 3, (d. ganzen Reihe 65. Bd.), H. 3—5. Halle 1891. 92.

40. und 41. Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover f. d. Geschäftsjahre 1889/90 u. 1890/91. Hannover 1892.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 2, Heft 1. 2. Heidelberg 1892.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 4, H. 5. Heidelberg 1892.

Engler, C., Der Stein der Weisen (Festrede). Karlsruhe 1889. — *Schröder, Ernst*, Über das Zeichen (Festrede); das. 1890. — *Wiener, Cstph.* Die Freiheit des Willens (Festrede); das. 1891. — Programm der Technischen Hochschule in Karlsruhe f. 1892/93. — Festgabe zum Jubiläum der 40-jährigen Regierung des Grossherzogs von Baden. Karlsruhe 1892. — 39 Dissertationen a. d. J. 1870—92.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1890/91. 1891/92. Kiel 1892.—Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1891/92, Sommer 1892.— *Blass, Frdr.*, Die Entdeckungen auf d. Gebiete d. klassischen Philologie i. J. 1891. (Rede). Kiel 1892.— *Bruns, Ivo.*, De Dione Chrysostomo et Aristotele critica et exegetica (Progr.); das. 1892. — *Hänel, Alb.*, Das Kaiserthum (Rede); das. 1892. — *Lüdeling, G.*, Erdmagnetische Messungen im physikalischen Institut der Universität Kiel; das. 1891.— Porträts von 22 Professoren der Kieler Universität am Ende des vorigen Jahrhunderts; das. 1892. — 66 Dissertationen vom J. 1891/92.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1891, H. 1—12. Berlin 1892.

Reinke, J., Atlas deutscher Meeresalgen. Im Auftr. des K. Preuss. Ministeriums f. Landwirthschaft, Domänen u. Forsten herausg. im Interesse d. Fischerei von d. Commission z. wissensch. Untersuch. d. deutschen Meere. Heft 2, Lief. 3—5. Berlin 1892.

Publicationen der Kgl. Sternwarte in Kiel, hsg. v. *A. Krüger*. VII. (*Lamp, E.*, Der Brorsen'sche Comet. Th. 1). Kiel 1892.

Schriften des Naturwissenschaftl. Vereins f. Schleswig-Holstein. Bd. 2—7, Bd. 8, H. 1. Bd. 9, H. 2. Kiel 1877—92.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 32 (1891). Königsberg d. J.

Beiträge zur Naturkunde Preussens. Herausg. v. d. physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. 6. 7. Königsberg 1890.

Höhenschichten-Karte Ost- und Westpreussens. Section Bromberg-Marienwerder, Sect. Danzig, Sect. Königsberg. 3 Karten. — *Jentzsch*, Kurze Begleitworte zur Höhenschichten-Karte Ost- und Westpreussens. Herausg. v. d. physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg 1892.

Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. Jahrg. 26, H. 4. Jahrg. 27, H. 1—3. Leipzig 1891. 92.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. Abth. I. Catalog d. Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. u. 2° südl. Declin. f. d. Aequinoctium 1875. Stück 5: Zone +50° bis +55°, beobachtet auf der Sternwarte Cambridge, Mass. Leipzig 1892.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. 6, H. 3. Lübeck 1892.

Jahresbericht und Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1891. Magdeburg 1892.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1891 — Juli 1892. Meissen 1892.

Abhandlungen der histor. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 19 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 62. Bd.), Abth. 3. München 1891.

Abhandlungen d. philos.-philolog. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 19 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 64. Bd.), Abth. 2. München 1891.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1891, H. 3. Jahrg. 1892, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1891, H. 3—5. Jahrg. 1892, H. 1—3. München d. J.

Riezler, Sigmund, Gedächtnissrede auf Wilhelm v. Giesebrecht, gehalten i. d. öffentl. Sitzung d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München zur Vorfeier ihres 132. Stiftungstages am 21. März 1891. München. d. J.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Bd. 7 (1891), H. 2. 3. Bd. 8 (1892), H. 1. München 1892.

17. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1888. Münster 1889.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 8, Bog. 5—7. Bd. 9. Nürnberg 1892.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1888. 1891 Nürnberg 1889. 92.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1891. — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Jahrg. 1891. — Katalog der im Germanischen Museum befindl. Bronzeepitaphien des 15.—18. Jahrhunderts. — Katalog der i. Germ. Mus. befindl. Kunstdrechslerarbeiten des 16.—18. Jahrhunderts aus Elfenbein u. Holz. Nürnberg 1891.

29.—32. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins f. Naturkunde in den Vereinsjahren v. 2. Mai 1887—6. Mai 1891. Offenbach 1892.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 4—6. (1888—91). Posen d. J.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 7. Potsdam 1892.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Hsg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 1 (1892), H. 1. 2. Stuttgart d. J.

Mittheilungen des Vereins f. Kunst u. Alterthum in Ulm u. Oberschwaben. Heft 3. Ulm 1892.

Kapff, Reinhold, Deutsche Vornamen mit den von ihnen abstammenden Geschlechtsnamen sprachlich erläutert. Ulm 1889.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 45. Wiesbaden 1892.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1891, No. 1—9. Jahrg. 1892, No. 1—6. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 25, No. 6. 7. Bd. 26, No. 1—5. Würzburg d. J.

Oesterreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram). Svez. 6 1891. U Zagrebu d. J.

Djela Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Opera Academiae scient. et artium Slavorum meridionalium). XII. U Zagrebu 1892.

Monumenta spectantia historiam Sclavorum meridionalium. Vol. 22. Zagrabiae 1891.

Dvijestogodišnjica Oslobodjenja Slavonije. Izdala na svijet Jugoslavenska Akademija znatosti i umjetnosti. Dio 1. 2. U Zagrebu 1891.

Stari Pisci hrvatski. Knjiga 19. Na svijet izd. Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. U Zagrebu 1892.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knjiga 107—110. U Zagrebu 1891. 92.

Starine, na sviet izdaje Jugoslavenska Akademija znatosti i umjetnosti. Knjiga 24. 25. U Zagrebu 1891. 92.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina XIV, Br. 1. 3. U Zagrebu 1892.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1891—92-re. Budapest 1891. 92.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 8—9. Bd. 10, I. Hälfte. Berlin, Budapest 1891. 92.

Irodalomtörténeti Emlékek. Kiadja a Mag. tud. Akadémia irodalomtörténeti bizottsága. Kötet 2. Budapest 1890.

Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Kötet 14, sz. 4. 5. Köt. 15, sz. 1. Budapest 1891. 92.

Értekezések a nyelv- és széptudományok köréből, Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Kötet 15, sz. 6—10. Budapest 1890. 91.

Értekezések a társadalmi tudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Kötet 11, sz. 5. 6. Budapest 1891. 92.

Értekezések a természettudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia, Köt. 20, sz. 1—4. Köt. 21. sz. 1. 2. 4. Köt. 22, sz. 1—3. Budapest 1890—92.

Értekezések a történeti tudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia, Köt. 15, sz. 2—6. Budapest 1891. 92.

Archaeologiai Értesitő. A M. t. Akadémia arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatuak Köslönye. Köt. 10. sz. 3—5. Köt. 11. sz. 1—5. Köt. 12, sz. 1. 2. Budapest 1890—92.

Mathematikai és természettudomány Értesitő. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 8, Füz. 6—9. Köt. 9, Füz. 1—9. Köt. 10, Füz. 1—7. Budapest 1890—92.

Jelentés a Mag. tudom. Akad. munkálódásáról és pénztára állásáról 1883/84-ben. Budapest 1884.

Archaeologiai Közlemények. Kiadja a Mag. tud. Akadémia archaeologiai bizottsága. Köt. 16 (= Uj. folyam 13). Budapest 1890.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 24, sz. 1—10. Budapest 1890. 91.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 22, Füz. 1—4. Budapest 1890. 91.

Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. T. II, P. 2. Budapest 1890.

Nyelvemléktár. Régi magyar codexek és nyomtatványok. Kiadja a Mag. tud. Akadémia nyelvtudományi bizottsága. Köt. 14. Budapest 1890.

Rapport sur l'activité de l'Académie hongroise des sciences en 1891. Budapest 1891.

Ungarische Revue. Mit Unterstützung d. Ungar. Akad. d. Wissenscb. hsg. v. *P. Hunfalvy* u. *Gust. Heinrich.* Jahrg. 10 (1890). H. 5—10. Jahrg. 11 (1891), H. 1—10. Jahrg. 12 (1892), H. 1—5, Budapest 1890—92.

Acta et documenta historiam Gabrielis Bethlen Transsilvaniae principis illustrantia. Jussu et impensis Collegii hist. Academiae scient. Hung. ed. *Ant. Gindely*. Budapest 1890.

Codex diplomaticus Hungaricus Andegavensis. VI. Budapest 1891.

Magyarországi tanulók külfödön. II. Budapest 1892.

Balassa, József. A magyar nyelvjárások. Budapest. 1891.

Karácsonyi, János, Szent István király oklevelei. Budapest 1891.

Körösi, József, Megyei Monographiák. Köt. 1. Budapest 1891.

Munkácsi Bernát, Vogul népköltési gyüjtemény. Köt. 1. 2. Budapest 1892.

—— Votják szótár. Budapest 1890.

Simonyi, Zsigmond, A magyar határozók, II, 1. Budapest 1892.

Szilágyi, Sándor, Erdély és az északkeleti háború. Köt. 1. 2. Budapest 1890. 91.

Velics, Antal, Magyarvszági Török kincstári defterek. Kiadja a Mag. tud. Akad. Köt. 2. Budapest 1890.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1892, Winter-Sem. 1892/93. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1892/93.

Beiträge z. Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hsg. v. d. Histor. Vereine f. Steiermark. Jahrg. 24. Graz 1892.

Mittheilungen des Historischen Vereines f. Steiermark. Heft 40. Graz 1892.

Zeitschrift des Ferdinandeums f. Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. H. 34. 35. Innsbruck 1890. 91.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereins in Innsbruck. Jahrg. 19. (1889/90 1890/91). Innsbruck 1891.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1891, No. 10. Jahrg 1892, No. 1—9. Krakau d. J.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. (Editiones collegii historici Acad. litt. Cracov.). T. XII, Vol. 2. Cracoviae 1892.

Archivum do dziejów literaturyi oświaty w Polsce (Wydawnictwo Akad. w Krakowie). T. 7. W Krakowie 1892.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 4. Atlas: Tekst. Krákow 1891.

Biblijoteca pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej w Krakowie). IX—XXII. Krakowie 1890—92.

Collectanea ex archivo Collegii historici (Archivum Komisyi histor.) T. 6. Editionum Collegii hist. Acad. litt. Cracov. No. 47. Kraków 1891.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. T. XII. W Krakowie 1891.

Pamietnik Akademii umięjetności w Krakowie. Wydział filolog.-hist.-filozof. T. 8. Kraków 1890. — Wydział. matemat.-przyrodn. T. 18, zeszyt 1. 2. Kraków 1891. 92.

Rocznik zarządu Akademii umiej. w Krakowie. Rok 1889. W Krakowie 1890.

Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydziału filologicznego Akademii umiejetności. T. 14—16. W Krakowie 1891. 92. — Wydz. histor.-filoz. T. 25—29. W Krakowie 1891. 92. — Wydz. matemat.-przyrodn., T. 21—23. (Sec. II. T. 1—3). W Krakowie 1891. 92.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 4, zeszyt 4. T. 5, zesz. 1. 2. W Krakowie 1891. 92.

Sprawozdania komisyi fizograficznéj. T. 25—27. Kraków 1890—92.

Sprawozdania komisyi językowéj Akademii umiej. T. 4. W Krakowie 1894.

Zbiór wiadomości do antropologii krajowej, wydaw. stariniem komisyi antropolog. Akademii umiej. T. 14. Kraków 1890.

Kotula, Bolesl., Rozmieszczenie róslin naczyniowych w Tatrach (Distributio plantarum vasculosarum in montibus Tatricis). Kraków 1889—90.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 5, Abth. 1. 2. Laibach 1892.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 2. V Ljubljani 1892.

Abhandlungen der mathem.-naturwiss. Classe der böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 4. Prag 1892.

Abhandlungen der Classe f. Philos., Geschichte u. Philol. d. k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 4. Prag 1892.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften für das Jahr 1891. Prag 1892.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1891. — Philos.-histor. philolog. Classe. Jahrg. 1891. Prag d. J.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. Česk. Společnosti nauk v Praze. Číslo 6. V Praze 1891.

Bericht über die Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag im Jahr 1891. Prag 1892.

Astronomische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag in d. J. 1888—91. (Appendix z. Jahrg. 49—52). Hsg. v. *L. Weinek*. Prag 1893.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1891. Jahrg. 52. Prag 1892.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1892/93. — Ordnung d. Vorlesungen im Sommersem. 1892. Wintersem. 1892/93.

Statuten und Rechenschaftsbericht d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. Prag 1891. 92.

Mittheilungen der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag. Hsg. mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. Wien, Prag, Leipzig 1892.

Neuwirth, Jos., Geschichte der bildenden Kunst in Böhmen vom Tode Wenzels III. bis zu den Husitenkriegen. Dazu 57 Lichtdrucktafeln. Mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. Bd. 1. Prag 1893.

Mittheilungen des Vereins f. Geschichte d. Deutschen in Böhmen. Jahrg. 29. No. 1—4. Jahrg. 30, No. 1—4. Prag 1890—92.

Lotos. Jahrbuch f. Naturwissenschaft. Im Auftr. des Vereines »Lotos« herausgegeben. N. F. Bd. 12. 13. (der ganzen Reihe Bd. 40. 41). Prag 1892. 93.

Verhandlungen des Vereins f. Natur- u. Heilkunde zu Presburg. N. F. H. 7 (Jahrg. 1887—91). Presburg 1891.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 14 (1891), No. 12. Anno 15 (1892), No. 1—9. Spalato d. J.

Almanach d. kaiserl. Akad. d. Wissenschaften. Jahrg. 41 (1891). Wien d. J.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1891, No. 25—27. Jahrg. 1892, No. 1—23. — Philosoph.-histor. Classe. Jahrg. 1885—91. Jahrg. 92, No. 1—23. Wien 1886—92.

Archiv f. österreichische Geschichte. Hsg. v. der z. Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 77, H. 2. Wien 1891.

Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe, Bd. 58. Wien 1891. — Philos.-hist. Classe, Bd. 40. Wien 1892.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Classe. Bd. 100 (1891), Abth. I, Heft 1—7. Abth. II^a, Heft 1—7. Abth. II^b, Heft 1—7. Abth. III, Heft 1—7. — Philos.-histor. Register zu Bd. 111—120 (XII). Wien 1890. Bd. 124 (1891). Bd. 125 (1892). Wien d. J.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1887. Bd. 30 (N. F. Bd. 20). 1891. Bd. 34 (N. F. Bd. 24). Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1890 (Bd. 40), 1891 (Bd. 41), 1892 (Bd. 42), Quart. I. u. II. Wien d. J.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten der k. k. Gradmessungs-Commission: Bestimmung der Polhöhe und der Azimutes auf den Stationen Krakau, Jauerling u. St. Peter b. Klagenfurt. Ausgeführt von *W. Tinter*. Wien 1891. — Bd. III. Längenbestimmungen. Wien 1891.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Commission. Protokolle üb. die am 21. April u. 2. September abgehalt. Sitzungen. Wien 1892.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 6, No. 3. 4. Bd. 7, No. 1—3. Wien 1891. 92.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 17, H. (1). 2. Wien 1892.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1891 (Bd. 41), H. 2. 3. 1892 (Bd. 42), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1891, No. 15—18. 1892, No. 1—10. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 3. Wien 1891.

Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien. Hsg. v. *Norbert Herz*. Bd. 2. Wien 1892.

Belgien.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 46 (IV. Sér. T. 6). Anvers 1890. — Bulletin (IV. Série des Annales), II. Partie, No. 4—7. ib. 1891.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 1—7. 8, Fasc. 1. Louvain 1885—92.

Dänemark.

Fortegnelse over de af de Kong. Danske Videnskabernes Selskabs i tidsrummet 1742—1891 udgivne videnskabelige arbejder. Kjøbenhavn 1892.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1891, No. 2. 3. 1892, No. 1. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturv. og math. Afd. 6. Række. Bd. 5, No. 4. Bd. 7, No. 3—5. Kjøbenhavn 1891.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Societatis Reg. scientiar. Danicae. Ser. II, T. 2, I. Kjøbenhavn 1892.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 7, P. 5. 6. Cambridge 1892.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 15, P. 2. 3. Cambridge 1891/92.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 7. Dublin 1892.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 2, No. 2, Dublin 1892.

Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 29, P. 17—19. Dublin 1892.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 7, P. 3. 4. Dublin 1892.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 4, No. 9—13. Dublin 1891.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 18, [No. 4], p. 261—374. Edinburgh 1892.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 36. P. 2. 3. Edinburgh 1891. 92.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 11, P. 1 (Session 1890/91). Edinburgh 1892.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 6 (Session 1891/92). Liverpool 1892.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 13, P. 2 (No. 85). London 1892. R. Institution (List of the members) July 1891.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 50, No. 303—307. Vol. 51, No. 308—314. Vol. 52, No. 315. 316. London 1891. 92. — Exchange List of duplicates and deficiencies. London 1892.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1891. Vol. 182, A. B. London 1892. — The R. Society (List of the members) 30. Nov. 1891.

Catalogue of scientific papers. 1874—83. Vol. IX. Compiled by the R. Society of London. London 1891.

Memoirs of the London Astronomical Society. Vol. 50. London 1892.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 22, No. 421—429. Vol. 23, No. 430—440. 445—449. London 1891. 92.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1892, P. 1—6. — Charter and bye-laws. List of fellows 1892.

Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873—76. Deep-Sea Deposits. London 1891.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 5, No. 1. 2. Manchester 1891. 92.

The Manchester Museum, Owens College. Museum Handbooks: [I.] General Guide to the contents of the Museum (illustrated). Manchester 1892. [II.] Outline Classification of the animal kingdom. ib. 1891. [III.] *Marshall, A. M.* Descriptive Catalogue of the embryological models. ib. 1891.

Frankreich.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 27, (III. Sér. T. 7). Paris 1891.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Sér. T. 35—37. Lyon, Paris 1889—91.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 1. Marseille, Paris 1891.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la Section des lettres. T. 9, Fasc. 1. 2. — Mémoires de la Section de médecine. T. 6, Fasc. 2. — Mémoires de la Section des sciences. T. 11, Fasc. 2. Montpellier o. J.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Soc. des sciences naturelles de Strasbourg). T. 11, Fasc. 25 (Année 24. 1891). Paris 1892.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy. Année 3 (1891), No. 4—9. Année 4 (1892), No. 1. 2.

Comité international des poids et mesures. Quatorzième Rapport aux gouvernements signataires de la convention du mètre sur l'exercice de 1890. Paris 1891.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 19, No. 7. 8. T. 20, No. 1. 3—6. Paris 1892.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 16 (1892), 1—7. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Athenische Abtheilung. Bd. 16, H. 4. Bd. 17, H. 1—2. Athen 1892.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigt te Amsterdam, voor 1890. Amsterdam d. J.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XX. Amsterdam 1891. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XXIX. ib. 1892.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 8. Amsterdam 1892. Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 8, ib. 1891.

Catalogus van de boekerij der Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigt te Amsterdam. Eerste Verfolg. Amsterdam 1891.

Pascoli, *Joh.*, Veianus. Carmen in certamine Hœufftiano praemio aureo ornatum. Amstelodami 1892.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 7, Livr. 2—4. Leide 1892.

Die Triangulation von Java. Ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch-Ostindien. Abth. III. Im Auftrage des Ministeriums der Kolonien bearb. von *J. A. C. Oudemans*. Haag 1891.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 25, Livr. 5. T. 26, Livr. 1—3. Harlem 1892.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen te Haarlem vor het jaar 1889. 90. 91. — Naamlijst van directeuren en leden van de koll. maatsch. v. wetenschappen te Haarlem. 21 mei 1889. 91.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen. III. Verzameling. Deel 5, St. 2. Haarlem 1892.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 3, P. 7. Harlem 1892.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden over het jaar 1890/91. 1891/92. Leiden 1891. 92.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1891. 92. Leiden d. J.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. vanwege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 11 (N. R. 3), Afl. 1—4. Leiden 1892.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. II. Deel 6, Stuk 1. 2. Nijmegen 1892.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 16. Juni 1891. Utrecht d. J.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1892.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 16. Juni 1891. Utrecht d. J.

Kaiser, Otto, Die Funktionen der Ganglienzellen des Halsmarkes. Von der Utrechter Gesellschaft f. Kunst u. Wissensch. gekrönte Preisschrift. Haag 1891.

Very, Frank W., Prize Essay on the distribution of the moon's heat . . . . Publ. by the Utrecht Society of arts and sciences. The Hague 1891. Corrections. (1 Blatt).

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 13. 's Gravenhage 1892.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. No. 57. 58. III. Ser. No. 3 Utrecht 1891. 92.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks, II, 1. Utrecht 1892.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 144 (1891). No. 145—164. 166. 168 (1892). Firenze d. J.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 5 (1890), No. 5—12 e Indice alfabetico. Vol. 6 (1891), No. 12 e Indice alfabetico. Vol. 7 (1892), No. 13. 14. Roma d. J.

Monitore zoologico italiano. Anno 2 (1891), No. 12. Firenze d. J.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. 16 (Ser. III, Vol. 7), Fasc. 3. Vol. 17 (Ser. III, Vol. 8), Fasc. 1. Milano 1891. 92.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 24. Milano 1891.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. Ser. Vol. 7. Padova 1891.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 6 (1892), Fasc. 1—5, Palermo d. J.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 3, Fasc. 2—4. Vol. 4, Fasc. 1. 2. Perugia 1891. 92.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 6, Fasc. 3. Pisa 1892.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 7, adunanza del 18. Gennajo, 8. Marzo, 15. Novembre 1891, 17. Gennajo, 13. Marzo, 15. Maggio, 3. Luglio 1892.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie IV. Vol. 6, (1889). Roma 1890. — Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. IV, Vol. 6, P. I. Vol. 7, P. I. Vol. 8. P. I. Vol. 9, P. II. (Notizie degli scavi), 1891, Settembre-Dicembre. Vol. 10, P. II. (Notize degli scavi) 1892, Gennajo-Agosto. Roma 1891. 92. — Rendiconti. Ser. IV. Vol. 7, II. Sem., Fasc. 11. 12. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matemat. e naturali. Vol. 1 (1892), I. Sem., Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—10. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 1 (1892), Fasc. 1—9. Roma 1892. — Rendiconti dell' adunanza solenne del 5. giugno 1892. Roma d. J.

Al sommo Pontifice Leone XIII. Omaggio giubilare della Biblioteca Vaticana. Roma 1888.

Inventario degli libri stampati palatino-vaticani, ed. da *Enrico Stevenson*. Vol. 2, P. I. II. Roma 1886. 91.

Regestum Clementis Papae V., ed. cura et stud. monachorum Ord. S. Benedicti. Annus I—IX (T. 1—7). Romae 1885—88.

Statuti delle gabelle di Roma, pubblic. da *Sigismondo Malatesta*. (Biblioteca dell' Accademia storico-giuridica. Vol. 5). Roma 1886.

Ehrle, *Francisc.*, Historia bibliothecae Romanorum Pontificum tum Bonifatianae tum Avenionensis. T. 1 (Biblioteca dell' Accademia storico-giuridica. Vol. 7). Roma 1890.

دياطاسارون الذى جمعه ططيانوس من المبشرين الاربعة Tatiani Evangeliorum harmoniae arabice, ed. et translat. latina donav. *A. Ciasca*. Romae 1888.

Monumenta papyracea Aegyptia Bibliothecae Vaticanae, recens. et digess. *Horat. Marucchi*. Romae 1891.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico-Germanico. Sezione Romana). Bd. 6, H. 3. 4. Bd. 7, H. 1. 2. Rom 1891. 92.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia. Anno 1 (1891), II. Sem., Fasc. 3. 4. Anno 2 (1892), I. Sem. Fasc. 1. 2. Roma 1892.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 3, Fasc. 10. Supplemento. Vol. 4, Fasc. 1—8. Siena 1891. 92.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 27, Disp. 1—4. 7—15. Torino 1892.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1891 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1892.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VII. T. 2, Disp. 10. T. 3, Disp. 1—3. Venezia 1890—92.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 24. Venezia 1891.

Luxemburg.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 21. Luxembourg 1891.

Observations météorologiques, faites à Luxembourg par F. Reuter. Vol. 5. Luxembourg 1890.

Recueil des mémoires et des travaux publiés p. la Société Botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 2. 3. (1875—76). Luxembourg 1877.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucuresci-România. Anul 1, No. 1—4, 7—10. Bucaresci 1892.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1891, redig. u. bearb. v. *A. v. Oettingen*. Jahrg. 26, H. 1. Dorpat 1892.

Bericht über d. Ergebnisse d. Beobachtungen an den Regenstationen der Kaiserlichen, livländ. gemeinnützigen u. ökonom. Societät f. d. J. 1889—91. Dorpat 1892.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 18. Helsingforsiae 1892.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 33 (1890—91). Helsingfors 1891.

Fennia. Bulletins de la Société de géographie finlandaise. IV. V. Helsingfors 1891—92.

Finlands Geologiska Undersökning. Kartbladet 18—21, u. Beskrifning till Kartbl. 18—21. Helsingfors 1890—92.

Journal de la Société finno-ougrienne. Suomalais-ugrilaisen Seuran Aikakauskirja. T. 10. Helsingissä 1892.

Mémoires de la Société finno-ougrienne. II. (*Ahlqvist, Aug.*, Wogulisches Wörterverzeichnis). Helsingissä. III. (*Schlegel, G.*, La stèle funéraire du Teghin Giogh). Helsingissä 1891. 92.

Inscriptions de l'Orkhon. Recueillies par l'Expédition finnoise 1890 et publ. par la Société finno-ougrienne. Helsingfors 1892.

Universität Kasan. 14 Dissertationen a. d. J. 1888—92.

Universitetskija Izvěstija. God 31 (1891), No. 11. 12. God 32 (1892), No. 1—10. Kiev d. J.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1891, No. 2—4. Année 1892, No. 1. 2. Moscou d. J.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg T. 34, (Nouv. Série. T. 2), No. 3. 4. St.-Pétersbourg 1892.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 38, No. 4—9. 11—13. T. 39, P. 1. St.-Pétersbourg 1891. 92.

Repertorium f. Meteorologie, hsg. v. d. Kais. Akad. d. Wiss., red. v. *H. Wild.* Bd. 14. St. Petersbourg 1891.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von *H. Wild.* Jahrg. 1890, Th. 2. St.-Petersburg 1891.

Acta Horti Petropolitani. T. 11, Fasc. 2. T. 12, Fasc. 1. Petropoli 1892.

Archives des sciences biologiques publ. par l'Institut Impér. de médecine expérimentale à St. Petersbourg. T. 1, No. 1—3. St. Petersbourg 1892.

Trudy S.-Petersburgskago Obščestva estestvoispytatelej. T. 22. Otdělenie botan. St. Peterburg 1892.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na osennee i vesennee polugodie 1892/93. St. Peterburg 1892.

Otčet o sostojanij Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta za 1891 god. S.-Peterburg 1891.

Protokoly zasědanij sověta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. No. 44. St. Peterburg 1891.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. Čast 27—30. St. Peterburg 1891. 92.

Perečen' izdanij i prodolženij Svoda zakonov. St. Peterburg 1892.

Položenie o gubernskich i uězdnych zemskich učreždenijach. T. 2, čast 1. Izdanie 1891 goda. St. Peterburg.

Prodolženie Svoda zakonov Rossijskoj Imperii. Po 1 Jjulja 1891 goda. St. Peterburg.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 35. Riga 1892.

Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tifliser Physikalischen Observatorium i. J. 1884. 85. Hrsg. v. *J. Mielberg.* Tiflis 1886. 91.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1890. Hsg. v. *J. Mielberg.* Tiflis 1891.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1890. Hsg. v. *J. Mielberg.* Tiflis 1891.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museums Aarsberetning for 1883. 84. 89. 90. Bergen d. J.

Jensen, Olaf S., Turbellaria ad litora Norvegiae occidentalia. Bergen 1878.

Koren, Joh. og *Danielssen, D. C.*, Nye Alcyonider, Gorgonider og Pennatulider tilhørende Norges Fauna. Bergen 1883.

Nansen, Fridtjof, Bidrag til Myzostomernes anatomi og histologi. Bergen 1885.

Sars, M., *Koren, J.* og *Danielssen*, Fauna littoralis Norvegiae. Hft. 2. 3. Bergen 1856. 77.

Lorange, A., Samlingen af Norske Oldsager i Bergens Museum. Bergen 1876.

—— Den yngre jernalders svaerd, udgivet ved *Ch. Delgobe.* Bergen 1889.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1889. 90. Christiania 1891. 92.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32 (III. R., Bd. 6), H. 3. 4. Christiania 1891. 92.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XXI. Zoologi. *Danielssen, D.C.*, Crinoida. Echinida. Christiania 1892.

Norske Rigsregistranter tildeels i uddrag. Bd. 9, H. 2. Bd. 10—12 (1649—1660). Christiania 1887—91.

Johannessen, Axel, Die epidemische Verbreitung des Scharlachfiebers in Norwegen. Gekr. Preisschrift. Kristiania 1884.

Vold, J. Mourly, Spinozas erkjendelsestheorie i dens indre sammenhaeng og i dens forhold til Spinozas metafisik. Kristiania 1888.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 27 (1890/91), I. II. Lund 1890. 91.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 19 (1890). Stockholm 1891. 92.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. af Kongl. Vitterhets Hist. och Antiquitets Akademien genom *B. E. Hildebrand*. Delen 8, H. 3. 4. Delen 9, H. 3. Delen 10, H. 6. Delen 11, H. 4. Stockholm 1891.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomolog. Föreningen i Stockholm. Årg. 12 (1891), 13 (1892). Stockholm d. J.

Tromsø Museums Aarshefter. 14. Tromsø 1891.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 23 (1891). Upsal 1891. 92.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellsch. f. d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 32, Abth. 2. Basel 1891.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg 19.—21. Aug. 1891. 74. Jahresversammlung. Jahresbericht 1890/91. Freiburg 1892.

Compte-rendu des travaux présentés à la 74. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Fribourg les 19—21 août 1891. Genève 1891.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hsg. v. d. Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 4 (d. ganzen Reihe Bd. 14), H. 1. Basel 1892.

16. Jahresbericht der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft zu Basel über d. Vereinsjahr 1890/91. Basel 1891.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 9, H. 2. Basel 1891.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern a. d. J. 1891 (No. 1265—1278). Bern 1892.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 35 (Vereinsjahr 1890/91). Chur 1892.

Index lectionum quae in univers. Friburgensi per menses aest. anni 1892 habebuntur. Friburgi Helvet. 1892.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Volume supplémentaire. Centenaire de la fondation de la Société. Genève 1891.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 36, H. 2—4. Jahrg. 37, H. 1. 2. Zürich 1891. 92. — Generalregister der Publikationen der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich u. Uebersicht ihres Tauschverkehres. Zürich 1892.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 31—35. U Beograd 1892.

Srpska kralj. Akademija. Spomenik No. X—XIII. XV. XVII. XVIII. U Beograd 1892.

Türkei.

Revue médico-pharmaceutique. Publ. p. *P. Apéry*. Année 4 (1891), No. 7 11. 12. Année 5 (1892), No. 1. 2. 5—7. Constantinople d. J.

Nordamerika.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 22 (1891). Boston d. J.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 15, No. 2. New Haven 1892.

Proceedings of the American Oriental Society, at Washington, Apr. 1892. New Haven 1892.

El Instructor. Periódico científico y literario. Año 9 (1892), No. 2—4. 6. 7. Aguascalientes d. J.

Transactions of the Texas Academy of science. Vol. 1, No. 1. Austin 1892.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 11, No. 93—100. Vol. 12, No. 101. Baltimore 1891. 92.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 13, No. 3. 4. Vol. 14, No. 1. Baltimore 1891.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science Ser. IX, 1—12. Ser. X, 1—3. Baltimore 1891. 92.

American Academy of arts and sciences. [Boston]. Memorial of *Joseph Lovering*. Cambridge, Mass. 1892.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 17. (Whole Ser. Vol. 25). Vol. 18 (Whole Ser. Vol. 26). From May 1889 to May 1891. Selected from the Records. Boston 1890. 91.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 25, P. I. II. Boston 1891.

Bulletin of the Buffalo Society of natural sciences. Vol. 5, No. 3. Buffalo. 1891.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 22, No. 1—4. Vol. 23, No. 1—3. Cambridge, Mass. 1891. 92.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 14, No. 2. Vol. 17, No. 2. Cambridge, Mass. 1892.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1890/91. Cambridge, Mass. 1891.

The Journal of comparative neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 1, No. 4. Vol. 2, No. 1. Cincinnati 1891. 92. No. 2. 3. Granville 1892.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural science of Halifax. Vol. 7, P. 4. Ser. II. Vol. 1, P. 1. Halifax 1890. 91.

Second Geological Survey of Pennsylvania. AA. Southern Anthracite Field, Atlas P. III. IV; AA. Western Middle Anthracite Field, Atlas P. III; Northern Anthracite Field, Atlas P. VI. — B. — AA. P. V. VI. Harrisburg 1892.

Proceedings of the Haverford College Observatory 1891. — Sun spot Observations.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 5, Art. 1. Lincoln, Nebr. 1892.

University of Nebraska. Fifth annual Report of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Lincoln, Nebr. 1891.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. VIII, (1888—91). Madison 1892.

Transactions of the Meriden Scientific Association. Vol. 4 (1889—90). Meriden 1891.

Memorias (y Revista) de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 4, Cuad. 11. T. 5, cuad. 1—12. T. 6, Cuad. 1. 2. México 1888—92.

Faye, H., Teoria de los errores. Trad. del frances p. *J. de Mendizábal Tamborrel*. Edicion de la Socidad »Alzate«. México 1888.

Observatorio meteorologico-magnético central de México. Boletin mensual. T. 3 (1890), No. 3. 4. México 1892.

Bulletin of the Minnesota Academy of natural sciences. Vol. 3, No. 2. Minneapolis 1891.

The geological and natural history Survey of Minnesota. The 19. annual Report, f. the year 1890. Minneapolis 1891.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1891. Vol. 9. Montreal 1892.

Geological and natural history Survey of Canada. Annual Report. N. Ser. Vol. 4 (1888—89). Montreal 1890.

Reports on the Observations of the total eclipse of the sun Dec. 21/22, 1889, and of the total eclipse of the moon, July 22, 1888, publ. by the Lick Observatory [Mount Hamilton]. Sacramento 1891.

Report for the year 1891/92, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven o. J.)

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. 5, Extra No. 1—3. Vol. 6, No. 1—6. New York 1891. 92.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. 10, No. 2—8. Vol. 11, No. 1—5. New York 1890—92.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 23, No. 4, P. I. II. Vol. 24, No. 1—3. New York 1891. 92.

Astronomy and Astrophysics. Ed. by *W. Payne* and *G. E. Hale*. No. 101. 104. (N. Ser. No. 1. 4) Northfield, Minn., d. J.

Geological Survey Department. Annual Report. N. S. Vol. 4, P. B. N. (1888—89). Ottawa 1891.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1891, P. I.—III. (Jan.—Dec.). 1892, P. I. (Jan.—March.). Philadelphia d. J.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. 29, No. 135. 136. Vol. 30, No. 137. 138. Philadelphia 1891. 92.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. N. Ser. Vol. 17, P. I. II. Philadelphia 1892.

Philipps, H., List of surviving members of the American Philosophical Society. Corrected to Jan. 9, 1892. Philadelphia d. J.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Datos obtenidos en 1891. — Prognóstico dado para el año de 1891. Resumen: Setiembre 1891 — Junio 1892. — Resumen general correspondiente al año de 1891. Puebla 1891. 92.

Proceedings of the Rochester Academy of science. Vol. 1, Broch. 1. 2. Rochester, N. Y. 1890. 91.

Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 5, No. 1—4. Vol. 6, No. 1. St. Louis 1888. 92.

The total Eclipse of the sun, Jan. 1, 1889. A Report of the observations made by the Washington University Eclipse Party, at Norman, California. Publ. by the Academy of science of St. Louis. Cambridge 1891.

Missouri Botanical Garden. Annual Report. 2. 3. St. Louis 1891. 92.

Proceedings of the California Academy of sciences. II. Ser. Vol. 3, P. 1. San Francisco 1891.

Geographical Society of California. Special Bulletin by *Thomas Crawford Johnston.* (San Francisco) 1892.

The benefactors of the University of Toronto, after the great fire of the 14. Febr. 1890. Toronto 1892.

Annual Archaeological Report and Canadian Institute. Session 1891, being an appendix to the Report of the Minister of education, Ontario. Toronto 1891.

Transactions of the Canadian Institute. Vol. 2, P. 2. Toronto 1892.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1889. 1890. Washington 1890. 91.

Bureau of Education. Circular of information, 1891, No. 2. 4. 8. 9, Washington 1891.

Bureau of Education. Report of the Commissioner af education for the year 1888/89. Vol. 1. 2. Washington 1891.

Contributions to the Nord-American Ethnology. Vol. 6. Washington 1890.

Dorsey, James Owen, Omaha and Ponka Letters. Washington 1891.

Pilling, James Constant, Bibliography of the Algonquian languages. Washington 1891.

Thomas, Cyrus, Catalogue of prehistoric works east of the Rocky Mountains. Washington 1891.

U. S. Department of Agriculture. Division of Ornithology and Mammalogy. North American Fauna. No. 5. Washington 1891.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 34: No. 140. *Leconte, J.*, List of the Coleoptera of North America. P. 1. Washington 1863. — No. 156. *Egleston, T.*, Catalogue of minerals. 1863. — No. 167. *Leconte, J.*, New species of North American Coleoptera. P. 1. 1863. — No. 238. List of the institutions, libraries, colleges in the U. S. in correspondence with the Smithsonian Institution. 1872. — No. 335. List of the principal scientific and literary institutions in the U. S. 1879. No. 478. *Rhees, W. J.*, Catalogue of publications of the Smithsonian Institution 1846-1882. 1882. — Directory of officers, collaborators etc. of the Smithsonian Institution, National Museum, Geological Survey, and Fish Commission. 1882. — *Henry, J.*, Eulogy on Alex. Dallas Bache (From the Report of the Smithsonian Institution for 1870). 1872. — No. 594. *Mills, Ch. K.*, Mental over-work and premature disease among public and professional men. [Toner Lectures, Lect. 9] 1885. — No. 663. *Traphagen, Frank W.*, Index to the literature of Columbium 1801—1887 ib. 1888. — No. 708. *Allen, H.*, Clinical study of the skull. [Toner Lectures, Lect. 10] 1890. — No. 741. *Tuckerman, A.*, Index to the literature of Thermodynamics 1890. — No. 764. *Rogers, J. A.*, The corrections of sextants for errors of eccentricity and graduation. ib. 1890. — No. 785. *Tuckerman, A.*, Bibliography of the chemical influence of light. 1891.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 27: No. 85. Appendix. Publications of learned societies and periodicals in the library of the

Smithsonian Institution. P. II. Washington 1856. — No. 103. *Caswell, Al.*, Meteorological observations made at Providence, R. J., 1831—1860. 1860. — No. 121. *Bache, A. D.*, Discussion of the magnetic and meteorological Observations made at Philadelphia 1840—1845. P. II. 1862. — No. 800. *Gray, Asa.*, Plates prepared between the years 1849 and 1859, to accompany a Report on the forest trees of North America. Washington 1891. — No. 801. *Langley, S. P.*, Experiments in Aerodynamics. 1891. — Vol. 28. Washington 1892.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and conditions of the Institution to July 1889. 90. Washington 1891. 92.

Bulletin of the U. S. National Museum. No. 41. 42. Washington 1891.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 13 (1890), Washington 1891.

Observations made during the year 1885—1888 at the U. S. Naval Obvervatory. Washington 1891. 92.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending June 30, 1891. Washington d. J.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 25. (Washington 1892).

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress during the fiscal year ending with June 1890. P. I. II. Washington 1892.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 1. Washington and New York 1890. Vol. 2. New York and Rochester 1891.

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 62. 65. 67—81. Washington 1890. 91.

Tenth annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior, 1888—89, by *J. W. Powell*. P. I. II. Washington 1890.

U. S. Geological Survey (Department of the Interior). Mineral Resources of the United States. Calendar year 1889. 90. Washington 1892.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 32, Entr. 6. T. 33, Entr. 1—6. T. 34, Entr 1. Buenos Aires 1891. 92.

Lallemant, G. A., El Paramillo de Upsallata. Memoria presentada a la Sociedad científica Argentina. Buenos Aires 1890.

Revista Argentina de historia natural. T. 1, Entr. 6. Buenos Aires 1891.

Revisto do Observatorio. Publicação mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. Anno 6 (1891), No. 11. 12. Anno 7 (1892), No. 1. Rio de Janeiro d. J.

Boletim da Commissão geographica e geologica do Estado de Saõ Paulo. No. 4—7. S. Paulo 1890.

Actes de la Société scientifique du Chili. Tom. 2 (1892), Livr. 1. 2. Santiago d. J.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 2. H. 3. 4. Santiago 1892.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 29 (1891), Afl. 2. 3. Deel 30 (1892), Afl. 1. 2. Batavia d. J.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 34, Afl. 6. Deel 35, Afl. 1. 3. 4. Deel 36, Afl. 1. Batavia, 's Hage 1891. 92.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 45, Stuk 3. 4. Deel 46. 47, Stuk 1. Batavia, 's Hage 1891. 92.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door *J. A. van der Chijs*. Deel 9. 10. Uitgegeven door het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1891. 92.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over gehael Nederlands-India anno 1663. Uitgeg. door het Bataav. Genootsch. van kunsten en wetensch. med medemaking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toeficht van *J. A. van der Chijs*. Batavia, s'Hage 1891.

Jjzerman, J. W., Beschribing der oudheden nabij de grens der residentie's Soerakarta en Djogdjakarta. Met Atlas. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetenschappen. Batavia, 'sGravenhage 1891.

Verbeek, R. D. M., Ouderheidkundige Kaart van Java. Batavia, 'sHage 1891.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 13 (1890). Batavia 1891.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 12 (1890). Batavia 1891.

Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen van de directie der Kon. Natuurkundige Vereeniging en Nederlandsch-Indie gedurende het jaar 1891.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 51 (VIII. Ser., D. 12). Batavia 1892.

India Museum Notes, issued by the Trustees. Vol. 2, No. 1—5. Calcutta 1891.

Sclater, W. L., List of Snakes in the Indian Museum. Calcutta 1891.

—— List of the Batrachia in the Indian Museum. London 1892.

Imperial University of Japan (Teckoku Daigaku), The Calendar for the year 1891/92. Tōkyō 1892.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 5, P. I. II. Tōkyō 1892.

Mitteilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 1, No. 5. Tokio 1892.

Afrika.

The Transactions of the South African Philosophical Society. Vol. 6, P. I. (1889. 90), P. II (1892). Cape Town 1890—92.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. Newe Ser. Vol. 3. 4, P. I. Melbourne 1891. 92.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. 2, P. 1. 2. Vol. 3, P. 1. Melbourne 1891. 92.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 25 (1891) Sydney d. J.

Report of the third Meeting of the Australian Association for the advancement of science. 1891. Sydney d. J.

New South Wales. Australian Museum. Report of Trustees for the year 1890. Sydney 1891.

Records of the Australian Museum. Edit. by the Curator. Vol. 2, No. 1. Sydney 1892.

2. Einzelne Schriften.

Bergbohm, Jul., Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- u. Numeralrechnung. Stuttgart 1892.

—— Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Stuttgart 1892.

Berlanga, Man. Rodr. de., El nuevo bronce de Italica. Malaga 1891.

Bloomfield, Maur., Interpretation of the Veda. 4. Ser. (S.-A.). Baltimore 1892.

Cayley, Arth., The collected mathematical papers. Vol. 5. Cambridge 1892.

Documents relatifs a l'unification de l'heure et à la législation du nouveau mode de mesurer le temps. Impr. par l'ordre du parlement. Ottawa 1891.

Fleming, Sandford, An Appeal to the Canadian Institute of the rectification of parliament. Toronto 1892.

Gömöri Havas, Sándor, Budapest Régiségei. T. 3. Budapest 1891.

Goppelsröder, Frdr., Studien über die Anwendung der Electrolyse zur Darstellung, zur Veränderung und zur Zerstörung der Farbstoffe, ohne oder in Gegenwart von vegetabilischen u. animalischen Fasern. (S.-A.). Frankfurt a. M. 1891.

Hale, George E., A remarkable solar disturbane. (Sep.-A.). o. O. 1892.

—— Spectroscopic observations of the great sun-spot group of Febr. 1892. (Sep.-A.) o. O. 1892.

—— The Yerkes Observatory of the University of Chicago. (Sep.-A.) o. O. 1892.

—— Photographs of solar phenomena. (Sep.-A.). o. O. 1892.

—— Solar photography at the Kenwood astro-physical Observatory. (Sep.-A.). o. O. 1892.

—— Some results and conclusions derived from a photographic study of the sun. (Sep.-A.). o. O. 1892.

—— The ultra-violet spectrum of the solar prominences (Sep.-A.). o. O. 1892.

Hennig, C, Über Menstruation und Ovulation. (Sep.-A.). Leipzig 1891.

150 Jahre Schlesische Zeitung 1742—1892. Ein Beitrag zur vaterländischen Culturgeschichte. Breslau 1892.

Legrelle, A., L'acceptation du testament de Charles II., roi d'Espagne par Louis XIV. (Sep.-A.). Gand 1892.

Löwenberg, L'otite grippale observée à Paris en 1891. (Sep.-A.). Tours 1892

Maasburg, M. Friedr. von, Geschichte der obersten Justizstelle in Wien (1749—1848). 2. Aufl. Prag 1892.

Macfarlane, A., On exact analysis as the basis of language. (Sep.-A.). o. O. 1892.

—— Principles of the algebra of physics. Salem, Mass. 1891.

Mitrofanov, P. J., Izslědovanija nad razvitiem pozovnočnych životnych. Varšava 1892.

Nehring, A., Bemerkungen zu Credner's Arbeit über die geologische Stellung der Klinger Schichten. (Sep.-A.). Berlin 1892.

—— Die Flora des diluvialen Torflagers von Klinge bei Cottbus. (Naturwissensch. Wochenschr. Bd. 7, No. 45). Berlin 1892.

Notice sur les travaux scientifiques de Edouard Jannettaz. Paris 1882.

Schlesinger, Ludw., Urkundenbuch der Stadt Saaz bis 1526. Prag, Leipzig etc. 1892.

Schreiber, P., Untersuchung über die Periodicität des Niederschlags im Königreich Sachsen. (Sep.-A.). o. O. 1891.

Tamborell, J. de Mendizábal, Tables de logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125 000. Paris 1891.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

W. Ostwald, Über die Leitung der Elektricität durch Metalle 531

Pfeffer, Über Anwendung des Gipsverbandes für pflanzenphysiologische Studien 538

J. Thomae, Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Mit einer Figur 543

Leuckart, Über die Speicheldrüsen der Hirudineen 556

Sophus Lie, Untersuchungen über Translationsflächen (Abhandlung II) 559

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

CANCELLED
JUN 1 [illegible] 3 H

3 2044 092 889 286